

Une approche expérimentale de π

André BONNET

A l'école primaire on utilisait souvent $\frac{22}{7}$ comme valeur approchée de π . Depuis la mise sur le marché de calculatrices à bas prix, cette pratique est sans doute moins répandue. L'étude qui suit a pour but, à partir d'une expérimentation, de rendre moins arbitraire l'utilisation de cette fraction, d'en découvrir d'autres et de conduire une réflexion sur le nombre π .

Diverses définitions de π :

On peut envisager de caractériser π de deux manières¹ :

- comme rapport de la longueur de la circonférence d'un cercle et de son diamètre,
- comme rapport de l'aire du disque et de l'aire du carré ayant pour côté son rayon.

Le concept de rapport de longueur ou d'aire est à considérer avec prudence. En réalité, ce qui est recherché, comme dans l'antiquité grecque, c'est une mesure commune permettant de mesurer, en nombres entiers, ces deux grandeurs : longueur de la circonférence et diamètre, ou aire du disque et aire du carré. En cas d'impossibilité de trouver une mesure commune, telle que chaque grandeur soit un multiple exact de cette mesure commune, ce qui est le cas des grandeurs incommensurables, on se contente d'une approche « au mieux ».

Le nombre π et les fractions continues² :

On peut remarquer que la valeur $\frac{22}{7}$ est la première réduite de π dans le développement en fractions continues. Les suivantes sont $\frac{333}{106}$ et $\frac{355}{113}$. Ces réduites sont intéressantes dans la mesure où elles réalisent une bonne approximation du réel dont elles proviennent.

On peut imaginer une méthode simple permettant de vérifier que $\frac{22}{7}$ est une bonne approche, même la meilleure approche pour une fraction dont le dénominateur est à un seul chiffre. Si on est un peu courageux et si on dispose de suffisamment de moyens on peut même tester, ou trouver, les valeurs $\frac{333}{106}$ et $\frac{355}{113}$.

La manip à faire :

On se munit de carrés et de disques découpés dans un matériau homogène, du plastique par exemple. L'idéal serait de disposer de carrés de côté R et de disques de même rayon R .

Pour mesurer les aires du disque et du carré, au lieu de prendre des unités de plus en plus petites, on essaie de mesurer d disques de rayon R avec n carrés de côté R comme unité.

¹ On devrait, en fait, utiliser deux notations différentes pour ces deux rapports. Par exemple on pourrait noter π le premier et noter π' le second. Voir plus loin la démonstration, à la manière d'Archimède, de l'égalité $\pi = \pi'$.

² Voir en annexe une approche, sommaire, de la notion de fractions continues.

Sur un plateau d'une balance, on met d disques de rayon R et sur l'autre n carrés de côté R en recherchant le meilleur équilibre. Comme l'équilibre n'est jamais atteint, on le réalise avec des poids additionnels (marqués en grammes par exemple) ou éventuellement du sable.

On peut partir de $d = 1$, puis augmenter d'une unité les valeurs de d . On recherche, par tâtonnements, la valeur de l'entier n pour avoir le meilleur équilibre. Celui-ci correspond, en fait, au moment où les plateaux de la balance basculent d'un côté à l'autre. On note les valeurs de d , de n et la charge additionnelle ch (en grammes) pour établir l'équilibre.

Simulation :

Avec Maple on peut simuler l'expérience. Le petit programme suivant est destiné à faire parcourir à d la plage des entiers de 1 à 999, en recherchant pour chaque valeur de d la valeur de n telle que la fraction $\frac{n}{d}$ soit la plus proche de π .

```
> er:=1: ermin:=er:
for d from 1 to 999 do
  n:=floor3 (Pi*d):
  delta1:=evalf(Pi-n/d):
  delta2:=evalf((n+1)/d-Pi):
  if delta1<delta2 then delta:=delta1: ser:=+1
    else delta:=delta2: ser:=-1 fi:
  if delta<er then er:=delta: dmin:=d: nmin:=n+(1-ser)/2 fi:
  if er<ermin then print(d,nmin/dmin,ser*er): ermin:= er fi:
od:
print(`meilleur résultat jusqu'à d=999 .`) ;
```

L'affichage donne, à chaque amélioration de l'erreur, dans l'ordre : la valeur de d , le numérateur n de la meilleure fraction trouvée $\frac{n}{d}$ et la différence $delta = \pi - \frac{n}{d}$ (le signe indiquant le sens de l'erreur) :

```
1, 3, .141592654
4,  $\frac{13}{4}$ , -.108407346
5,  $\frac{16}{5}$ , -.058407346
6,  $\frac{19}{6}$ , -.025074013
7,  $\frac{22}{7}$ , -.001264489
57,  $\frac{179}{57}$ , .001241777
64,  $\frac{201}{64}$ , .000967654
```

³ floor - greatest integer less than or equal to a number, selon l'aide de Maple, traduction : "partie entière"

$$71, \frac{223}{71}, .000747584$$

$$78, \frac{245}{78}, .000567013$$

$$85, \frac{267}{85}, .000416183$$

$$92, \frac{289}{92}, .000288306$$

$$99, \frac{311}{99}, .000178513$$

$$106, \frac{333}{106}, .000083220$$

$$113, \frac{355}{113}, -.266 \cdot 10^{-6}$$

meilleur résultat jusqu'à $d=999$.

Remarques sur la simulation :

On peut remarquer que, jusqu'à $d = 56$ la fraction $\frac{22}{7}$ est la meilleure approximation.

Ensuite, on trouve des fractions dont le dénominateur est à deux chiffres mais qui n'améliorent pas sensiblement l'approche de π , c'est la réduite suivante⁴ du développement en fraction continue de π , c'est-à-dire $\frac{333}{106}$ qui devient le meilleur résultat, puis $\frac{355}{113}$, et ceci jusqu'à la valeur $d = 999$.

L'égalité $\pi = \frac{L}{2R}$ à la manière d'Archimède :

Rappelons tout d'abord les définitions de π et de π . Pour un cercle de rayon R , si on note L la longueur de sa circonférence et A l'aire du disque limité par ce cercle, on peut poser $\pi = \frac{L}{2R}$ et $\pi = \frac{A}{R^2}$.

La démonstration d'Archimède⁵, qui permet de conclure à l'égalité de π et de π , consiste à découper le disque en $2n$ secteurs égaux et à approcher la longueur de la circonférence par les cordes de ces secteurs ; en étalant sur une droite les triangles ainsi obtenus, on obtient une approche de l'aire A du disque ainsi qu'une approche de la longueur L de la circonférence.

⁴ Grâce au signe, on peut remarquer que $\frac{22}{7}$ et $\frac{355}{113}$ sont des valeurs par excès, tandis que $\frac{333}{106}$ est une valeur par défaut.

⁵ Archimède (287- 212 av. J.C.) est davantage connu pour son approche de π par la méthode des isopérimètres, on lui doit aussi les formules donnant la surface et le volume du cylindre et de la sphère.

On peut donner une approche très visuelle de l'égalité à démontrer en trois figures, donnant respectivement : le découpage du disque en $2n$ secteurs, puis en matérialisant les cordes et enfin en mettant "à plat" les triangles et les secteurs.

On fait successivement trois séries de trois figures, l'une pour $n=4$, l'autre pour $n=8$ puis

pour $n=16$:

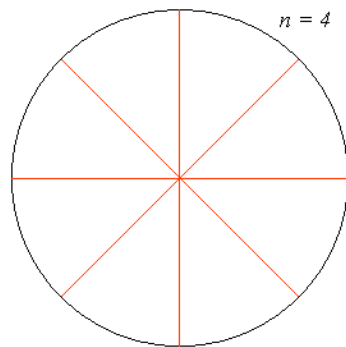


figure 1

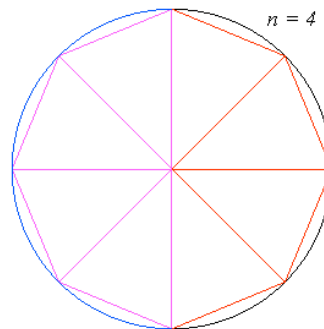


figure 2

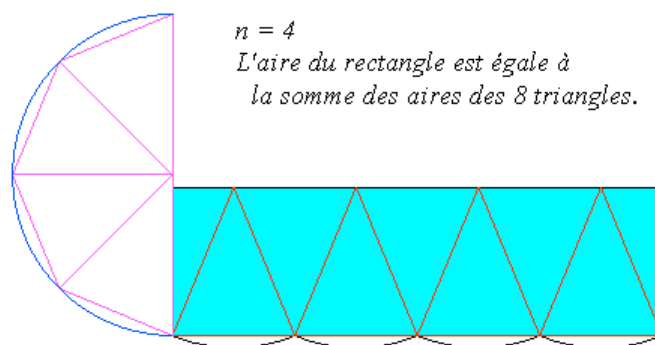


figure 3

Pour $n = 8$ le on distingue encore la ligne polygonale et la circonférence

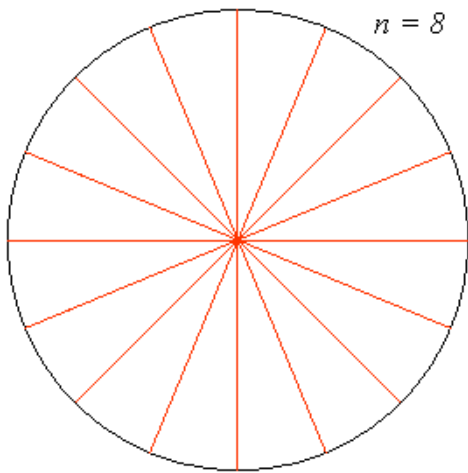


figure 4

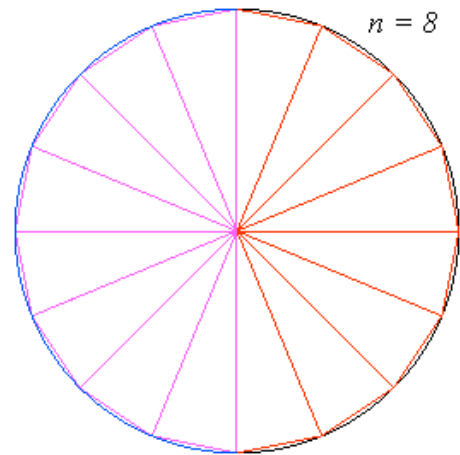


figure 5

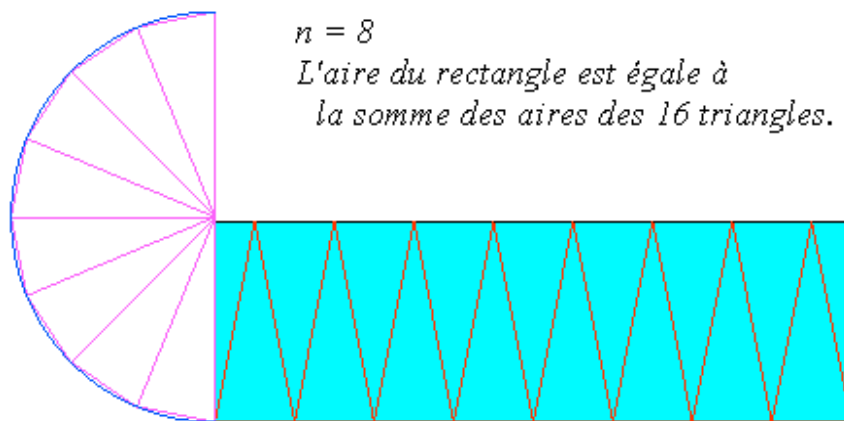


figure 6

Pour $n = 16$, la circonférence et la ligne polygonale sont quasiment confondues

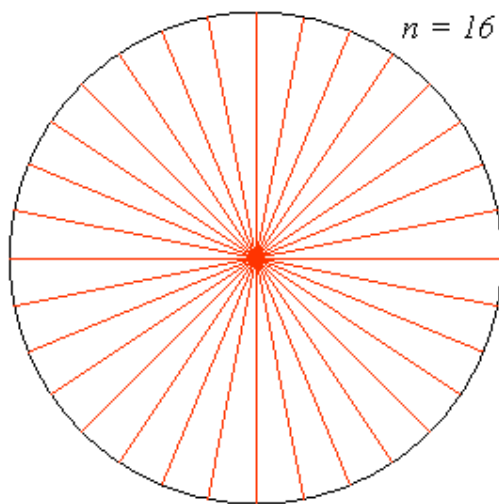


figure 7

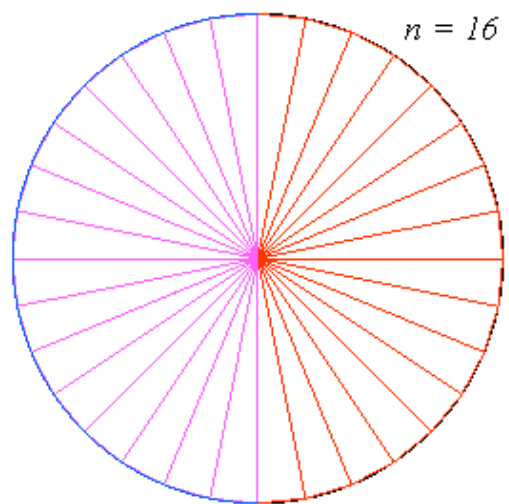


figure 8

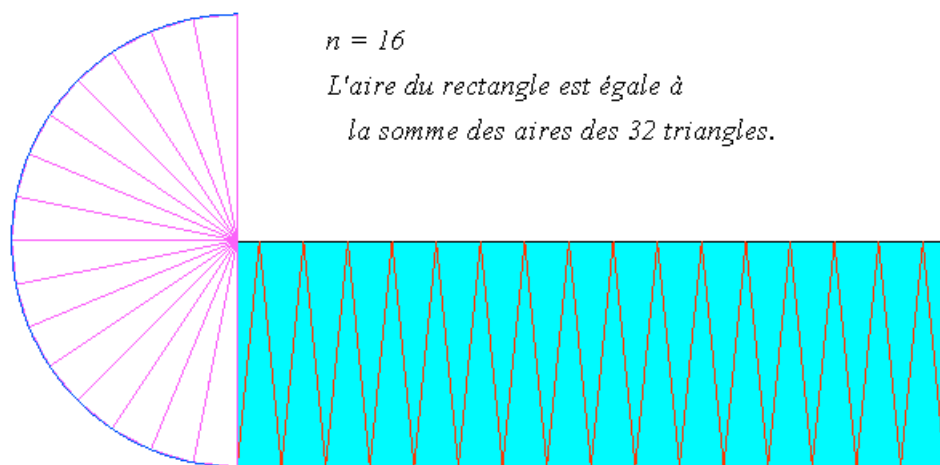


figure 9

Conclusion :

Sans faire appel à des notions de convergence, on peut se convaincre, en observant les figures ci-dessus, que le rectangle a une base qui tend vers la demie-longueur de la circonférence tandis que sa hauteur se rapproche du rayon du cercle. On déduit que l'aire du rectangle tend vers la valeur $\frac{L}{2}R$, et comme cette aire est constamment égale à la somme des

aires des $2n$ triangles, il devient évident qu'elle est de plus en plus proche de l'aire des $2n$ secteurs, dont la valeur est égale à A .

On peut donc conclure que $A = \frac{L}{2}R$, ou encore en divisant les deux membres par R^2 , on trouve que $\square = \frac{A}{R^2} = \frac{L}{2R} = \square$.

Quelques remarques sur la manip :

Pour faire l'expérience complète il faut disposer de plus de 113 disques et de plus de 355 carrés⁶. La mise en évidence de $\frac{22}{7}$ nécessite beaucoup moins de matériel : une dizaine de disques et une trentaine de carrés.

Il faut aussi une balance à plateaux. Par contre, les poids marqués ne sont pas indispensables, si on se contente de prouver que $\frac{22}{7}$ est la meilleure approximation – elle correspond au tas de sable le plus petit.

Pour montrer que le rayon ne joue aucun rôle, il serait souhaitable de faire l'expérience avec des disques et des carrés plus grands ou plus petits (mais toujours d'un rayon égal au côté du carré).

La manip pour être valable doit utiliser des pièces bien usinées et d'un matériau bien homogène et d'épaisseur constante. Le contrôle de la qualité de ces pièces est facile, car il suffit de mettre deux carrés accolés par un côté en superposition d'un disque, pour voir si le diamètre du disque est bien le bon.

⁶ Pour une expérimentation en classe, on peut imaginer une répartition des élèves en une douzaine de groupes. Chaque groupe dispose de 10 disques et 30 carrés et recherche la fraction $\frac{22}{7}$. Ensuite la classe toute entière participe à la recherche de $\frac{355}{113}$ en mettant en commun les 120 disques et les 360 carrés.

Quelques notions sur les fractions continues⁷ :

Pour une approche rapide de cette notion, on peut donner quelques exemples de développements de nombres réels en faisant appel à Maple :

> **with(numtheory)**⁸ :

Exemple 1 :

> **sqrt(3)=cfrac(sqrt(3),6);**

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}$$

Exemple 2 :

> **sqrt(2)=cfrac(sqrt(2),6);**

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}$$

Exemple 3 :

> **5/3=cfrac(5/3,6);**

$$\frac{5}{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$$

Exemple 4 :

> **Pi=cfrac(Pi,6);**

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}}$$

⁷ Pour plus de détails théoriques sur les fractions continues, notamment la qualité d'approximation des réduites, on pourra consulter les pages web : <http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/chronomath/FracCont.html> .

A signaler, que le site chronomath fait partie de ceux proposés par l'apmep dans la rubrique « vers autres sites ».

⁸ L'utilisation de la bibliothèque de théorie des nombres est indispensable pour la fonction cfrac.

On obtient les réduites en arrêtant le développement à un certain rang. Les premières réduites données ci-dessous sont obtenues arrêtant le développement au rang 1, 2, 3 et 4 et en remplaçant les pointillés par zéro :

$$3 + \frac{1}{7 + \dots} = \frac{22}{7}, \quad 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \dots}} = \frac{333}{106}, \quad 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \dots}}} = \frac{355}{113},$$

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \dots}}}} = \frac{103993}{33102}$$

On retrouve bien les trois fractions déjà vues : $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$ et $\frac{355}{113}$. Par contre la quatrième réduite, qui est égale à $\frac{103993}{33102}$, est hors de portée de l'expérimentation. Elle correspond à une approche de π avec une précision de 10^{-9} .

On préfère en général $\frac{355}{113}$ à $\frac{333}{106}$ car, pour un dénominateur sensiblement le même, l'approche de π est bien meilleure : $0,2 \cdot 10^{-6}$ au lieu de $0,8 \cdot 10^{-4}$.

Quelques repères sur π :

La lettre grecque π , déjà utilisée par l'anglais *William OUGHTRED*⁹ (1574-1660), pour désigner le fameux quotient de la circonférence d'un cercle à son diamètre, a été utilisée systématiquement par un autre anglais *JONES William* (1675-1749), dans un manuel de mathématiques élémentaires écrit en 1706.

Cette notation a été définitivement adoptée par EULER et LAMBERT. A signaler aussi la fin des incertitudes sur ce nombre :

- π est irrationnel : LAMBERT, 1761
- π est transcendant : LINDEMANN, 1882.

⁹ On lui attribue aussi la paternité (avec son contemporain GUNTER) de la première échelle logarithmique et, par là, de la règle à calcul (voir : <http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/chronomath/Oughtred.html>).