

# **Des lois continues, pourquoi et pour quoi faire**

Michel HENRY  
IREM de Besançon

## **Plan de l'article**

### **I – Expériences aléatoires et modèles probabilistes : du discret au continu**

- 1 – Lancer d'un dé, loi des faces
- 2 – Paradoxe des 3 bancs – quel modèle
- 3 – Le jeu de Franc-Carreau – une loi continue « naturelle »
- 4 – L'aiguille de Buffon – un modèle surprenant
- 5 – Le paradoxe de Bertrand, autres modèles

### **II – Du discret au continu – attente d'un événement**

- 1 – Attente d'un événement fortuit, hypothèses de travail
- 2 – Modélisation du temps d'attente (cas discret)
- 3 – Du discret au continu – de la loi géométrique à la loi exponentielle  
Exemple de la désintégration radioactive
- 4 – Hypothèses heuristiques pour un processus de Poisson : la loi exponentielle s'impose simplement
- 5 – De la loi binomiale à la loi de Poisson

### **III – Conclusion – Des lois continues pour quoi faire en Terminale**

- 1 – La notion de loi dans les classes de première
- 2 – Des lois continues en Terminale S
- 3 – Notion de densité, prolongements des outils probabilistes pour des modèles performants

# I – Expériences aléatoires et modèles probabilistes : du discret au continu

## 1 – Lancer d'un dé, loi des faces

Dans l'esprit des programmes des années 2000, séparons l'expérience concrète, éventuellement répétée de nombreuses fois pour permettre d'observer les effets du hasard sur les fluctuations des fréquences d'apparition des différentes faces, du modèle probabiliste très simple, introduit en classe de première, censé la décrire théoriquement.

Nous sommes alors amenés à distinguer des «**Hypothèses de travail**» et «**Hypothèses de modèle**» qui pourront en découler :

Hypothèses de travail : le dé est correctement construit dans une matière suffisamment homogène pour bien accepter les symétries en jeu plaçant les 6 faces dans des conditions équivalentes, il est lancé dans des conditions reproductibles assez ouvertes pour qu'aucune prévision mécanique ne puisse être avancée pour connaître par avance la face qui se présentera, etc.

Hypothèse de modèle : Il y a 6 issues possibles, toutes équiprobables de probabilité 1/6. Si on désigne ces issues par les points portés par les faces du dé, la probabilité est distribuée sur cet ensemble noté  $\Omega$  suivant une loi que l'on peut représenter par le tableau

$$\Omega = \{ \cdot, \cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot, \cdot\cdot\cdot \}, \text{ loi sur } \Omega$$

$\omega_i$	•	••	•••	•• ••	••• ••	•••• ••••
$p_i$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Dans le modèle probabiliste, on peut numériser ces issues en introduisant une variable aléatoire  $X: \Omega \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  dont la loi est donnée par le tableau loi de  $X$

$x_i$	1	2	3	4	5	6
$p_i$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Cette loi est notée  $IP_X$  et les valeurs  $p_i$  des probabilités élémentaires associées aux événements « $X = x_i$ » sont notées indifféremment

$$p_i = IP(X = x_i) = IP_X(\{x_i\})$$

La loi de  $X$  est appelée loi uniforme discrète sur  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

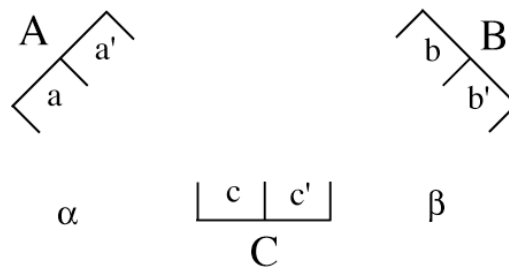
Cette distinction entre hypothèses de travail et hypothèses de modèle sera omniprésente chaque fois qu'il s'agira de comprendre le processus de modélisation qui permettra d'analyser les situations aléatoires de la réalité à partir de connaissances probabilistes théoriques. Cela devient incontournable pour comprendre le passage d'une situation aléatoire concrète, où l'ensemble des issues possibles est naturellement discret, à un modèle probabiliste continu. Elle s'avère aussi très utile pour lever certains paradoxes qui peuvent se présenter quand les

situations réelles ne sont pas décrites avec suffisamment de précision, comme le montre le petit exemple bien connu qui suit.

## 2 – Paradoxe des 3 bancs – quel modèle ?

Voici ce problème des trois bancs :

Dans un square il y a trois bancs à deux places.  $\alpha$  et  $\beta$  vont s'asseoir « au hasard ». Quelles chances ont-ils de se retrouver sur le même banc ?



La manière dont le hasard intervient dans cette situation (d'école) n'est pas précisée. La locution « au hasard », nous dit-on, suppose implicitement l'équiprobabilité des issues. Mais quel est l'ensemble des issues considéré : les bancs ou les places ? Cela n'est pas non plus précisé. Cette imprécision est d'ailleurs à la source de nombreux paradoxes du calcul des probabilités, quand plusieurs modèles peuvent être invoqués pour décrire une même situation. Analysons ce problème en précisant nos hypothèses de travail et de modèle.

Hypothèses de travail 1 :  $\alpha$  va s'asseoir en a. Peu importe sa manière de choisir sa place.  $\beta$  tire un banc « au hasard » parmi A, B et C, et va s'asseoir. L'événement E est réalisé par le choix du banc A.

Hypothèses de modèle 1 : On prend un modèle à 3 éléments,  $\Omega = \{A, B, C\}$  pour représenter le choix de  $\beta$  parmi les 3 bancs. L'hypothèse de travail suggère de répartir la probabilité de manière uniforme sur  $\Omega$ . On a donc la loi :

A	B	C
1/3	1/3	1/3

L'événement E est réalisé par le choix de A :  $P(E) = 1/3$ .

Hypothèses de travail 2 :  $\alpha$  va s'asseoir en a.  $\beta$  tire une place « au hasard » parmi les 5 restantes a', b, b', c et c', et va s'asseoir. L'événement E est réalisé par le choix de la place a'.

Hypothèses de modèle 2 : On prend un modèle à 5 éléments,  $\Omega = \{a', b, b', c, c'\}$  pour représenter le choix de  $\beta$  parmi les 5 places. L'hypothèse de travail suggère de répartir la probabilité de manière uniforme sur  $\Omega$ . On a donc la loi :

a'	b	b'	c	c'
1/5	1/5	1/5	1/5	1/5

E est réalisé par le choix de a' :  $P(E) = 1/5$ .

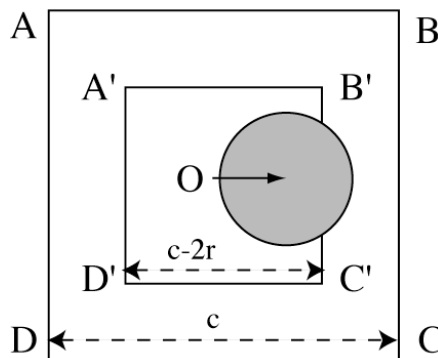
Quelle conclusion tirer ? Que l'énoncé ne décrit pas suffisamment précisément une véritable expérience aléatoire ? quel choix aléatoire pour ? Dans ces conditions deux modèles aussi pertinents l'un que l'autre peuvent être proposés. Il n'est pas surprenant qu'ils conduisent à deux résultats différents.

### 3 – Le jeu de Franc-Carreau : une loi continue « naturelle »

Ce jeu, répandu à la cour, a été étudié par Georges Louis Leclerc, comte de Buffon en 1733. Pour la première fois, un point de vue probabiliste s'appliquait à une situation où les issues théoriques considérées forment un ensemble continu, géométrique en l'occurrence, d'où le nom de « probabilités géométriques » que l'on donne parfois à ce type de problèmes. Nous allons voir que le point de vue de Buffon peut se ramener au concept élémentaire de probabilité tel qu'il se présentait à l'époque, défini alors par la formule que Laplace érigera en 1812 en premier principe :  $\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$ .

Le jeu consiste à jeter un écu (pièce de monnaie en forme de disque) sur un carrelage régulier. Les joueurs parient sur la position finale de l'écu : à cheval sur un ou plusieurs joints entre les carreaux ou entièrement dans un seul carreau (position de franc-carreau). Comment déterminer la probabilité de faire franc-carreau ?

Si on désigne par ABCD le carreau de côté  $c$  dans lequel le centre  $O$  de l'écu est tombé, la condition « franc-carreau » est géométriquement élémentaire : elle est réalisée si et seulement si le centre du disque tombe à l'intérieur du carré  $A'B'C'D'$  de côté  $c-2r$ , homothétique du carré ABCD par rapport à son centre.

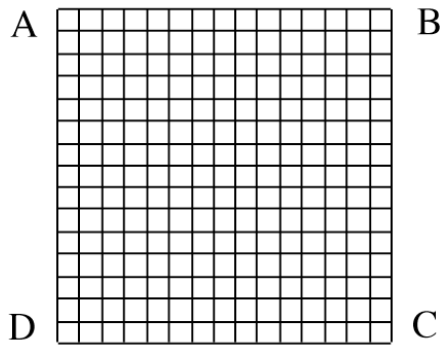


Hypothèse de travail : l'écu est lancé « au hasard » et tous les points à l'intérieur du carré ABCD ont « la même chance » d'être atteints par le centre  $O$ .

Hypothèse de modèle continu : L'ensemble des issues est l'ensemble  $\Omega$  des points intérieurs au carré ABCD. Mais quelle loi proposer pour refléter l'hypothèse de travail ?

Remarquons que si l'on cherchait à affecter une même probabilité à chacun de ces points, celle-ci ne pourrait être strictement positive en vertu de l'axiome d'additivité, vu l'infinitude de ces points. Elle ne peut être nulle, car la probabilité de tomber dans le carré ABCD vaut 1. Cette situation probabiliste ne peut être abordée élémentairement, elle suppose l'introduction de nouveaux outils dans la théorie.

On va ramener ce problème à un problème élémentaire par le biais d'un modèle approché. Pour cela, on « discrétise » le carré ABCD :



On tapisse ABCD par un quadrillage de petits carrés unité  $u_i$  de côté  $c/100$  par exemple

Pour fixer les idées, prenons  $c = 10$  cm,  $r = 1$  cm, et  $u_i$  de côté 0,01 cm.

L'aire de ABCD est  $100 \text{ cm}^2$  et celle de  $A'B'C'D'$  vaut  $64 \text{ cm}^2$ .

Hypothèse de modèle discret on prend alors comme ensemble  $\Omega'$  des issues possibles l'ensemble des petits carrés  $u_i$ . Ils sont au nombre de  $10^6$ . On traduit l'hypothèse de travail en posant qu'ils sont équiprobables  $\forall i, IP(u_i) = 1/10^6$ .

L'événement «Franc-carreau» (FC) est réalisé si O tombe dans l'un des  $u_i$  qui tapissent  $A'B'C'D'$  (exactement avec nos hypothèses numériques). Par définition de la probabilité d'un événement,  $IP(FC) = \sum_{\{i: u_i \cap A'B'C'D'\}} IP(u_i) = [(c - 2r)/100]^2 IP(u_i) = 0,64$ .

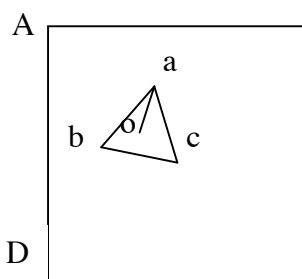
Par définition élémentaire de la mesure de l'aire d'une figure comme nombre de carrés unités qui peuvent la recouvrir, on a obtenu  $IP(FC) = \frac{\text{aire de } A'B'C'D'}{\text{aire de } ABCD}$ .

Cette remarque nous permet de compléter et généraliser notre hypothèse de modèle continu pour tout domaine  $A$ , inclus dans ABCD (d'aire mesurable), si E est l'événement «Le centre O est tombé dans A», on pose que la probabilité de E est proportionnelle à l'aire de A  $IP(E) = \frac{\text{aire de } A}{\text{aire de } ABCD}$ .

La propriété de sous-additivité de l'aire (l'aire de la réunion de deux parties disjointes est la somme des aires de ces parties) donne à IP les propriétés d'une loi de probabilité, c'est la **loi uniforme continue** sur le carré ABCD.

On retrouve le fait nécessaire que dans ce modèle, la probabilité que O tombe sur une figure réduite à un point (ou à un ensemble dénombrable de points) est nulle.

Ce point de vue des «Probabilités géométriques» semble satisfaisant dans le cas très simple traité ici où les événements considérés peuvent s'énoncer en termes d'aires. Ce n'est pas toujours le cas. Prenons celui d'un jeu de franc-carreau où l'on a remplacé l'écu par une plaque en forme de triangle équilatéral.



B On peut prendre pour paramètres aléatoires les coordonnées  $x$  et  $y$  du centre  $o$  du triangle et l'angle polaire  $\theta$  du vecteur  $oa$ .  
 Il n'y a pas d'interprétation géométrique simple de l'événement «Franc-carreau».  
 On peut représenter cet événement dans un repère en 3 dimensions comme une partie du pavé

$[0, c] \times [0, c] \times [0, 2\pi]$  muni d'une loi uniforme continue. C'est ce que fera Buffon pour résoudre son fameux problème de l'aiguille, comme nous allons le voir.

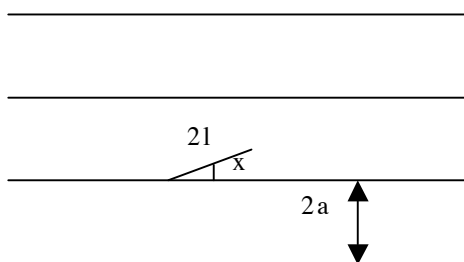
En classe, ce problème du triangle peut être simulé sur ordinateur et la probabilité de «Franc-carreau» peut être évaluée par une approche fréquentiste, mettant en œuvre une forme naïve (vulgarisée) de la loi des grands nombres.

Mais quelles loi introduire dans cette simulation pour les paramètres  $x$ ,  $y$  et  $\theta$ ? En gros, quel modèle implanter dans la machine?

#### 4 – L’aiguille de Buffon – un modèle surprenant

Sur un parquet formé de planches de largeur  $2a$ , séparées par des rainures droites, parallèles et équidistantes, on jette une aiguille de longueur  $2l$ , avec  $l < a$ .

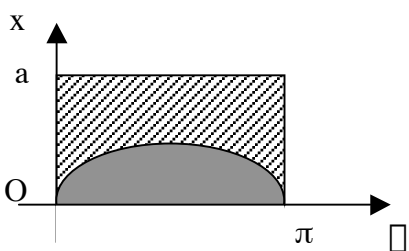
Quelle est la probabilité que l’aiguille coupe l’une des rainures (événement  $A$ )?



Soit  $x$  la distance du milieu de l’aiguille à la rainure la plus proche.  $x$  prend une valeur aléatoire quelconque dans  $[0, a]$ .

Soit  $\theta$  l’angle des droites formées par cette rainure et l’aiguille.  $\theta$  prend une valeur aléatoire quelconque dans  $[0, \pi]$ .

Dans une représentation cartésienne du pavé  $\Omega = [0, a] \times [0, \pi]$  (rectangle hachuré), l’événement  $A$  est représenté par la partie grisée délimitée par la courbe d’équation  $x = l \sin \theta$ .



Dans cette représentation, on prend pour modèle probabiliste la loi uniforme sur le rectangle  $\Omega$ .

On a donc

$$IP(A) = \frac{\text{aire grisée}}{\text{aire hachurée}} = \frac{1}{\pi a} \int_0^{\pi} l \sin \theta \, d\theta = \frac{2l}{\pi a}.$$

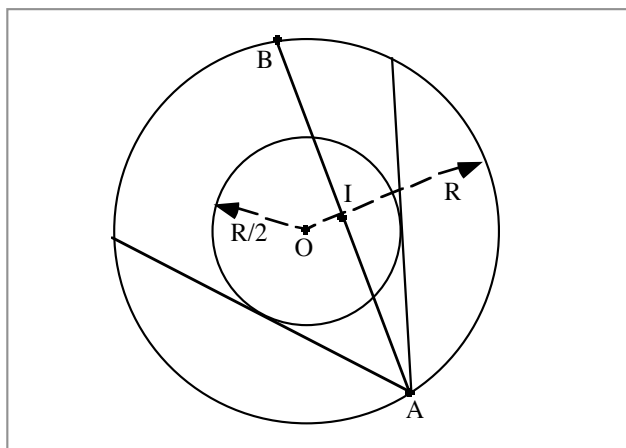
Pour la première fois, le nombre  $\pi$  intervenait dans l’expression d’une probabilité.

#### 5 – Le paradoxe de Bertrand, autres modèles

Dans les situations où interviennent des variables continues, le choix explicite d’une loi de probabilité devient incontournable. Le paradoxe de Bertrand en est un bel exemple.

Bertrand posait en 1899 le problème en ces termes :

*Soit un cercle de rayon  $R$ . J’en prends une corde au hasard. Quelle est la probabilité que sa longueur soit supérieure à celle du côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle (événement  $A$ )?*



Et il proposait au moins trois solutions, suivant l'interprétation que l'on peut donner du "choix au hasard" d'une corde parmi l'infinité de celles-ci:

1) Choisir une corde réalisant  $A$ , c'est choisir sa distance au centre inférieure à  $R/2$ . La répartition uniforme de la probabilité sur  $[0, R]$ , qu'induit le "choix au hasard", conduit à la probabilité  $IP(A) = 1/2$ .

2) Choisir une corde réalisant  $A$ , c'est fixer l'une de ses extrémités, puis, à partir de ce point, partageant le cercle en trois arcs égaux, c'est choisir l'autre extrémité sur l'arc opposé. Le choix "au hasard" de cette deuxième extrémité induit la répartition uniforme sur le cercle et conduit à la probabilité  $IP(A) = 1/3$ .

3) Choisir une corde réalisant  $A$ , c'est choisir son milieu à l'intérieur du disque ( $d$ ) concentrique de rayon  $R/2$ . Le choix de ce point "au hasard" dans le disque ( $D$ ) de rayon  $R$  induit la répartition uniforme de la probabilité sur tout le disque; les aires des deux disques sont dans le rapport  $1/4$ , d'où  $IP(A) = 1/4$ .

Levons ce paradoxe :

Comme dans le problème précédent, rien dans l'énoncé de Bertrand ne permet de choisir une loi plutôt qu'une autre pour modéliser le "choix au hasard" de la corde, d'où l'ambiguïté paradoxale. Celle-ci est si forte que certains proposent de réaliser l'expérience un grand nombre de fois pour vérifier statistiquement si la fréquence des cordes réalisant  $A$  que l'on prélèverait ainsi, se "stabiliserait" au voisinage de l'une des probabilités annoncées.

Le problème reste entier car il y a de nombreux dispositifs qui pourraient être inventés pour "tirer une corde au hasard", chacun donnant une valeur différente à cette fréquence. Choisir un de ces dispositifs revient en fait à choisir la loi de probabilité qui compléterait la description insuffisante de cette pseudo-expérience aléatoire.

Voici quelques exemples de lois et de probabilités de  $A$  associées qui sont autant de solutions au problème de Bertrand :

Convenons que choisir une corde, cela revient à choisir son milieu (la correspondance corde-milieu est bijective, si l'on exclut les diamètres et le centre du cercle qui sont négligeables pour notre problème).

Imaginons que le disque ( $D$ ) est une cible et que l'on confie le choix de ce milieu à des tireurs à l'arc, l'impact d'une flèche sur le disque-cible de rayon  $R$  étant considéré comme ponctuel (on est déjà en train de modéliser !).

On peut aussi supposer que tous les tireurs atteignent la cible à tous les coups (sinon le tir est annulé, ce qui ne change pas la loi de répartition des autres impacts).

Chaque tireur a ses caractéristiques propres : pour le débutant dont les flèches vont n'importe où, pour le tireur de club qui atteindra le rond central ( $d$ ) de rayon  $R/2$  avec une faible probabilité, autant que pour le champion olympique qui, bien que champion, ne peut garantir que ses tirs échappent aux aléas, le hasard interviendra diversement pour guider la flèche jusqu'à son impact, milieu de la corde recherchée.

Proposons des modèles possibles pour les trois tireurs :

1) Le débutant tire au jugé : proposons la loi uniforme sur le disque ( $D$ ) de rayon  $R$  (cela est bien sûr une hypothèse de modèle, le débutant peut s'en tirer mieux que cela). Cette

loi a une densité constante égale à  $1/\pi R^2$  sur (D), nulle en dehors. Cette hypothèse conduit à la probabilité de l'événement A « l'impact est dans le disque (d) de rayon R/2 » proposée par Bertrand :

$$IP(A) = \frac{\text{aire de (d)}}{\text{aire de (D)}} = \int_{(d)} \frac{1}{\pi R^2} dx dy = \frac{1}{4}$$

2) Le tireur de club est affecté d'un strabisme divergent : il tire systématiquement trop à droite. Statistiquement, ses impacts se répartissent en moyenne autour du point de coordonnées (R/2, 0). Mais il tire assez fidèlement : les écarts-types de ses résultats par rapport à ce point moyen sont respectivement  $\sigma_x = R/4$  et  $\sigma_y = R/4$ . Pour le reste, une déviation aléatoire horizontale de son tir n'affecte pas systématiquement la hauteur et réciproquement.

On pourrait imaginer bien d'autres hypothèses très variées, notamment sur la corrélation possible entre les coordonnées (X,Y) du point d'impact de la flèche. Comme dans de nombreuses situations de répartition aléatoire autour d'une valeur centrale, on peut proposer un modèle gaussien en dimension 2 pour calculer la probabilité demandée.

Les hypothèses faites conduisent à une densité de probabilité pour les coordonnées (X,Y) de la forme:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y} e^{-\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{x - R/2}{\sigma_x} \right)^2 + \left( \frac{y}{\sigma_y} \right)^2 \right]}$$

et tenant compte des données numériques, on obtient la probabilité de A :

$$IP(A) = \int_{(d)} f(x,y) dx dy = 0,4$$

(ne cherchez pas à calculer cette intégrale par primitives, demandez plutôt à un ordinateur !).

3) Même hypothèse de modèle gaussien pour le champion olympique ; seulement, il vise juste, le point moyen de ses tirs est au centre. De plus, les coordonnées (X,Y) ne sont pas corrélées, enfin, les écarts-types des abscisses et ordonnées des impacts sont  $\sigma_x = R/4$  et  $\sigma_y = R/4$ . Dans ce cas, la probabilité qu'il atteigne le disque (d) est

$$IP(A) = \int_{(d)} \frac{1}{2\pi \sigma_x \sigma_y} e^{-\frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} \right]} dx dy = 0,86$$

Ainsi, les concepts de loi continue et de densité de probabilité permettent-ils de mieux poser ce type de problème de modélisation où interviennent des variables continues. Lors de la modélisation, ils permettent de formuler des hypothèses précises quant à la description de l'expérience aléatoire. Le choix d'un type de loi, comme ici le modèle gaussien, relève alors de considérations heuristiques.

Les lois de probabilités ne sont pas inscrites dans la nature, elles ont été inventées pour décrire les cas les plus simples, au sein d'une théorie mathématique (celle de la mesure). Leur utilisation pour traiter des problèmes concrets conduira à des approximations qui peuvent être fines et dont le contrôle est une partie importante de la statistique. La détermination des paramètres des lois en jeu (moyennes, écarts-types, corrélations) peut alors faire intervenir des procédures d'ajustement mettant en œuvre des tests statistiques.

## II – Du discret au continu □ attente d'un événement

### 1 – Attente d'un événement fortuit, hypothèses de travail

Un événement  $A$  peut survenir inopinément et se répéter fortuitement : panne d'un appareillage complexe, arrivée d'un client dans une file d'attente, accident de voiture dans la région, rupture du fil dans un métier à tisser, rayon cosmique, radioactivité etc.

On s'intéresse au temps d'attente aléatoire avant la prochaine manifestation de  $A$ . Cette situation se caractérise par un paramètre qui peut être évalué à partir d'une statistique □ on peut observer que, dans des conditions analogues,  $A$  se produit en moyenne  $c$  fois dans un intervalle de temps unité (par exemple, si  $c = 7,2$  fois par heure,  $c$  est la cadence horaire du phénomène).

Quelle loi attribuer à cette attente □ Sous quelles hypothèses de modèle □

On ne peut pas douter de l'intérêt de ce problème. Les informations de nature probabiliste qu'un tel modèle peut apporter seront utiles pour « gérer » ces situations □ mobilisation de personnels, budgétisation, contrôle de qualité ...

Dans la foulée de ce qui précède, décomposons le processus de modélisation en hypothèses de travail et hypothèses de modèle.

#### Hypothèses de travail □

- Il n'y a pas de moments où  $A$  apparaît plus souvent □ le phénomène est homogène dans le temps.
- Les « chances » de voir  $A$  se produire entre deux instants donnés  $t$  et  $t + \Delta t$  ne dépendent pas de ce qui s'est passé auparavant □ le phénomène est sans mémoire.
- Plus  $\Delta t$  est petit, moins il y a de chance de voir  $A$  entre  $t$  et  $t + \Delta t$ . De plus  $A$  ne se produit pas 2 fois presque en même temps □  $A$  est un événement « rare ».

Nous allons transformer ces hypothèses de nature heuristique en termes mathématiques adaptés aux outils probabilistes □

#### Hypothèses de modèle

On considère comme ensemble des issues possibles l'ensemble continu de tous les instants où  $A$  peut se produire □  $\Omega = ]0, +\infty[$ . Posons comme hypothèses □

- 1) La probabilité que  $A$  se produise dans un intervalle de temps  $]t, t + \Delta t]$  ne dépend que de  $\Delta t$  (phénomène homogène et sans mémoire).
- 2) Soit  $P(\Delta t)$  cette probabilité. On suppose que  $P(\Delta t) \sim \lambda \Delta t$  quand  $\Delta t \rightarrow 0$ , où  $\lambda > 0$  est une constante □  $A$  est rare.
- 3) Si  $t_1, t_2, t_3, t_4$  sont 4 instants successifs, les événements «  $A$  se produit entre  $t_1$  et  $t_2$  » et «  $A$  se produit entre  $t_3$  et  $t_4$  » sont indépendants ( $A$  est sans mémoire).

Soit  $Z$  le temps aléatoire qu'il faut attendre pour observer le premier  $A$  à partir d'un instant initial quelconque  $t_0$ . Quelle est la loi de  $Z$  □

Nous verrons plus loin que les hypothèses proposées suffisent pour résoudre directement ce problème, modulo une hypothèse technique de régularité de la densité de cette loi.

Mais il est plus intéressant et plus porteur de sens de considérer la variable continue  $Z$  comme limite de variables discrètes, comme on l'a fait pour le jeu de franc-carreau.

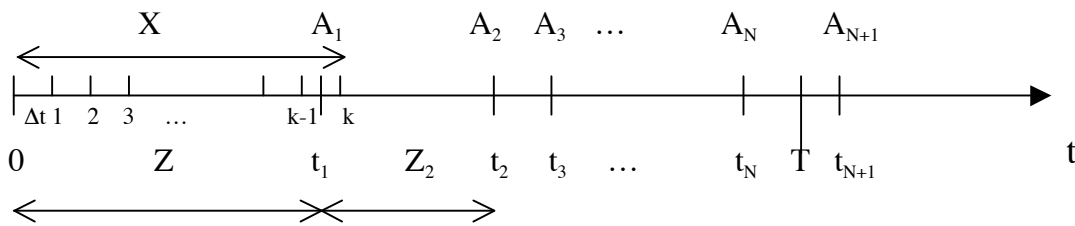
## 2 – Modélisation du temps d'attente (cas discret)

On fait une observation par minute pour voir si  $A$  s'est produit. On note les instants d'observation  $1, 2, 3, \dots, k-1, k, \dots$ , séparés par l'intervalle  $\Delta t = 1$  mn.

Soit  $[0, T]$  l'intervalle d'étude du phénomène pendant lequel on a observé un nombre (aléatoire)  $N$  de manifestations de  $A$ .

On note aussi  $t_1, \dots, t_N, \dots$  les instants où  $A$  se produit, et  $Z_k = t_k - t_{k-1}$  les variables d'attentes successives.

On peut représenter les notations utilisées par le schéma suivant que nous appellerons «Schéma de Poisson».



Soit  $e_k$  l'événement « $A$  s'est produit pendant la  $k^{\text{ième}}$  minute» (i.e. entre les instants  $k-1$  et  $k$ ) et  $\bar{e}_k$  l'événement contraire. Les  $e_k$  et  $\bar{e}_k$  ( $k \neq 1$ ) sont des événements indépendants en vertu de la troisième hypothèse de modèle.

Pour tout  $k$ , la probabilité que  $A$  se produise pendant la  $k^{\text{ième}}$  minute ne dépend pas de  $k$  (première hypothèse). Posons  $IP(e_k) = P(\Delta t) = p$ . On a donc  $IP(\bar{e}_k) = 1 - p$ .

Soit  $X$  le temps d'attente discrétisé de  $A$  ( $X$  est un nombre aléatoire de minutes).  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ . Soit  $E_k$  l'événement « $A$  apparaît pour la première fois à la  $k^{\text{ième}}$  minute».

Déterminons la loi  $IP_X$  de  $X$ , entièrement déterminée par les probabilités élémentaires

$$p_k = IP(E_k) = IP(X=k) = IP_X(k).$$

Calcul de  $p_k$ :  $E_k$  est la conjonction de  $e_k$  et des  $\bar{e}_i$  pour  $i < k$ . Ces événements sont indépendants, d'où  $p_k = IP(e_k) \cdot \prod_{i=1}^{k-1} IP(\bar{e}_i) = p \cdot (1-p)^{k-1}$ . La loi de  $X$  est donc donnée par

$$IP(X=k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$$

C'est la loi géométrique  $G(p)$  de paramètre  $p$ . On a bien

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

La probabilité  $p$  est déterminée par la cadence  $c$ . En effet, on peut voir que  $E(X) = \frac{1}{p}$ .

[Pour cela, par définition de l'espérance mathématique, il faut calculer la somme de la série  $E(X) =$

$\sum_{k=1}^{\infty} k p_k$ . Celle-ci est obtenue par un artifice. On écrit

$$\sum_{k=1}^{\infty} k p_k = p \sum_{k=1}^{\infty} k (1-p)^{k-1} = p \left( \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k \right)'$$

en considérant  $p$  comme une variable réelle, avec les précautions d'usage la série entière est uniformément convergente puisque qu'avec  $p < 1$  on est à l'intérieur de son intervalle de convergence. La série géométrique obtient son secret, remplaçant  $p$  dans le  $\sum$  par la variable réelle  $x$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = p \left[ \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-x}{1-(1-x)^k} \right] = p \frac{1}{x^2} = \frac{1}{p}$$

$E(X)$  représente le nombre moyen de minutes qu'il faut attendre pour avoir  $A$ .

Il y a en moyenne  $c$  événements  $A$  par heure. Il faut donc attendre en moyenne  $1/c$  heure ou  $60/c$  minutes pour observer le premier  $A$ . On a donc avec ces unités,  $p = c/60$ , si dans notre modélisation,  $c$  est assez petit ( $< 60$ ) pour justifier le fait que  $A$  est un événement rare.

Exemple numérique — si  $c = 7,2$ /heure, la probabilité de n'avoir pas de  $A$  dans le premier quart d'heure est  $(1 - p)^{15} = (1 - \frac{7,2}{60})^{15} = 0,147$ .

### 3 – Du discret au continu — de la loi géométrique à la loi exponentielle

On rapproche les temps d'observations, effectuées à chaque instant multiple de  $1/n$  minute (par ex. toutes les secondes).

La probabilité que  $A$  se produise dans un intervalle donné de durée  $\Delta t = \frac{1}{n}$  est

$$P\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \quad (\text{car } A \text{ est homogène et rare et par hypothèse de modèle } P(\Delta t) \sim \Delta t).$$

Soit  $Z$  la variable continue du temps d'attente de  $A$ , et  $F_Z$  sa fonction de répartition —  $F_Z(t) = IP(Z \leq t)$ . On a, d'après le théorème des accroissements finis, si  $F_Z$  de classe  $C^1$ ,

$$IP(t < Z \leq t + \Delta) = F_Z(t + \Delta) - F_Z(t) = \Delta F'_Z(\xi), \text{ avec } t < \xi < t + \Delta$$

Soit  $Y_n$  le nombre de fractions de minutes à attendre avant que  $A$  se produise (on a  $\Delta = \Delta t = \frac{1}{n}$ ). D'après le paragraphe précédent, la loi de  $Y_n$  est une loi géométrique de

paramètre  $p = P\left(\frac{1}{n}\right)$ . On a  $IP(Y_n = k_n) = P\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 - P\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{k_n-1}$ .

Supposons que  $A$  se produise à l'instant  $t$  (compté en minutes), compris entre  $(k_n - 1)\Delta t$  ( $= \frac{k_n - 1}{n}$ ) et  $k_n \Delta t = \frac{k_n}{n}$  (avec ces notations, on a  $\frac{k_n}{n} \rightarrow t$  quand  $n \rightarrow \infty$ ).

Si  $Y_n = k_n$ , on a  $\frac{k_n - 1}{n} < Z < \frac{k_n}{n}$  et  $IP\left(\frac{k_n - 1}{n} < Z \leq \frac{k_n}{n}\right) = IP(Y_n = k_n) = \frac{1}{n} F'_Z(\xi)$ , où  $\frac{k_n - 1}{n} < \xi \leq \frac{k_n}{n}$ . On obtient donc  $F'_Z(\xi) = n \cdot P\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 - P\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{k_n-1}$ .

Quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $\xi \rightarrow t$  avec  $\frac{k_n}{n}$ , d'où  $F'_Z(\xi) \rightarrow F'_Z(t)$ , et dans le second membre,

$$n P\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow p, \text{ et } \left(1 - P\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{k_n - 1} = \left(1 - P\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n \frac{k_n - 1}{n}} \rightarrow e^{-pt},$$

car  $n \cdot \ln\left(1 - P\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim n \cdot \left(-P\left(\frac{1}{n}\right)\right) \rightarrow -p$ .

D'où la densité de la loi de  $Z$

$$F'_Z(t) = f_Z(t) = p e^{-pt}, \text{ pour } t > 0.$$

C'est la densité de la loi exponentielle de paramètre  $p$ .

La fonction de répartition de cette loi est  $F_Z(t) = IP(Z \leq t) = \int_0^t p e^{-ps} ds = 1 - e^{-pt}$ , car  $F_Z(0) = 0$ . On peut calculer son espérance mathématique

$$E(Z) = \int_0^{\infty} s p e^{-ps} ds = \frac{1}{p}.$$

De même que dans le cas discret,  $E(Z)$  est le temps moyen d'attente de  $A$ ,  $\frac{1}{p} = \frac{60}{c}$ , si  $Z$  en mesuré en minutes et si  $c$  est la cadence horaire du phénomène.

## Exemple de la désintégration radioactive

Une matière fissile contient  $N$  atomes radioactifs. La désintégration de l'un ou l'autre de ces atomes (événement  $A$ ) vérifie (en gros) les hypothèses heuristiques précédentes.

Soit  $P(\Delta t)$  la probabilité d'observer une désintégration pendant un petit intervalle de temps de durée  $\Delta t$ , et soit  $\lambda$  la limite de  $P(\Delta t)/\Delta t$  quand  $\Delta t$  tend vers 0.

Le paramètre  $\lambda$  caractérise cette radioactivité, c'est la constante de désintégration.

La période  $T$  de l'élément radioactif considéré est la durée pendant laquelle la moitié de la masse fissile s'est désintégrée. La fréquence des atomes non encore désintégrés dans la masse  $N$  est alors  $1/2$ .

Un raisonnement fréquentiste permet de trouver simplement la relation entre  $T$  et  $\lambda$ .

Dans le cas de la radioactivité naturelle, on peut considérer que les désintégrations des atomes sont indépendantes. De plus, pour un intervalle de temps donné, chaque atome a la même probabilité d'être désintégré. Soit  $p$  cette probabilité de désintégration entre 0 et  $T$ . Un atome étant considéré, on lui associe l'expérience de Bernoulli qui consiste à voir s'il est désintégré au bout du temps  $T$ . Cet événement est donc de probabilité  $p$ . On recommence cette expérience avec les  $N$  atomes de la masse radioactive. Le théorème de Bernoulli, forme élémentaire de la loi des grands nombres, indique que la fréquence des atomes désintégrés à l'instant  $T$  tend (en probabilité) vers  $p$  quand le nombre d'épreuves tend vers l'infini.  $N$  étant très grand, on peut conclure qu'il y a une probabilité infime que  $p$  soit notablement différente de cette fréquence  $1/2$ .

$T$  est donc la durée au bout de laquelle un atome donné a la probabilité  $1/2$  d'être (ou ne pas être) désintégré.

Dans cette situation, on retrouve le passage d'un modèle discret à un modèle continu.

Soit un intervalle de temps  $\Delta t$  très petit. Soit  $k$  (très grand) tel que  $T = k \Delta t$ .

Soit  $X$  le temps d'attente (mesuré discrètement en nombre de  $\Delta t$ ) de la désintégration d'un atome donné. Si au bout du temps  $T$  cet atome n'est pas désintégré, on a  $X > k$ , et cet événement est de probabilité  $1/2$ . Mais  $\text{IP}(X > k) \sim (1 - \lambda \Delta t)^k$  puisque  $P(\Delta t) \sim \lambda \Delta t$ , et

$$(1 - \lambda \Delta t)^k = \left(1 - \frac{\lambda T}{k}\right)^k \sim e^{-\lambda T}. \text{ On a donc } e^{-\lambda T} = \frac{1}{2} \text{ et obtient } \lambda = \frac{\ln 2}{T}.$$

La loi exponentielle de  $Z$ , temps d'attente de la désintégration de l'atome (modèle continu), fournit directement ce résultat

$$\text{IP}(Z \leq T) = 1/2 = 1 - e^{-\lambda T}, \text{ d'où } T = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Par exemple  $T = 1580$  ans pour le radium,  $T/\ln 2 = 2280$  est la cadence annuelle de désintégration des atomes de radium.

## 4 – Hypothèses heuristiques pour un processus de Poisson : la loi exponentielle s'impose simplement

On reprend la variable  $Z$  du temps continu d'attente de l'événement  $A$  à partir de l'instant  $t_0 = 0$  ( $Z > 0$ ), et sa fonction de répartition  $F_Z(t) = \text{IP}(Z \leq t)$ , que l'on suppose assez régulière (de classe  $C^1$ ).

Soit  $g(t) = 1 - F_Z(t) = \text{IP}(Z > t)$ .  $g$  est décroissante (car  $F_Z$  est croissante) et  $g(0) = 1$ .

« $Z > t+s$ » est l'événement « $A$  ne se produit pas avant  $t+s$ ».  $g(t+s)$  est donc la probabilité que  $A$  ne se produise pas avant  $t+s$ , c'est-à-dire ni avant  $t$ , ni entre  $t$  et  $t+s$ . Ces deux événements sont indépendants, en vertu de la troisième hypothèse heuristique, puisque  $[0, t]$  et  $[t, t+s]$  sont disjoints.  $A$  est sans mémoire.

Le premier événement est de probabilité  $g(t)$ .

Le deuxième a pour probabilité  $1 - \mathbb{P}(t < Z \leq t+s) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq s) = g(s)$  puisque cette probabilité ne dépend que de la durée  $s$  considérée (phénomène homogène).

On obtient donc pour tout  $t$  et  $s$  positifs

$$g(t+s) = g(t).g(s),$$

relation fonctionnelle qui permet de déterminer la fonction  $g$ .

On peut le voir simplement en utilisant l'hypothèse que  $g$  est de classe  $C^1$ , régularité qui sera vérifiée a posteriori. En effet, en dérivant cette égalité par rapport à  $s$  (à  $t$  constant), on a pour tout  $t > 0$  et tout  $s > 0$   $g'(t+s) = g(t).g'(s)$ . Pour  $s \rightarrow 0$ ,  $g'$  étant supposée continue,  $g'(t) = g(t).g'(0)$ . En posant  $g'(0) = -\lambda > 0$  et sachant que  $g(0) = 1$ , on obtient

$$g(t) = e^{-\lambda t} \text{ pour } t > 0.$$

On retrouve donc la fonction de répartition de la loi de  $Z \Rightarrow F_Z(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ , pour  $t > 0$ .

Sa densité est obtenue par dérivation  $f_Z(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ .

De cette loi exponentielle, on peut déduire (cela n'est pas immédiat) la loi du nombre  $N$  aléatoire des événements  $A$  qui se produisent entre les instants  $0$  et  $T$  donnés  $N \in \mathbb{N}$  et

$$\mathbb{P}(N = k) = \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}$$

C'est la loi de Poisson de paramètre  $\lambda T$ , notée  $P(\lambda T)$ . On a  $E(N) = \lambda T$  et  $\text{Var}(N) = \lambda T$ .

Cette loi peut aussi être considérée comme loi limite de la loi binomiale.

## 5 – De la loi binomiale à la loi de Poisson

On part des mêmes hypothèses heuristiques d'un processus de Poisson. On étudie le phénomène sur un intervalle de temps  $[0, T]$  fixé.

Soit  $N$  le nombre (aléatoire) d'apparitions de l'événement  $A$  dans cet intervalle de temps.

Quelle est la loi de  $N$  ?

A nouveau, discrétisons le problème. Découpons  $[0, T]$  en  $n$  intervalles de durée  $\Delta t = T/n$ .

La probabilité que  $A$  apparaisse dans l'un quelconque de ces intervalles est

$$p \approx \mathbb{P}(\Delta t) \sim \lambda \Delta t = \frac{\lambda T}{n}.$$

Pour chacun de ces intervalles, l'apparition de  $A$  réalise une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$ . Ces épreuves sont indépendantes (troisième hypothèse de modèle). L'événement « $N = k$ » est réalisé si  $A$  apparaît dans  $k$  quelconques de ces intervalles, pris parmi les  $n$ .  $N$  suit donc une loi binomiale  $B(n, p)$

$$\mathbb{P}(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1 \cdot (1-\frac{\lambda T}{n}) \cdot \dots \cdot (1-\frac{k-1}{n} \lambda T)}{k!} n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

L'entier  $k$  étant fixé, quand  $n$  tend vers l'infini le numérateur tend vers 1,  $np$  tend vers  $\lambda T$  et

comme  $\ln(1-p)^{n-k} \sim (n-k) \ln(1-p) \sim (n-k) \frac{-\lambda T}{n}$  il vient

$$\mathbb{P}(N = k) \sim \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T}.$$

La loi de  $N$  tend donc vers la loi de Poisson de paramètre  $\lambda T$

De plus,  $E(N) = np = \lambda T$  espérance de cette loi, ainsi que  $\text{Var}(N) = np(1-p) = \lambda T$

### III – Conclusion – Des lois continues pour quoi faire en Terminale

#### 1 – La notion de loi dans les classes de Première

Les programmes des premières S, ES et L introduisent les probabilités d'emblée par la notion de loi (ou de distribution) de probabilités, c'est-à-dire une répartition de la certitude en un ensemble fini de valeurs associées aux événements élémentaires qui représentent les issues d'une expérience aléatoire. La notion même de probabilité n'est pas objet d'étude, le programme se limitant aux calculs portant sur des probabilités d'événements.

La définition proposée dans le document d'accompagnement est qu'«une loi de probabilités est un objet mathématique ayant les mêmes propriétés qu'une distribution de fréquences». Cela signifie simplement que les éléments de cette loi (les probabilités élémentaires) sont des nombres compris entre 0 et 1 et dont la somme est égale à 1.

Mais le terme d'«objet mathématique» a son importance – il signifie clairement que la probabilité n'est pas une grandeur de la réalité, elle fait partie des notions mathématiques qui contribuent à la modélisation de cette réalité.

Ce point de vue est en rupture avec celui de l'ancien programme de Première, qui faisait de la probabilité une sorte de limite de fréquence stabilisée. Du coup elle appartenait au même paradigme, celui de la description de la réalité et non de sa modélisation. Nous nous associons résolument à ce point de vue, car il va permettre d'introduire en Terminale S les lois continues dans cette cohérence épistémologique.

Le programme précise – «Le lien entre loi de probabilité et distribution de fréquences sera éclairé par un énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres».

Concernant la loi «faible», notamment le théorème de Bernoulli, ce lien n'est pas simple à expliciter. En effet, comme nous l'avons vu, il fait intervenir deux sortes de probabilités – la probabilité  $p$ , affectée à une issue d'une même expérience aléatoire répétée  $n$  fois, et la probabilité que la fréquence observée de cette issue ne s'écarte pas de  $p$  de plus qu'un  $\epsilon$ . Historiquement, l'assimilation de ces deux notions de probabilité ne s'est pas faite sans difficultés. Laplace lui-même dans son *essai philosophique sur les probabilités* (1814), utilise le terme de «possibilité» à l'égard de la deuxième.

Dans l'esprit du programme, il conviendrait d'installer un «méta-modèle» pour représenter cette convergence (en probabilité) de la fréquence, qui fait l'objet de la loi faible des grands nombres. Bien évidemment, cela est exclu au niveau secondaire, ce qui explique pourquoi l'énoncé «vulgarisé» proposé par le programme est très vague –

«Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité  $P$ , les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille  $n$  se rapprochent de  $P$  quand  $n$  devient grand».

Pour expliciter cet énoncé sans soulever cette difficulté épistémologique, le document d'accompagnement s'appuie sur la loi «forte», théorème dû à Émile Borel (1909) – dans certaines conditions, la suite des fréquences de réalisation d'une issue en  $n$  épreuves d'une même expérience aléatoire, converge (presque sûrement, i.e. avec probabilité 1) vers la probabilité de cette issue. L'ensemble des  $k$  issues considérées étant fini, il en est de même pour la suite des distributions de ces fréquences qui converge (presque sûrement dans  $\mathbb{R}^k$ ) vers la loi de probabilité qui devra être admise pour un modèle pertinent de cette expérience.

Notons que pour tous les exemples proposés, invitant à la modélisation d'expériences de référence éventuellement simulées dans un environnement informatique, les lois de base envisagées sont toutes fondées sur l'hypothèse d'équiprobabilité. Cette hypothèse de modèle est supposée découler «naturellement» de symétries admises en hypothèse de travail (dés, pièces, urnes, cartes, chiffres au hasard équirépartis, ...). On peut comprendre cette option qui permet d'échapper à la question de l'estimation statistique des probabilités élémentaires à

introduire dans un modèle où l'équiprobabilité ne serait pas acceptable. Il ne peut donc être question de modéliser le lancer d'une punaise ...

En Première S, un modèle de non équiprobabilité pourra être conçu comme un modèle image par une variable aléatoire dont les valeurs regroupent diverses issues d'une loi de probabilité équirépartie. Ce sera notamment le cas en Terminale de la loi binomiale.

## 2 – Des lois continues en Terminale S

Deux lois discrètes de base sont aux programmes des terminales S et ES : la loi de Bernoulli et la loi binomiale. Leurs applications à des exemples concrets permettent de mettre en évidence leur statut de modèles standards, applicables à de nombreuses situations. Elles permettent aussi d'explicitier les paramètres qui les déterminent entièrement, respectivement la probabilité  $p$  du « succès » et le couple  $(n, p)$ . Cette référence à des modèles de base devrait favoriser la compréhension en termes de modèles des deux lois continues introduites ensuite en terminale S : la loi uniforme sur  $[0, 1]$  et la loi exponentielle.

Il y a là, cependant, un saut conceptuel majeur. Si une loi de probabilités a les propriétés d'une distribution de fréquences relatives à un ensemble fini d'issues, comment ce concept peut-il être étendu à un ensemble continu de valeurs possibles ?

Une variable aléatoire, au sens de la classe de première, est une application définie sur un ensemble fini représentatif des issues. Elle ne peut donc avoir comme ensemble image qu'un ensemble fini de valeurs numériques. Comment expliquer son plongement dans un ensemble numérique continu ?

La probabilité d'un événement a été définie comme la somme des probabilités des événements élémentaires le constituant. Transposées au cas continu, ces probabilités sont nécessairement toutes nulles, comme nous l'avons vu. Comment donner un sens probabiliste à la notion de densité ?

On voit que le pari d'introduire des lois continues en terminale est pour le moins audacieux. Le point de vue de la modélisation est ici incontournable. Les lois continues sont alors des outils mathématiques permettant, dans les modèles considérés, de calculer les probabilités de certains types d'événements. Ces modèles continus sont choisis et leurs paramètres sont déterminés (hypothèses de modèle) pour coller assez bien à une réalité discrète décrite (hypothèses de travail), cela à partir de considérations heuristiques et d'estimations statistiques. Les valeurs des probabilités ainsi calculées se révèlent alors assez proches des fréquences stabilisées des événements associés, obtenues par l'observation statistique.

On a vu comment introduire la loi uniforme en termes de proportionnalité. Dans l'exemple du jeu de franc-carreau, la réalité est décrite dans un cadre géométrique faisant naturellement intervenir des grandeurs continues.

La discrétisation en dimension 2 a permis de relier la distribution uniforme continue sur un carré, où les probabilités s'expriment en termes de rapports d'aires, à l'équiprobabilité de base. Cette démarche peut être transférée facilement à des exemples conduisant à une loi uniforme sur  $[0, 1]$ , les probabilités s'exprimant en termes de rapports de longueurs (dommage que celle de  $[0, 1]$  soit égale à 1 !).

Il n'est donc nul besoin pour le modèle uniforme de recourir à des calculs d'intégrales, et la notion de densité ne semble pas s'imposer.

La loi exponentielle est désignée dans le programme par « l'âge de durée de vie sans vieillissement », par référence aux conditions heuristiques qui conduisent à ce modèle continu, telles que nous les avons proposées.

La discrétisation et le passage par la loi géométrique, qui permettent de comprendre pourquoi la densité de probabilités intervenant dans ce modèle est de type exponentiel, sont hors d'atteinte en terminale.

La détermination directe de la fonction de répartition de cette loi pourrait être accessible, bien que de bon niveau pour des élèves de terminale (indépendance d'événements, équation fonctionnelle et intégration d'une équation différentielle).

On peut se limiter à présenter le résultat en affirmant que la relation

$$IP(a < X < b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx,$$

où  $X$  est la durée de vie et  $\lambda$  un paramètre positif caractérisant le phénomène (la cadence), est un moyen mathématique pratique pour calculer les probabilités de cette sorte d'événements dans un modèle continu assez bien adapté à ce type de situations concrètes. Les exemples sont nombreux : pannes, files d'attente, ...

L'exemple de la désintégration radioactive permet une bonne illustration de cette loi, mettant en œuvre les connaissances acquises en analyse. En marge du programme (en TERC), il permet aussi un sérieux travail de synthèse et de prolongements. D'une part il met en œuvre de manière non évidente le théorème de Bernoulli comme exemple d'application de la loi des grands nombres (non vulgarisée), pour relier la période d'un élément radioactif au paramètre de la loi exponentielle qui modélise la durée de vie d'un atome. D'autre part il permet de manipuler l'approximation en loi avec le cas de l'approximation de la loi binomiale par une loi de Poisson.

### **3 - Notion de densité, prolongements des outils probabilistes pour des modèles performants**

Au-delà du programme de terminale S, les exemples simples des lois uniformes et des lois exponentielles permettront de dégager la notion fondamentale de densité de probabilité. Elle donnera lieu à une utilisation intensive du calcul intégral et à un sérieux investissement des outils de l'analyse.

C'est bien sûr par sa densité que le modèle gaussien peut être introduit. Malgré son importance, il ne l'a pas (encore) été au niveau des Terminales S (il faut bien faire des choix, et la manipulation de l'intégrale de Gauss n'est pas aussi évidente que celle de la fonction exponentielle). La loi normale figure dans certains programmes de BTS comme exemple de base, pour ses multiples applications à la statistique inférentielle notamment : sondages, estimations, tests d'hypothèses, ...

Les modèles à  $\Omega$  fini ne concernent que les situations pas trop vastes, avec équiprobabilité quelque part. Le passage aux modèles continus permet une meilleure appréhension de classes de phénomènes inaccessibles aux modèles discrets. Mais il suppose le développement d'outils de calcul performants (intégrales), dans des cadres théoriques nouveaux (axiomatique de Kolmogorov, 1933), dans lesquels peuvent être obtenus des théorèmes puissants (TLC, loi forte, ...), permettant de résoudre de nouveaux problèmes.

L'introduction de lois continues en Terminale, outre la résolution de problèmes plus intéressants que les problèmes traditionnels de combinatoire à propos de jeux de hasard, a pour importance essentielle de rendre incontournable la notion de modèle. La simulation informatique de situations simples y concourt aussi.

Le bénéfice qu'en tireront les élèves sera sans doute une compréhension plus claire du statut du calcul des probabilités comme un outil mathématique des plus performants pour maîtriser les problèmes concrets issus de la complexité de la réalité, aussi bien dans les domaines des sciences de la nature que dans les sciences économiques ou dans les sciences humaines.