Côté d’un nombre

André LAURENT

« Côté de N » : c’est ainsi que les Chinois, dès le 1er siècle, désignaient la racine carrée d’un nombre N, entier ou fractionnaire. Nous verrons plus loin comment ils calculaient ce « côté », avec… des baguettes !

1 Rappel

Dans le N° 2 de notre bulletin régional, j’ai relaté [1] comment les Chinois utilisaient de simples baguettes de bambou pour compter, effectuer les quatre opérations et résoudre des problèmes. Les nombres étaient représentés dans un système de numération décimal de position (même si, pour éviter les confusions de lecture, on disposait de deux séries de chiffres : l’une destinée aux unités de rang pair, l’autre aux unités de rang impair) :

Chiffres des unités, des centaines, etc.								
𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffres des dizaines, des mille, etc.								
𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

Pour écrire les nombres, on disposait les baguettes sur des damiers à calcul, ou *Suan Pan*.
Exemples :

𝍪	𝍡
22	

𝍡	𝍪	𝍡
222		

𝍪	𝍡	𝍪	𝍡
2222			

Une unité absente était représentée par un vide :

𝍪	
20	

𝍡		𝍡
202		

𝍪			𝍡
2002			

[1] *Des baguettes pour compter*, Aix Marseille Vert N° 2 (Avril, Mai, Juin 2000).

2 Repères historiques

L'usage des baguettes pour compter est apparu à l'époque des *Printemps et Automnes* (770 – 476 av. J.-C.). Vers 200 av. J.-C., on commence à effectuer les quatre opérations, puis à résoudre des problèmes, toujours avec des baguettes.

Les premiers écrits mathématiques connus datent de la dynastie des *Han* (de 202 av. J.-C. jusqu'en 220). De cette époque est issu **le** grand classsique de la tradition mathématique chinoise : *Les neuf chapitres sur les procédures mathématiques*. Il s'agit d'un résumé des savoir-faire de ce temps, qui a servi de référence pendant près d'un millénaire. Au chapitre quatre de ce traité, on trouve un algorithme de calcul du « côté d'un nombre » : c'est dire que, dès le début du 1^er^ siècle, on savait, en Chine, extraire la racine carrée d'un nombre. Nous allons voir cela d'un peu plus près.

3 Racine carrée de 126 736

3.1 Présentation et première étape

La représentation de 126 736 dans un *Suan Pan* était accompagnée d'un repère en deuxième ligne, pour indiquer le rang des chiffres au cours des calculs :

𝍩	𝍡	𝍮	𝍦	𝍫	𝍥
					𝍠

Dans la première étape du calcul, on décalait le repère de deux rangs en deux rangs vers la gauche :

𝍩	𝍡	𝍮	𝍦	𝍫	𝍥
	𝍠	←	←	←	←

3.2 Deuxième étape

On recherche la racine carrée entière de 12, soit 3, qu'on place en haut de la tablette, au rang des centaines. Son carré 9 est placé au-dessus du repère :

			𝍢		
𝍩	𝍡	𝍮	𝍦	𝍫	𝍥
	𝍨				
	𝍠				

On fait ensuite la soustraction $126736 - 90000 = 36736$, et on remplace le nombre initial par ce résultat (2^e ligne). On place ensuite le double du premier chiffre 3 de la racine (soit 6) au-dessus du repère, puis on décale comme indiqué dans le deuxième tableau (noter le changement du chiffre 6, dû au passage à l'unité de rang inférieur) :

		𝍢		
𝍢	𝍮	𝍦	𝍫	𝍥
𝍥				
𝍠				

		𝍢		
𝍢	𝍮	𝍦	𝍫	𝍥
→	𝍮			
→	→	𝍠		

3.3 Troisième étape

On effectue maintenant les calculs sur les nombres marqués par le repère : 367 en 2^e ligne, 60 en 3^e ligne. On recherche le plus grand entier d tel que $d^2 + 60d \leq 367$. On place cet entier 5 en haut de la tablette, comme chiffre des dizaines de la racine. Dans les résultats intermédiaires, au-dessus du repère, on place $60 \times 5 = 300$ (3^e ligne), et $5^2 = 25$ (4^e ligne) :

		𝍢	𝍭	
𝍢	𝍮	𝍦	𝍫	𝍥
𝍢				
	𝍪	𝍤		
		𝍠		

3.4 Quatrième étape

$36736 - (30000 + 2500) = 4236$: comme dans la 2^e étape, on place ce nombre en 2^eligne, puis on double la racine ($35 \times 2 = 70$) et on recommence les décalages :

	𝍢	𝍭	
𝍬	𝍡	𝍫	𝍥
𝍯			
	𝍠		

	𝍢	𝍭	
𝍬	𝍡	𝍫	𝍥
→	𝍯		
	→	→	𝍠

3.5 Dernière étape

On cherche le plus grand entier u tel que $u^2 + 700u \leq 4236$. On place cet entier 6 en haut de la tablette, comme chiffre des unités de la racine. Les résultats intermédiaires sont ici $700 \times 6 = 4200$ (3e ligne), et $6^2 = 36$ (4e ligne) :

	𝍢	𝍭	𝍥
𝍬	𝍡	𝍫	𝍥
𝍬	𝍡		
		𝍫	𝍥
			𝍠

On remarque que $4236 - (4200 + 36) = 0$, ce qui signifie que 356 est la racine carrée exacte de 126 736 .

4 Justification

Dans *Les neuf chapitres*, l'algorithme de calcul du « côté d'un nombre » était donné sans aucune justification : on ne s'intéressait qu'au savoir-faire. Il est cependant aisé de comprendre ce qui se passe :
La racine carrée de 126 736 peut s'écrire $100c + 10d + u$, où c est le chiffre des centaines, d celui des dizaines et u celui des unités. On a alors :

$$126736 = (100c + 10d + u)^2 = 10000c^2 + 100d^2 + u^2 + 2000cd + 200cu + 20du$$

Après avoir trouvé $c = 3$, il vient :

$$126736 - 90000 = 36736 = 100d^2 + 6000d + 600u + 20du + u^2$$

Nous voici au début de la troisième étape. Après avoir trouvé $d = 5$, les calculs se simplifient encore : $36736 = 2500 + 30000 + 600u + 100u + u^2$

$$4236 = 700u + u^2.$$

Il est alors immédiat que $u = 6$.

Pour terminer, on comparera cet algorithme à celui que les plus anciens d'entre nous ont pratiqué en d'autres temps, et que je reproduis ci-contre sans autre commentaire :

126736	356
-90000	$65 \times 5 = 325$
36736	$706 \times 6 = 4236$
-32500	
4236	
-4236	
0	