

# Aix Marseille Vert

*Bulletin de la régionale APMEP d'Aix-Marseille*

*Magazine trimestriel paraissant quatre fois par an  
N°8 (Avril, Mai, Juin 2002)*

a  
p  
m  
e  
p

Association des Professeurs de Mathématiques  
de l'Enseignement Public

- **Éditorial**  
(Catherine DUFOSSÉ)
- **Approximation de Pi**  
(André BONNET)
- **Euro et Math**  
(Robert ROLLAND)
- **L'île mathématique**  
(Joël MERKER)
- **Côté d'un nombre**  
(André LAURENT)
- **La journée de la régionale**
- **La rencontre de luminy**

**Siège de l'Association :**

A.P.M.E.P. Régionale d'Aix-Marseille  
Université de Provence UFR MIM  
3, Place Victor Hugo  
13331 MARSEILLE Cedex 3  
Tél : 04 91 10 61 06  
Fax : 04 91 10 61 24

**Comité de rédaction du bulletin de la régionale**

Direction de la publication : André Bonnet  
Rédaction et réception des articles : Yvon Poitevineau

**AIX MARSEILLE VERT**

Bulletin de la régionale A.P.M.E.P. d'Aix-Marseille  
Imprimé au siège de l'Association  
N° ISSN : 0756-8991  
Dépôt légal : Janvier 2000

# Éditorial

CATHERINE DUFOSSÉ

La France vient de subir un traumatisme grave et la période est propice à la réflexion, à la remise en question : comment en sommes nous arrivés là ?

L'enseignement des maths, me dira-t-on, n'a rien à voir avec la question. Voire!

D'abord, quelques connaissances de base et un peu d'habitude du maniement des chiffres apportent un éclairage utile sur la situation en apportant à tous par exemple des réponses aux questions suivantes : lorsqu'il y a 16 candidats, qu'est-ce qu'un "bon" score ? Qu'est-ce qu'un "mauvais" score ? Quelle est l'étendue de la fourchette d'un sondage portant sur 1000 personnes ? Si 50% des français votent "à gauche" et si leurs votes se répartissent aléatoirement sur 8 candidats, quel sera en moyenne le score de chacun d'eux ?

Les mathématiques sont un outil précieux pour comprendre et évaluer les situations les plus diverses, et l'actualité nous le redit aujourd'hui avec acuité; elle nous invite à en persuader nos élèves par une pratique coutumière. En particulier, elle justifie le choix des nouveaux programmes d'avoir élargi la place de la statistique dans la culture générale de nos élèves.

Cette élection montre aussi les dangers des évolutions que chacun de nous voit s'opérer autour de lui : enfermement sur soi et sur son étroit cercle privé, recherche individuelle aux problèmes, baisse du militantisme. "L'intérêt général", le "bien public" ne font plus recette, mais le détail des émotions intimes de Pierre Paul ou Jacques, dans le loft de M6 passionnent les foules, tandis que les partis, les syndicats, les associations peinent à recruter des bonnes volontés. Plus près de nous, que dire des collectes de sang dans nos lycées, ou de la difficulté à trouver des familles d'accueil pour des lycéens étrangers lorsque des échanges de jeunes sont organisés dans nos établissements ?

Les manifestations et la vague de mobilisation de l'entre deux tours incitent certes à plus d'optimisme : en particulier, nos élèves ont presque fait honte à leurs aînés, et nous, leurs profs, nous ne pouvons que saluer la vitalité et le sens des responsabilités dont ils ont fait preuve.

Enfin, on peut voir dans ces succès inquiétants du FN une peur devant la modernité, devant la rapidité des évolutions. S'adapter aux changements, les accueillir, les maîtriser tout en restant fidèles aux idéaux de démocratie et d'équité qui sont les nôtres, c'est le problème de tous et dans tous les domaines. C'est aussi le nôtre dans notre sphère d'activité: l'enseignement des maths. Nous ne pouvons espérer le résoudre individuellement. C'est un effort collectif de toute la profession qui peut y parvenir. L'APMEP, avec ses outils de communication et ses moyens collectifs, est un outil de choix pour réussir cette coopération.

# Une approche expérimentale de $\pi$

André BONNET

A l'école primaire on utilisait souvent  $\frac{22}{7}$  comme valeur approchée de  $\pi$ . Depuis la mise sur le marché de calculatrices à bas prix, cette pratique est sans doute moins répandue. L'étude qui suit a pour but, à partir d'une expérimentation, de rendre moins arbitraire l'utilisation de cette fraction, d'en découvrir d'autres et de conduire une réflexion sur le nombre  $\pi$ .

## *Diverses définitions de $\pi$ :*

On peut envisager de caractériser  $\pi$  de deux manières<sup>1</sup> :

- comme rapport de la longueur de la circonférence d'un cercle et de son diamètre,
- comme rapport de l'aire du disque et de l'aire du carré ayant pour côté son rayon.

Le concept de rapport de longueur ou d'aire est à considérer avec prudence. En réalité, ce qui est recherché, comme dans l'antiquité grecque, c'est une mesure commune permettant de mesurer, en nombres entiers, ces deux grandeurs : longueur de la circonférence et diamètre, ou aire du disque et aire du carré. En cas d'impossibilité de trouver une mesure commune, telle que chaque grandeur soit un multiple exact de cette mesure commune, ce qui est le cas des grandeurs incommensurables, on se contente d'une approche « au mieux ».

## *Le nombre $\pi$ et les fractions continues<sup>2</sup> :*

On peut remarquer que la valeur  $\frac{22}{7}$  est la première réduite de  $\pi$  dans le développement en fractions continues. Les suivantes sont  $\frac{333}{106}$  et  $\frac{355}{113}$ . Ces réduites sont intéressantes dans la mesure où elles réalisent une bonne approximation du réel dont elles proviennent.

On peut imaginer une méthode simple permettant de vérifier que  $\frac{22}{7}$  est une bonne approche, même la meilleure approche pour une fraction dont le dénominateur est à un seul chiffre. Si on est un peu courageux et si on dispose de suffisamment de moyens on peut même tester, ou trouver, les valeurs  $\frac{333}{106}$  et  $\frac{355}{113}$ .

## *La manip à faire :*

On se munit de carrés et de disques découpés dans un matériau homogène, du plastique par exemple. L'idéal serait de disposer de carrés de côté  $R$  et de disques de même rayon  $R$ .

Pour mesurer les aires du disque et du carré, au lieu de prendre des unités de plus en plus petites, on essaie de mesurer  $d$  disques de rayon  $R$  avec  $n$  carrés de côté  $R$  comme unité.

<sup>1</sup> On devrait, en fait, utiliser deux notations différentes pour ces deux rapports. Par exemple on pourrait noter  $\pi$  le premier et noter  $\pi'$  le second. Voir plus loin la démonstration, à la manière d'Archimède, de l'égalité  $\pi = \pi'$ .

<sup>2</sup> Voir en annexe une approche, sommaire, de la notion de fractions continues.

Sur un plateau d'une balance, on met  $d$  disques de rayon  $R$  et sur l'autre  $n$  carrés de côté  $R$  en recherchant le meilleur équilibre. Comme l'équilibre n'est jamais atteint, on le réalise avec des poids additionnels (marqués en grammes par exemple) ou éventuellement du sable.

On peut partir de  $d = 1$ , puis augmenter d'une unité les valeurs de  $d$ . On recherche, par tâtonnements, la valeur de l'entier  $n$  pour avoir le meilleur équilibre. Celui-ci correspond, en fait, au moment où les plateaux de la balance basculent d'un côté à l'autre. On note les valeurs de  $d$ , de  $n$  et la charge additionnelle  $ch$  (en grammes) pour établir l'équilibre.

### **Simulation :**

Avec Maple on peut simuler l'expérience. Le petit programme suivant est destiné à faire parcourir à  $d$  la plage des entiers de 1 à 999, en recherchant pour chaque valeur de  $d$  la valeur de  $n$  telle que la fraction  $\frac{n}{d}$  soit la plus proche de  $\pi$ .

```
> er:=1: ermin:=er:
for d from 1 to 999 do
  n:=floor3 (Pi*d):
  delta1:=evalf(Pi-n/d):
  delta2:=evalf((n+1)/d-Pi):
  if delta1<delta2 then delta:=delta1: ser:=+1
    else delta:=delta2: ser:=-1 fi:
  if delta<er then er:=delta: dmin:=d: nmin:=n+(1-ser)/2 fi:
  if er<ermin then print(d,nmin/dmin,ser*er): ermin:= er fi:
od:
print(`meilleur résultat jusqu'à d=999 .`) ;
```

L'affichage donne, à chaque amélioration de l'erreur, dans l'ordre : la valeur de  $d$ , le numérateur  $n$  de la meilleure fraction trouvée  $\frac{n}{d}$  et la différence  $delta = \pi - \frac{n}{d}$  (le signe indiquant le sens de l'erreur) :

```
1, 3, .141592654
4,  $\frac{13}{4}$ , -.108407346
5,  $\frac{16}{5}$ , -.058407346
6,  $\frac{19}{6}$ , -.025074013
7,  $\frac{22}{7}$ , -.001264489
57,  $\frac{179}{57}$ , .001241777
64,  $\frac{201}{64}$ , .000967654
```

---

<sup>3</sup> floor - greatest integer less than or equal to a number, selon l'aide de Maple, traduction : "partie entière"

$$71, \frac{223}{71}, .000747584$$

$$78, \frac{245}{78}, .000567013$$

$$85, \frac{267}{85}, .000416183$$

$$92, \frac{289}{92}, .000288306$$

$$99, \frac{311}{99}, .000178513$$

$$106, \frac{333}{106}, .000083220$$

$$113, \frac{355}{113}, -.266 \cdot 10^{-6}$$

*meilleur résultat jusqu'à  $d=999$ .*

### **Remarques sur la simulation :**

On peut remarquer que, jusqu'à  $d = 56$  la fraction  $\frac{22}{7}$  est la meilleure approximation.

Ensuite, on trouve des fractions dont le dénominateur est à deux chiffres mais qui n'améliorent pas sensiblement l'approche de  $\pi$ , c'est la réduite suivante<sup>4</sup> du développement en fraction continue de  $\pi$ , c'est-à-dire  $\frac{333}{106}$  qui devient le meilleur résultat, puis  $\frac{355}{113}$ , et ceci jusqu'à la valeur  $d = 999$ .

### **L'égalité $\pi = \frac{L}{2R}$ à la manière d'Archimède :**

Rappelons tout d'abord les définitions de  $\pi$  et de  $\pi$ . Pour un cercle de rayon  $R$ , si on note  $L$  la longueur de sa circonférence et  $A$  l'aire du disque limité par ce cercle, on peut poser  $\pi = \frac{L}{2R}$  et  $\pi = \frac{A}{R^2}$ .

La démonstration d'Archimède<sup>5</sup>, qui permet de conclure à l'égalité de  $\pi$  et de  $\pi$ , consiste à découper le disque en  $2n$  secteurs égaux et à approcher la longueur de la circonférence par les cordes de ces secteurs ; en étalant sur une droite les triangles ainsi obtenus, on obtient une approche de l'aire  $A$  du disque ainsi qu'une approche de la longueur  $L$  de la circonférence.

---

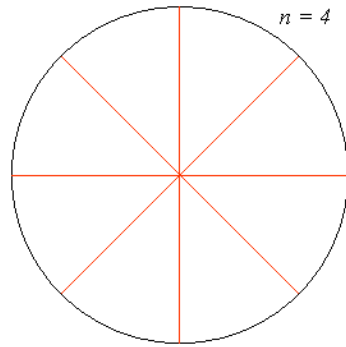
<sup>4</sup> Grâce au signe, on peut remarquer que  $\frac{22}{7}$  et  $\frac{355}{113}$  sont des valeurs par excès, tandis que  $\frac{333}{106}$  est une valeur par défaut.

<sup>5</sup> Archimède (287- 212 av. J.C.) est davantage connu pour son approche de  $\pi$  par la méthode des isopérimètres, on lui doit aussi les formules donnant la surface et le volume du cylindre et de la sphère.

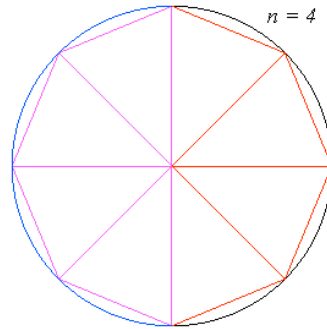
On peut donner une approche très visuelle de l'égalité à démontrer en trois figures, donnant respectivement : le découpage du disque en  $2n$  secteurs, puis en matérialisant les cordes et enfin en mettant "à plat" les triangles et les secteurs.

On fait successivement trois séries de trois figures, l'une pour  $n=4$ , l'autre pour  $n=8$  puis

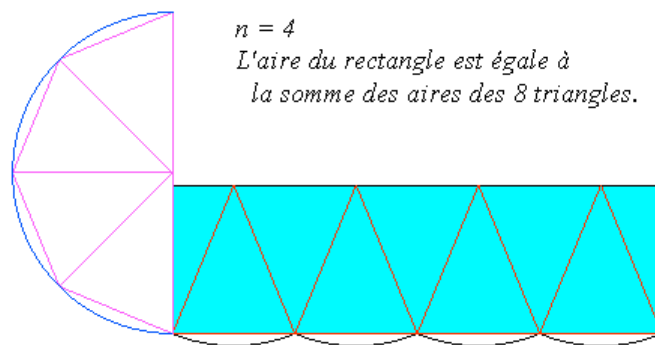
pour  $n=16$  :



*figure 1*



*figure 2*



*figure 3*

Pour  $n = 8$  le on distingue encore la ligne polygonale et la circonférence

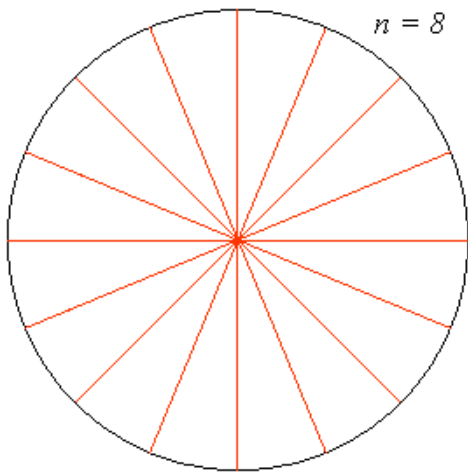


figure 4

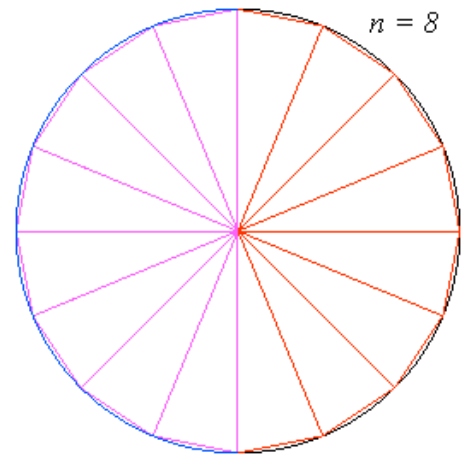


figure 5

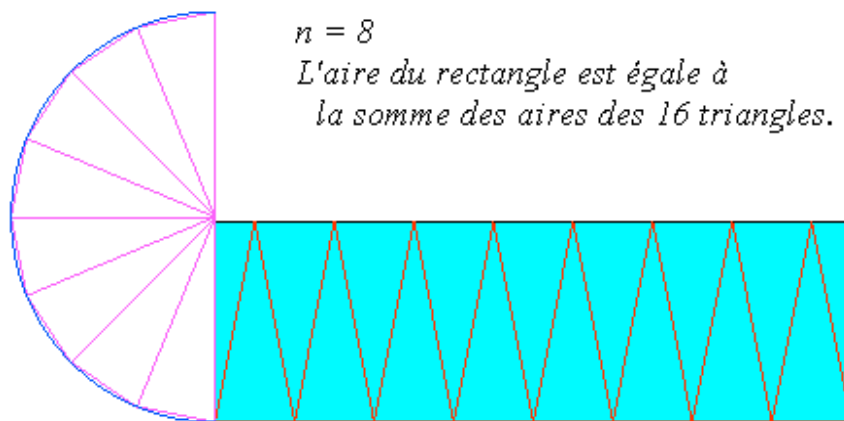


figure 6

Pour  $n = 16$ , la circonférence et la ligne polygonale sont quasiment confondues

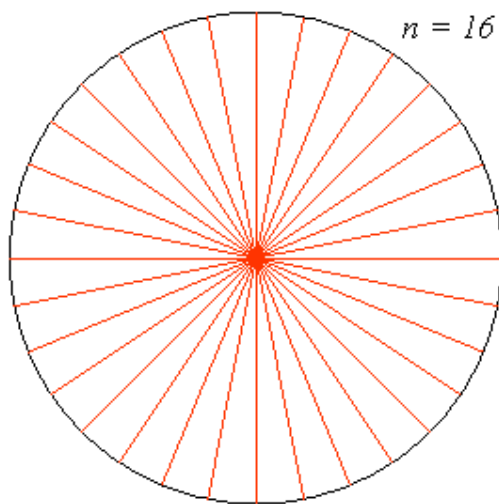


figure 7

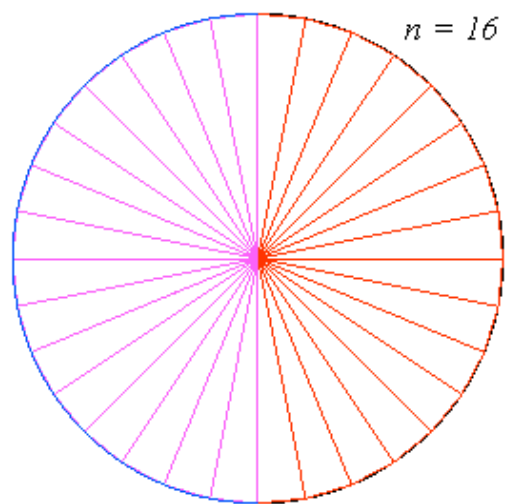


figure 8

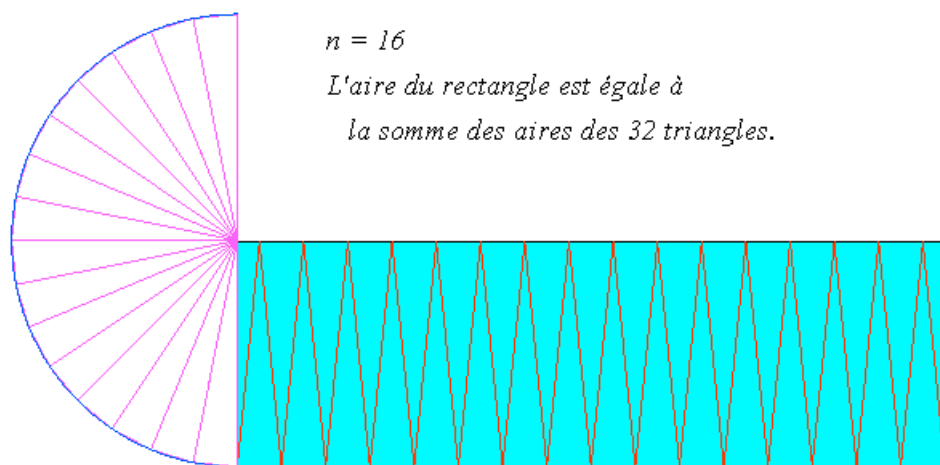


figure 9

**Conclusion :**

Sans faire appel à des notions de convergence, on peut se convaincre, en observant les figures ci-dessus, que le rectangle a une base qui tend vers la demie-longueur de la circonférence tandis que sa hauteur se rapproche du rayon du cercle. On déduit que l'aire du rectangle tend vers la valeur  $\frac{L}{2}R$ , et comme cette aire est constamment égale à la somme des

aires des  $2n$  triangles, il devient évident qu'elle est de plus en plus proche de l'aire des  $2n$  secteurs, dont la valeur est égale à  $A$ .

On peut donc conclure que  $A = \frac{L}{2}R$ , ou encore en divisant les deux membres par  $R^2$ , on trouve que  $\square = \frac{A}{R^2} = \frac{L}{2R} = \square$ .

### ***Quelques remarques sur la manip :***

Pour faire l'expérience complète il faut disposer de plus de 113 disques et de plus de 355 carrés<sup>6</sup>. La mise en évidence de  $\frac{22}{7}$  nécessite beaucoup moins de matériel : une dizaine de disques et une trentaine de carrés.

Il faut aussi une balance à plateaux. Par contre, les poids marqués ne sont pas indispensables, si on se contente de prouver que  $\frac{22}{7}$  est la meilleure approximation – elle correspond au tas de sable le plus petit.

Pour montrer que le rayon ne joue aucun rôle, il serait souhaitable de faire l'expérience avec des disques et des carrés plus grands ou plus petits (mais toujours d'un rayon égal au côté du carré).

La manip pour être valable doit utiliser des pièces bien usinées et d'un matériau bien homogène et d'épaisseur constante. Le contrôle de la qualité de ces pièces est facile, car il suffit de mettre deux carrés accolés par un côté en superposition d'un disque, pour voir si le diamètre du disque est bien le bon.

---

<sup>6</sup> Pour une expérimentation en classe, on peut imaginer une répartition des élèves en une douzaine de groupes. Chaque groupe dispose de 10 disques et 30 carrés et recherche la fraction  $\frac{22}{7}$ . Ensuite la classe toute entière participe à la recherche de  $\frac{355}{113}$  en mettant en commun les 120 disques et les 360 carrés.

### Quelques notions sur les fractions continues<sup>7</sup> :

Pour une approche rapide de cette notion, on peut donner quelques exemples de développements de nombres réels en faisant appel à Maple :

> **with(numtheory)**<sup>8</sup> :

Exemple 1 :

> **sqrt(3)=cfrac (sqrt(3),6) ;**

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}$$

Exemple 2 :

> **sqrt(2)=cfrac (sqrt(2),6) ;**

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}}}}$$

Exemple 3 :

> **5/3=cfrac (5/3,6) ;**

$$\frac{5}{3} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$$

Exemple 4 :

> **Pi=cfrac (Pi,6) ;**

$$\pi = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}}$$

<sup>7</sup> Pour plus de détails théoriques sur les fractions continues, notamment la qualité d'approximation des réduites, on pourra consulter les pages web : <http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/chronomath/FracCont.html> .

A signaler, que le site chronomath fait partie de ceux proposés par l'apmep dans la rubrique « vers autres sites ».

<sup>8</sup> L'utilisation de la bibliothèque de théorie des nombres est indispensable pour la fonction cfrac.

On obtient les réduites en arrêtant le développement à un certain rang. Les premières réduites données ci-dessous sont obtenues arrêtant le développement au rang 1, 2, 3 et 4 et en remplaçant les pointillés par zéro :

$$3 + \frac{1}{7 + \dots} = \frac{22}{7}, \quad 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \dots}} = \frac{333}{106}, \quad 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \dots}}} = \frac{355}{113},$$

$$3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292 + \dots}}}} = \frac{103993}{33102}$$

On retrouve bien les trois fractions déjà vues :  $\frac{22}{7}$ ,  $\frac{333}{106}$  et  $\frac{355}{113}$ . Par contre la quatrième réduite, qui est égale à  $\frac{103993}{33102}$ , est hors de portée de l'expérimentation. Elle correspond à une approche de  $\pi$  avec une précision de  $10^{-9}$ .

On préfère en général  $\frac{355}{113}$  à  $\frac{333}{106}$  car, pour un dénominateur sensiblement le même, l'approche de  $\pi$  est bien meilleure :  $0,2 \cdot 10^{-6}$  au lieu de  $0,8 \cdot 10^{-4}$ .

### **Quelques repères sur $\pi$ :**

La lettre grecque  $\pi$ , déjà utilisée par l'anglais *William OUGHTRED*<sup>9</sup> (1574-1660), pour désigner le fameux quotient de la circonférence d'un cercle à son diamètre, a été utilisée systématiquement par un autre anglais *JONES William* (1675-1749), dans un manuel de mathématiques élémentaires écrit en 1706.

Cette notation a été définitivement adoptée par EULER et LAMBERT. A signaler aussi la fin des incertitudes sur ce nombre :

- $\pi$  est irrationnel : LAMBERT, 1761
- $\pi$  est transcendant : LINDEMANN, 1882.

<sup>9</sup> On lui attribue aussi la paternité (avec son contemporain GUNTER) de la première échelle logarithmique et, par là, de la règle à calcul (voir : <http://chronomath.irem.univ-mrs.fr/chronomath/Oughtred.html>).

# *Euro et Math*

Robert Rolland

## **1 Euros neufs et vieilles preuves**

Le début de l'année 2002 nous a amené nos beaux billets européens tout neufs. Comment résister à la question que tout le monde se posait : les numéros de ces billets contiennent-ils un code détecteur d'erreurs? Je suis donc allé à la première heure le 1<sup>er</sup> Janvier en chercher une petite liasse dans le distributeur le plus proche, espérant les trouver, puisque tout neufs, dans l'ordre logique de la numérotation. En effet, voici donc une partie des numéros que j'ai relevés :

U14164027898  
U14164027889  
U14164027871  
U14164027862  
U14164027853  
U14164027844  
U14164027835  
U14164027826  
U14164027817  
U14164027808  
U14164027781  
U14164027772

On voit tout de suite que **la somme des chiffres modulo 9 est constante**. Mais que faire de la lettre? Hélas tous mes billets commençaient par *U*. J'entrepris donc de réveiller mes voisins, mes amis qui n'avaient que trop dormi afin d'en trouver un qui aurait un billet préfixé d'une autre lettre. Hélas, personne n'avait le moindre petit billet à me mettre sous la dent. Le croiriez vous, ils me répondaient tous que disposer d'un billet commençant par un *V* n'était pas leur souci principal et que d'ailleurs, n'ayant pas complètement cuvé leur alcool du réveillon ils ne s'étaient pas encore procuré les précieuses coupures. En plus ils disaient qu'il était l'heure du petit déjeuner, et que moi-même je ferais aussi bien d'aller me faire cuire un œuf. Heureusement, le site web de la Banque de France donne des photographies de divers billets, on y voit des numéros qui commencent par d'autres lettre que *U*.

A partir de là une généralisation audacieuse mais raisonnée donne à penser que la règle est la suivante :

**On attribue à la lettre le nombre qui donne sa place dans l'alphabet** (*U* est remplacé par 21). **On fait alors la somme modulo 9 de ce nombre et de tous les chiffres qui le suivent et on obtient 8.**

Je dois dire que j'étais un peu déçu qu'on nous ait ressorti cette vieille preuve par 9. J'ai donc recherché s'il n'y avait pas un autre mécanisme plus complexe. Je n'en sais rien mais les deux numéros valides

U14164027898  
U14164027808

prouvent au moins qu'il existe des cas où une erreur sur un seul chiffre n'est pas détectée.

Que cela soit clair : un code détecteur **n'a pas un rôle de sécurité** destiné à prévenir les contrefaçons. On voit mal un faussaire être assez débile pour fabriquer des billets dont les numéros seraient incohérents. De tels codes sont utilisés par exemple pour détecter des erreurs de saisie.

On peut tout de même se demander si on pouvait faire mieux sans grossir les nombres utilisés.

## 2 *Pouvait-on faire mieux ?*

Remarquons qu'on peut considérer que chaque numéro est formé d'une lettre, de 10 chiffres et d'un onzième chiffre pouvant être considéré comme la clé. Cette clé étant calculée de telle sorte que la somme totale (y compris la valeur de la lettre) soit 8 modulo 9. Il y a bien entendu une ambiguïté lorsque la clé vaut 9 car alors la clé pourrait être aussi bien 0. Mais je n'ai pas trouvé de billet se terminant par 0.

Ainsi qu'on l'a vu, une telle clé ne permet pas de détecter à coup sûr une unique erreur. On peut citer divers codes pourvus eux aussi d'un seul chiffre de clé et qui eux permettent de détecter à coup sûr une unique erreur.

**Exemple 1 :** Puisque nous sommes dans des histoires bancaires, commençons par la règle de Luhn utilisée sur les numéros de cartes bancaires.

Un numéro de carte bancaire est de la forme

$$a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0,$$

où les  $a_i$  sont des chiffres décimaux qu'on identifiera aux nombres  $0, 1, \dots, 9$ . Sur ces nombres on définit l'application :

$$\begin{cases} m(x) = 2x \text{ si } 0 \leq 2x \leq 9, \\ m(x) = x_1 + x_2 \text{ si } 2x = 10x_1 + x_2, \end{cases}$$

avec  $0 \leq x_i \leq 9$ . Ainsi  $m(x) = 2x \pmod{9}$  si  $0 \leq x \leq 8$  et  $m(9) = 9$ .

On impose à un numéro de carte bancaire de vérifier (règle de Luhn) :

$$a_0 + m(a_1) + a_2 + m(a_3) + \cdots \equiv 0 \quad (10)$$

Le chiffre  $a_0$  peut être considéré comme la clé, calculée en fonction des autres chiffres afin que la règle de Luhn soit vérifiée. Si un des chiffres et un seul est erroné il est facile de voir (en utilisant le fait que  $m$  est une bijection) que la cohérence est compromise et l'erreur est détectée. C'est donc déjà mieux. De plus si deux chiffres successifs sont permutés, on s'en aperçoit, sauf si ces deux chiffres sont 0 et 9 (il suffit pour démontrer cela de regarder la fonction  $m(x) - x \pmod{10}$  et de voir que  $m(x) - x = m(y) - y$  avec  $x$  et  $y$  distincts ne peut avoir lieu que si l'un des nombres est 0 et l'autre 9).

**Exemple 2 :** Le deuxième exemple est le code UPC (Universal Product Code) utilisé pour coder par exemple les produits des supermarchés.

Le code UPC utilise des nombres de 12 chiffres  $a_1 \cdots a_{12}$  (11 chiffres pour désigner un produit, et une clé), de telle sorte que

$$\sum_{i=0}^5 3a_{2i+1} + \sum_{i=1}^6 a_{2i}$$

soit divisible par 10.

Si un chiffre du nombre  $A = a_1 a_2 \cdots a_{12}$  est modifié, la somme  $A_1 = \sum_{i=0}^5 3a_{2i+1} + \sum_{i=1}^6 a_{2i}$  associée à  $A$  est modifiée en  $A'_1$  de telle sorte que  $|A'_1 - A_1| = a$  ou que  $|A'_1 - A_1| = 3a$  avec  $1 \leq a \leq 9$ . Dans chacun de ces cas  $A'_1 - A_1$  n'est pas divisible par 10 et donc  $A'_1$  n'est pas divisible par 10 ce qui permet de détecter l'erreur.

Si le chiffre  $a_{2i}$  est permuté avec  $a_{2i+1}$ , la somme  $A_1$  est transformée en  $A'_1$  de telle sorte que

$$A'_1 - A_1 = a_{2i+1} - a_{2i} + 3(a_{2i} - a_{2i+1})$$

Donc

$$A'_1 - A_1 = 2(a_{2i} - a_{2i+1})$$

En dehors des cas où  $|a_{2i} - a_{2i+1}| = 5$ ,  $A'_1 - A_1$  n'est pas divisible par 10 donc l'erreur est détectée.

Hélas il y a là encore des cas particuliers pour lesquels une permutation de deux chiffres consécutifs n'est pas détectée.

**Exemple 3 :** Donnons un autre exemple instructif, le code ISBN utilisé pour les livres. L'*International Standard Book Number* utilise des mots de longueurs 10 constitués avec les chiffres 0, 1, ..., 9 et le symbole X (qui représente le nombre 10); le symbole X ne sera utilisé, si nécessaire, que pour la clé.

Exemples : 2 84180 013 X, 2 84225 000 1, 0 471 62187 0, 0 12 163251 2.

Le premier chiffre représente le pays, un bloc de chiffres est attribué à un éditeur, un autre bloc est le numéro donné par l'éditeur, le dernier symbole est la clé, calculée de telle sorte que si  $a_1 a_2 \dots a_{10}$  désigne un numéro I.S.B.N.

$$\sum_{i=1}^{10} i a_{11-i}$$

soit divisible par 11.

Remarquons que  $a_{10} = \sum_{i=1}^9 i a_i$ . Ceci simplifie un peu le calcul de la clé.

Soit  $A$  un numéro valide. Appelons  $A_1$  le nombre  $\sum_{i=1}^{10} i a_{11-i}$  obtenu à partir des chiffres de  $A$ . On sait que  $A_1$  est divisible par 11. Si un chiffre de  $A$  est modifié, on obtient alors  $A'$  dont le nombre associé  $A'_1$  vérifie

$$|A'_1 - A_1| = ia$$

où  $0 \leq i \leq 10$ ,  $1 \leq a \leq 9$ . Le nombre  $ia$  est premier avec 11, donc  $A'_1$  n'est pas divisible par 11, ce qui permet de détecter l'erreur.

Si deux chiffres distincts sont permutés, par exemples ceux d'indices  $i$  et  $j$ , le nombre  $A_1$  devient  $A'_1$  et

$$A'_1 - A_1 = i(a_j - a_i) + j(a_i - a_j) = a(i - j),$$

où  $a = a_j - a_i$ . On a  $1 \leq |a| \leq 9$  et  $1 \leq |i - j| \leq 9$ . Donc  $A'_1 - A_1$  n'est pas divisible par 11 et  $A'_1$  n'est pas divisible par 11.

Cette fois-ci, contrairement aux deux premiers exemples, on a pu détecter outre une erreur sur un chiffre, toutes les permutations de deux chiffres consécutifs. Mais nous avons travaillé modulo 11 ce qui introduit une clé "parasite" X. Bien entendu on pourrait décider de supprimer tous les numéros ayant cette clé parasite. Ce n'est pas commode et fait perdre des représentations valides.

### 3 Toujours plus fort : la perle rare

Alors la question maintenant est de savoir si on peut faire encore mieux que dans les trois exemples précédents. Autrement dit, peut-on avoir un code avec une clé formé d'un chiffre décimal et qui permette de détecter à coup sûr une unique erreur, ou une permutation de deux chiffres consécutifs.

Notons  $a_1 a_2 \dots a_{i-1} x_i x_{i+1} a_{i+2} \dots a_n$  un numéro dépendant des deux variables  $x_i$  et  $x_{i+1}$  où  $i$  est une position fixée (autrement dit on regarde ce qu'il se passe lorsqu'on fixe les composantes d'un numéro,

sauf deux d'entre elles consécutives. La clé calculée lorsque  $x_i = u$  et  $x_j = v$  est notée  $f(u, v)$  (ici  $0 \leq u, v \leq 9$ ). Si on veut pouvoir détecter à coup sûr un erreur sur un chiffre il est nécessaire que pour  $v$  fixée à une valeur  $v_0$ , la fonction de  $u$  seule,  $f(u, v_0)$  soit une bijection de  $\{0, \dots, 9\}$  sur lui même et aussi qu'en fixant  $u$  à la valeur  $u_0$  la fonction  $f(u_0, v)$  soit bijective. De plus lorsque  $u \neq v$  on doit avoir  $f(u, v) \neq f(v, u)$ . Tout ceci peut s'interpréter de la façon suivante. Construisons une matrice de taille  $10 \times 10$  pour laquelle les coefficients  $A_{u,v}$  sont les  $f(u, v)$ . Chaque ligne et chaque colonne doit contenir exactement un permutation des 10 chiffres décimaux. Cette matrice est un carré latin. De plus ce carré latin doit être tel que deux éléments qui sont symétriques par rapport à la diagonale principale (sans être sur cette diagonale!) sont toujours distincts. Il n'y a d'espoir d'existence d'un code vérifiant les propriétés indiquées que si un tel carré latin existe.

Soit  $D_{10}$  le groupe diédral d'ordre 10 que nous représenterons comme le groupe des isométries laissant invariant un pentagone régulier. Notons  $O$  le centre du pentagone et  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4$  les sommets écrit dans l'ordre (sens trigonométrique). Nous numérotions les transformations de la façon suivante : 0 est l'identité, 1 est la rotation  $R$  de centre  $O$  et d'angle  $\frac{2\pi}{5}$ , 2, 3, 4 sont respectivement les rotations  $R^2, R^3, R^4$ . Enfin 5, 6, 7, 8, 9 sont respectivement les symétries  $S_{OA_2}, S_{OA_0}, S_{OA_3}, S_{OA_1}, S_{OA_4}$  où  $S_{OA_i}$  désigne la symétrie par rapport à l'axe  $OA_i$ . On prend comme loi de groupe sur  $0, \dots, 9$  la loi "\*" donnée par la composition des transformations. Ainsi  $5 * 6 = S_{OA_2} \circ S_{OA_0} = R^4 = 4$  tandis que  $6 * 5 = R = 1$ .

On introduit aussi la permutation  $\sigma$  de  $\{0, \dots, 9\}$  dans lui même définie par

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= 1; & \sigma(1) &= 5; & \sigma(2) &= 7; & \sigma(3) &= 6; & \sigma(4) &= 2; \\ \sigma(5) &= 8; & \sigma(6) &= 3; & \sigma(7) &= 0; & \sigma(8) &= 9; & \sigma(9) &= 4; \end{aligned}$$

La matrice  $A$  dont les coefficients  $A_{u,v}$  vérifient

$$A_{u,v} = u * \sigma(v)$$

est un carré latin ayant la propriété indiquée. Pour voir cela il suffit d'écrire cette matrice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 6 & 2 & 8 & 3 & 0 & 9 & 4 \\ 2 & 6 & 8 & 7 & 3 & 9 & 4 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 9 & 8 & 4 & 5 & 0 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 8 & 5 & 9 & 0 & 6 & 1 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 9 & 6 & 5 & 1 & 7 & 2 & 4 & 8 & 3 \\ 9 & 0 & 3 & 4 & 8 & 2 & 7 & 5 & 1 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 0 & 9 & 3 & 8 & 6 & 2 & 7 \\ 6 & 2 & 0 & 1 & 5 & 4 & 9 & 7 & 3 & 8 \\ 7 & 3 & 1 & 2 & 6 & 0 & 5 & 8 & 4 & 9 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 7 & 1 & 6 & 9 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : Il est possible de montrer que si on avait pris une opération commutative  $\times$  alors quel que soit le choix de la permutation  $\sigma$  la matrice ayant pour coefficients  $u \times \sigma(v)$  ne convient pas.

Maintenant, expliquons comment calculer la clé. On calcule  $a_n$  en fonction de  $a_1, \dots, a_{n-1}$  de telle sorte que :

$$\sigma(a_1) * \sigma^2(a_2) * \dots * \sigma^{n-1}(a_{n-1}) * a_n = 0$$

On obtient alors le code convoité.

## 4 Conclusion

Voilà ce qu'à peu près ils auraient pu construire ...

## 1 Introduction : l'île mathématique comme dérision sociale

S'interroger sur l'utilité – « à quoi ça sert ? » – et la pérennité des mathématiques, surtout celles que l'on qualifie de « pures », pourrait sembler hyper-actuel. Car à notre époque, affamée de visibilité sociale, de remise de pendule, à l'heure, ces mathématiques ne seraient plus ni vraiment utiles, ni primordiales dans les enseignements du secondaire, ni indispensables au bon fonctionnement de la société, voire, en poussant cette idée à l'extrême, parfaitement remplaçables par des ordinateurs, comme l'a déclaré récemment, et sans ménagement, Claude Allègre<sup>3</sup>, ex-ministre de l'Éducation et de la Recherche : « *Les maths sont en train de se dévaluer, de manière quasi-inéluctable. Désormais, il y a des machines pour faire les calculs. Idem pour les constructions de courbes.* » Mais face au « séisme Allègre », face à ces propos, qui furent les fruits pervers d'une arlequinade gouvernementale savamment orchestrée, quelques mathématiciens professionnels se sont sentis le devoir de réagir. D'aucuns ont plaidé pour une plus grande ouverture, une plus grande réceptivité au foisonnement technique, d'autres ont critiqué toute pensée réductionniste et dénoncé l'absurdité d'une demande sociale ignorante et inexpérimentée, ou ont défendu l'inventivité, la fécondité et l'excellence du conceptuel, même au niveau le plus abstrait, d'autres enfin ont montré les limites de la recherche finalisée, bref, face aux menaces qui pesaient sur leur communauté, quelques mathématiciens ont tenté de réagir avec quelques arguments philosophiques, et en se dotant d'une idéologie minimale<sup>4</sup>.

Mais paradoxalement, le malaise provoqué par les déclarations ministérielles aura eu beaucoup moins d'impact dans les universités, orientées essentiellement vers la recherche, que dans les lycées et collèges, voués à l'enseignement des mathématiques élémentaires, et dont le personnel est plus largement syndiqué. Sur le fond, chacun sait que le cerveau et l'esprit des chercheurs dans les universités sont absolument irremplaçables, et qu'il n'y a pas d'alternative technologique sérieuse là-dessus, méga-ordinateurs ou pas<sup>5</sup>. L'inquiétude des responsables de laboratoire s'est donc surtout focalisée sur l'attribution future des postes et des moyens de fonctionnement, qui sont vitaux pour la pérennité de la communauté<sup>6</sup>. Car une nation qui peut se glorifier de posséder la troisième école mondiale en mathématiques, après les États-Unis et le Japon, aurait tort de céder trop facilement aux pressions « pragmatiques » du Marché et de sacrifier un tel « pôle d'excellence » sans résister.

Il faut dire que les mathématiques universitaires composent un monde très autonome, doté d'une richesse spirituelle extraordinaire, et traversé d'échanges intellectuels qui sont d'une vivacité sans égal, et où, par conséquent, les déclarations provocatrices, superficielles, lunatiques et sans fondement, même enflées par les media, incitent plutôt à une certaine indifférence. Pour être percutante, et pour « faire mal », la provocation doit toucher en plein cœur une vérité étouffée ou refoulée (par un individu, par une communauté). Or j'ajouterais que dans l'ensemble, les mathématiciens sont assez « philosophes » face aux problèmes de société, pour ne pas dire très détachés, peut-être un peu à cause d'une certaine distance vis-à-vis du politique, mais surtout à cause de leur engagement dans la *recherche mathématique* avec tout le *souci* qu'elle implique. En définitive, le navire continue à voguer, chacun s'affairant à son propre poste, du moussaillon au capitaine. L'insolence de l'affaire Sokal-Bricmont elle non plus n'avait pas réellement offensé les vrais travailleurs du concept, en philosophie.

---

1. Texte soumis pour publication dans la rubrique « Sciences » de la revue « *Études* », à la demande de Mr Guy Petitdemange, Directeur de la rédaction. Première version : 25 Avril 2000. Ce texte est paru en deux parties : Tome **395**, no.4 (3954), octobre 2001, 341–351 ; Tome **395**, no.5 (3955), novembre 2001, 493–504.

2. JOËL MERKER : Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités, Centre de Mathématiques et d'Informatique, UMR 6632, 39 rue Joliot Curie, F-13453 Marseille Cedex 13, France. e-mail : merkercmi.univ-mrs.fr

3. *France-Soir*, 23 Novembre 1999.

4. Voir *Gazette des mathématiciens*, n°74, Octobre 1997, « *Le rôle des mathématiques* », dossier établi par Marc Hindry, et surtout le texte de Gilles Châtelet, qui écrit p.13, je cite : « Ces deux spiritualités [de l'épicière du coin et de l'inspecteur des Finances] marchent désormais main dans la main, sûres de leur bon droit, distribuant les ultimatum : « À quoi servez-vous ? Vous devriez avoir honte d'être aussi abstraits, aussi élitistes », agacés, sinon exaspérés par toute activité qui ne se laisse pas enfermer dans un horizon borné de chef comptable et apparaissent donc comme un défi insupportable au « pragmatisme » contemporain dont aime à se réclamer le *techno-populisme*. » Du même auteur, je conseille de lire aussi : *Vivre et penser comme des porcs, de l'incitation à l'envie et à l'ennui dans les démocraties-marchés*, Exils, Paris, 1998.

5. Cela fait à peine dix ans que nous sommes entrés dans l'ère des guichets automatiques. . .

6. Avec de telles déclarations, la communauté pouvait en effet s'interroger sur les motivations politiques et économiques

Est-ce à dire que les mathématiciens, tels Vigny raillé par Sainte-Beuve, s'enferment trop facilement dans leur tour d'ivoire<sup>7</sup> car il s'y trouvent très bien? À cette image d'Épinal de mathématiciens solitaires et déconnectés de la société, substituons une autre image, plus poétique et plus humoristique – un peu satirique, aussi –, qui est tirée des voyages de Gulliver<sup>8</sup>.

Malgré ses pénibles expériences chez les nains de Lilliput et les géants de Brobignac, l'incorrigible Gulliver partira pour un troisième voyage, durant lequel, pris par les pirates, et abandonné ensuite dans un canot, il prendra pied sur une île très particulière, l'*île mathématique*. Gulliver est hissé par un système de poulies sur cette île, un grand corps opaque à base plate, lisse et brillante qui vogue dans les airs à une hauteur de cent toises environ au-dessus du rivage, qui ressemble à s'y méprendre au Mont Saint-Michel en dix fois plus étendu, et se dirige en direction de Lagado, la capitale terrestre du royaume de l'île. Là haut, il découvre des gens habillés de vêtements ornés d'images de soleil, de lune, et d'étoiles, et dont un œil fixe le zénith, tandis que l'autre est tourné vers l'intérieur. Leurs têtes penchent toutes sur la droite ou sur la gauche. Au comble de l'étonnement, Gulliver remarque alors autour d'eux « de nombreux domestiques en livrée armés de vessies gonflées attachées comme un fléau au bout d'un bâton ». Dans ces vessies, « il y a des pois secs ou des petits cailloux » et avec ces instruments curieux, dont Gulliver ne tarde pas à comprendre l'utilité, les domestiques « frappent de temps à autre la bouche ou l'oreille de ceux qui se trouvent près d'eux ». Invité alors par les notables qui l'ont rencontré à se rendre dans la demeure royale, Gulliver observe dès son entrée que le Roi ne prête nulle attention à lui. Sa Majesté est en effet plongée dans un *problème de mathématiques*, et il faudra aux visiteurs attendre plus d'une heure avant que ce problème soit résolu. . . Enfin, lorsque le Roi a terminé, deux jeunes pages munis de ces vessies le frappent alors, l'un d'eux sur la bouche, et l'autre sur l'oreille droite, ce qui fait sursauter le Roi brusquement. Regardant vers Gulliver, le Roi se souvient de ce qu'on lui avait dit de cette arrivée, et prononce alors quelques paroles à l'adresse de l'étranger. « Aussitôt, un jeune homme à vessie vint près de moi », raconte Gulliver, « et me frappa gentiment l'oreille droite, mais je fis comprendre par signes que je n'avais pas besoin d'un tel instrument. Ce geste donna au roi et à la cour, je m'en aperçus par la suite, une mince opinion de mon intelligence. »

La fiction donne ainsi l'image d'un royaume autarcique et d'une société d'amoureux égarés de mathématiques éthérées, de « professeurs Nimbus évaporés », voire même d'aimables « ayatollahs du savoir », et qui sont à ce point « dans la lune », qu'il faut les ramener à la réalité par un bruit de hochet. . . !

Pour contrebalancer la fantaisie de ces visions littéraires quelque peu caricaturales, pour corriger tous les stéréotypes qui circulent sur les mathématiques et qui contribuent, malheureusement, à renforcer les complexes des littéraires face aux sciences mathématiques, nous nous proposons dans cet article de produire une *description à la fois didactique et anecdotique de la recherche en mathématiques*, de formuler aussi quelques informations générales, et de les articuler autour des questions les plus simples que nous nous posons tous, comme par exemple: qu'est-ce que la recherche en mathématiques? à quoi servent les mathématiques? comment fonctionnent-elles? comment vit-on quand on est mathématicien? comment la recherche mathématique est-elle possible? Les mathématiques ont-elles une limite? *etc.* Le lecteur mathématicien n'y apprendra pas grand chose, les exemples choisis étant très classiques, qu'il me pardonne! Mais dans cet article qui n'a ainsi aucune prétention à l'originalité ni philosophique ni technique, on cherchera à offrir à l'*homme lettré* une présentation modeste, abordable, de ce qui *constitue* le monde des *mathématiciens professionnels*, et de quelques mythes que l'on s'y raconte. Afin d'en faciliter la lecture, les informations les plus techniques, et qui ne sont pas indispensables à la compréhension du texte, seront renvoyées en notes de bas de page.

---

qui poussaient le gouvernement à jeter sans cesse le discrédit sur les mathématiques (et aussi sur les lettres, *etc.*). L'ex-ministre exécutant avec zèle le rôle de « butor gouvernemental » cautionné par le pouvoir et par un courant de pensée « dans l'air du temps », déclarait encore, mi-sincère, mi-insultant (23 Novembre 1999, *ib.*): « Humainement parlant, je ne peux pas mettre zéro poste de maths au concours de recrutement. Je ne peux que réduire graduellement les postes mis aux concours, par honnêteté vis-à-vis des étudiants qui préparent ces concours et qui ont fait de gros efforts pour cela. »

7. Image employée par Sainte-Beuve pour désigner la retraite pure, solitaire et hautaine où il regrettait que Vigny se fût si tôt enfermé. « (*Vigny*) est même allé jusqu'à penser (...) qu'il n'y avait de refuge assuré que dans le culte persévérant et le commerce solitaire de l'idéal. Longtemps, il s'est donc tenu à part sur sa colline, et, comme je le lui disais un jour, il est rentré avant midi dans sa *tour d'ivoire*. » Sainte-Beuve, *Élection de Vigny à l'Académie Française*, Revue des Deux-Mondes, Févr. 1846.

8. Jonathan Swift, *Les voyages de Gulliver*, Garnier, 1863, illustré par Grandville.

## 2 Les mathématiques à l'école comme moyen de sélection : initiation obligée à la compétition intellectuelle

Hélas, l'image des mathématiques en France, pour le plus grand nombre, est globalement négative. C'est le système éducatif qui en porte la lourde responsabilité, puisqu'il les utilise depuis longtemps, à la place du latin et du grec – maintenant disparus – comme moyen prééminent de sélection à l'école, et partant, comme mode direct d'exclusion, par exemple pour le passage en première scientifique, pour l'entrée dans une classe préparatoire, ou pour l'intégration d'une grande école scientifique. L'éducation utilise à ces fins élitistes les mathématiques, d'où le ressentiment, fort compréhensible, d'une part très importante de la société envers les mathématiques, ressentiment qui s'accompagne parfois d'une crainte sacrée pour un domaine prestigieux qui semble inaccessible. Mais en vérité, l'exigence de sélection provient, en amont, de la structuration de nos sociétés en sociétés de compétition « sauvage », à quelque niveau que ce soit (économie, sport, entreprises, universités, etc.). Peut-on remplacer les mathématiques par une autre matière comme moyen principal de sélection à l'école? Possible... Car les mathématiques ne sont pas le seul moyen de sélection sociale; de plus, à cause d'un discours gouvernemental dévalorisant, elles risquent elles aussi de tomber bientôt en désuétude, comme auparavant le latin et le grec. Quand on parle de mathématiques, le débat sur la sélection est incontournable, et c'est souvent un cercle vicieux. Mais en définitive, le *vrai débat* sur la compétition, *qu'il faut bien distinguer de l'émulation*, est un débat extrêmement difficile et profond, qu'on limite trop souvent par paresse de la pensée à un plan strictement idéologique; un tel débat demeure malheureusement en marge sur un plan critique et philosophique universel; il est quelque peu étouffé, passé sous silence, refoulé, mais cette question dépasse de loin les seules compétences des mathématiciens. Il serait souhaitable que cet ordre de questions ne porte pas atteinte à l'essence même des mathématiques.

Il y a en effet en France un *génie mathématique* de type cartésien, ancré dans nos esprits par une tradition classique, et qui imprègne les grands esprits littéraires, un *génie proprement français du raisonnement rigoureux*, accompagné de l'impératif récurrent d'avoir, comme le disait Montaigne, la tête « bien faite ». Dans les années 1950 à 1970, le cartésianisme initial a trouvé une postérité soudaine dans le structuralisme, en mathématiques (Hilbert, Bourbaki) et en sciences sociales (Levi-Strauss, Foucault). Une telle vitalité incite au respect. Aussi, ceux qui condamnent les mathématiques, ou ceux pour qui « La France ne peut plus se payer le luxe de produire du mathématicien pur<sup>9</sup> » auraient tout intérêt à bien estimer d'abord l'immensité du monde mathématique et à apprendre à connaître, par des témoignages extérieurs, la richesse de ce monde qui semble véritablement indéfini quand on le contemple de l'intérieur. Tandis que le monde géographique est clairement borné et que la Terre est aujourd'hui quasi-explorée, cartographiée, photographiée sous tous ses aspects, le monde mathématique apparaît au contraire de plus en plus comme un territoire truffé de zones vierges, hérissé d'icebergs et de continents inexplorés, qu'il sera de plus en plus difficile, pour des raisons techniques, ou métaphysiques, de conquérir. *En mathématiques, la géographie virtuelle du possible est incommensurable à la géographie du connu.*

Le point qui est extrêmement important ici, en effet, c'est que la réalité mathématique, non seulement *résiste*, mais surtout qu'elle est *source inépuisable d'information*. Par exemple, Alain Connes, médaille Fields<sup>10</sup> en 1984 et professeur au Collège de France, a beaucoup insisté pour que cette idée soit comprise, au moins intuitivement, par des non-mathématiciens: « *C'est le côté inépuisable qui est crucial* ». [...] « Je prétends que, ne serait-ce que dans les propriétés des entiers, il y a une quantité d'informations qui n'est pas de type fini, qui est irréductible à tout système de type fini ou même à tout système de type fini donné récursivement que l'on puisse imaginer »<sup>11</sup>. Ainsi, toutes les déclarations à l'emporte-pièce de l'ancien ministre de la Recherche et toutes les opinions superficielles sur les mathématiques s'écartent radicalement de la vérité. L'infini potentiel, celui qui est à notre mesure, se situe peut-être avant tout dans les mathématiques<sup>12</sup>.

9. Commentaire privé d'un enseignant de marketing à l'École Polytechnique.

10. L'équivalent, en mathématiques, du prix Nobel.

11. Alain Connes, André Lichnerowicz et Marcel Paul Schützenberger, *Le triangle de pensées*, chap. II, Odile Jacob, Paris, 2000, p.53.

12. Du moins, tant que l'humanité ne délaissera pas l'étude des mathématiques! Voici un argument simple pour étayer cette thèse. On sait qu'au strict niveau des *échelles*, notre place dans l'Univers spatial est incomparablement plus petite que notre place dans le Temps universel. Un simple calcul montre en effet que toute l'humanité mise bout à bout, pied contre tête, remplirait à peine un dixième de l'espace de cent cinquante millions de kilomètres qui sépare la Terre du Soleil (mais quand même!), tandis que toutes les vies humaines mises bout à bout couvriraient environ deux fois l'âge de l'Univers (près de quinze milliards d'années). Plus précisément, les rapports

$$\frac{\text{âge de l'Homme}}{\text{âge de l'Univers}} \cong 10^{-8} \gg \frac{\text{taille de l'Homme}}{\text{taille de l'Univers}} \cong 10^{-26}$$

### 3 La compétition entre les chercheurs

La compétition à l'école – il s'agit bien sûr pour un élève doué d'avoir de meilleures notes que ses camarades – n'est en réalité qu'un phénomène banal d'initiation à la compétition sociale, et au-delà, pour ceux qui deviendront par exemple des mathématiciens, c'est une initiation à la compétition entre chercheurs d'un même domaine scientifique. Les universités et les communautés de spécialistes reproduisent à merveille un espace de rivalités propre aux adultes qui est analogue à celui de la classe pour les enfants (bons élèves, mauvais élèves, prix d'excellence, distinction honorifiques, médailles, le tout fondé très souvent sur l'opinion des « maîtres » et sur une réputation distillée par l'opinion du grand nombre). Le phénomène le plus nouveau par rapport à l'école, c'est la cristallisation des forces autour de groupes de recherche ou de laboratoires, voire de « collègues invisibles »<sup>13</sup>, et la naissance de *rivalités entre équipes concurrentes* qui concentrent et unissent des forces individuelles, *y compris en mathématiques*<sup>14</sup>. Mais une telle structuration a globalement moins d'effets pervers que d'effets dynamisants, incitatifs et moteurs.

À ce sujet, le sociologue Bruno Latour a d'ailleurs défendu l'idée que la compétition dans les milieux scientifiques était, en moyenne, beaucoup plus sévère, beaucoup plus accentuée et beaucoup plus impitoyable que dans l'entreprise privée<sup>15</sup>. Sans s'engager dans de telles considérations de sociologie des sciences, disons qu'en recherche, il faut sans cesse être meilleur que les autres sur des terrains virtuellement communs d'exploration, et d'ailleurs, très souvent, le travail du meilleur chercheur éclipe, voire annihile la valeur du travail des autres : cela n'aurait en effet pas de sens de faire publier parallèlement un très bon résultat et un résultat plus faible qui ont été découverts en même temps sur le même sujet. En toute rigueur, si vous voulez triompher d'un mathématicien, vous devez donc en triompher *mathématiquement*, par la démonstration ou par la réfutation, avec des armes mathématiques. De fait, la compétition est extrême entre les chercheurs<sup>16</sup>.

### 4 Le génie mathématique

Car les mathématiques ont toujours exigé une absorption totale des forces de l'esprit. Tandis que la compétition économique et scientifique actuelle nous présente ses aspects plutôt étroits, tandis que l'*isolement volontaire* nous paraît aujourd'hui impensable, l'histoire nous remémore une autre image de la recherche en mathématiques, où les mythes vont bon train et se construisent facilement.

#### 1 Gauss

À cet égard, l'exemple du mathématicien allemand Karl-Friedrich Gauss (1777-1855) est spectaculaire<sup>17</sup>. Surnommé le *prince des mathématiciens* (*Princeps mathematicorum*), Gauss entrevit en 1792, à l'âge de quinze ans, la possibilité des géométries euclidiennes ; en 1796, à dix-neuf ans, il démontra qu'il était possible de construire à la règle et au compas un polygone régulier de 17 côtés, inscrit dans un cercle, alors que ce problème était considéré comme insoluble pour les polygones de plus de 5 côtés depuis l'antiquité ; en 1801, à vingt-quatre ans seulement, il publia un traité de *Recherches arithmétiques* (*Disquisitiones arithmeticae*), de plus de cinq cent pages, contenant une théorie des congruences de nombres entiers, une théorie des formes quadratiques, quatre (!) démonstrations de la loi de réciprocité quadratique, qui avait été démontrée de manière incomplète par Legendre, une théorie nouvelle sur les extensions de corps cyclotomiques<sup>18</sup>, qui lui permit de généraliser considérablement son résultat de 1796

---

sont presque incommensurables sur le plan physique :  $\frac{10^{-26}}{10^{-8}} \cong 10^{-14} \cong 0$ . Et il faut quatre années à la lumière pour se rendre de la deuxième étoile la plus proche, *alpha* de la constellation du Centaure, à la Terre – par conséquent, les extraterrestres sont sûrement trop *lointains* pour communiquer avec nous ! En définitive, l'infini potentiel spatial ne semble pas être vraiment à notre mesure, tandis que l'infini potentiel des mathématiques, inscrit intimement dans le *temps* de la recherche, de l'exploration et du progrès, pour lequel nous avons le secours de la durée très grande de notre vie humaine, semble l'être beaucoup plus.

13. Expression de Pierre Bourdieu, dans *Les usages sociaux de la science, Pour une sociologie clinique du champ scientifique*, Inra Éditions, Paris, 1997.

14. Ce phénomène reste, il est vrai, l'apanage presque exclusif des sciences expérimentales.

15. Bruno Latour, *Le métier de chercheur ; regard d'un anthropologue, passim*. Inra Éditions, Paris, 1995. Mais ces analyses, exagérément instrumentales

16. « Il y a aussi les autres mathématiciens, espace de configuration instable de rivaux et d'amis qui ont des idées. C'est une constellation qui est une source d'inhibition et d'excitations. Parfois le progrès de l'un me paralyse. Parfois je vois clairement que l'idée d'un autre peut mener plus loin que là où il s'est arrêté. » Michèle Vergne, *discours de réception à l'Académie des Sciences*, Paris, Institut de France, 29 Juin 1998. Michèle Vergne est la première femme à entrer à l'Académie des Sciences en mathématiques dans l'histoire.

sur la division du cercle en dix-sept parties égales, et d'obtenir une *condition nécessaire et suffisante* pour qu'un polygone régulier à un nombre entier  $n$  de côté soit constructible à la règle et au compas<sup>19</sup>, etc. En 1827, après plus de quinze ans de travail, Gauss publia ses recherches sur les surfaces (*Disquisitiones circa generales superficies curvas*, traité qui devait révolutionner la conception de la géométrie, grâce aux interprétations et aux travaux subséquents de Riemann (1826-1866) et d'Einstein (1879-1955).

De plus, la personnalité de Gauss et son choix de vie apparaissent habituellement très fascinants aux yeux des mathématiciens, et son expérience témoigne d'une possible *autonomie complète* de l'activité mathématique (cf. *supra* « l'île mathématique » de Swift). Gauss s'était en effet convaincu, à partir d'expérience vécues, qu'il n'aurait que peu de choses à apprendre à vouloir communiquer et à échanger avec les autres mathématiciens... Aussi préféra-t-il s'isoler presque complètement du champ des influences de l'activité mathématique de l'époque<sup>20</sup>.

## 2 Galois

La personnalité du célèbre jeune mathématicien républicain Évariste Galois (1811-1832) offre un autre exemple qui témoigne à la fois de l'importance de l'*autonomie absolue* du génie mathématique et d'une exigence d'*implication totale* dans l'activité mathématique<sup>21</sup>. En dépassant largement les travaux de ses aînés et quasi-contemporains Lagrange (1736-1813) et Legendre (1752-1833), Galois a résolu complètement le problème qui était central à l'aube du dix-neuvième siècle, à savoir la résolution des équations algébriques de degré supérieur à quatre, par une méthode originale et entièrement nouvelle, et a dégagé le concept mathématique très important de *groupe mathématique* qu'il trouva alors sur son chemin et qu'il inventa – le terme « groupe d'une équation algébrique » est en effet dû à Galois<sup>22</sup>. La vie de Galois ressemble véritablement au passage d'une comète. Et cette vie exemplaire a contribué à ancrer dans les consciences *le mythe du mathématicien génial*, très précoce, très fort de caractère, complètement autonome dans ses lectures et dans ses recherches, disparu – hélas ! – prématurément, ayant surtout découvert un théorème très important, ou résolu une question très difficile ; ce jeune savant a été ignoré de ses contemporains, ses travaux ayant été exhumés de nombreuses années après sa mort. Mais sincèrement, la fulgurante épopée galoisienne est véritablement fascinante, et la réalité dépasse en la matière largement la fiction.

En février 1830, Galois remet à l'Académie des Sciences un mémoire sur les conditions pour qu'une équation soit soluble par radicaux, en vue de concourir pour le Grand Prix de Mathématiques. Au mois de Juin 1830, il apprend la perte de son mémoire présenté à l'Académie : *il était chez M. Fourier qui devait le lire, et, à la mort de ce savant, le mémoire a été perdu*. Qu'à cela ne tienne ! Chassé de l'École Normale Supérieure durant la révolution de 1830, après avoir critiqué publiquement le directeur M. Guignaut dans la *Gazette des Écoles*, Galois se verra conseiller par Poisson de présenter à nouveau un mémoire à l'Institut en Janvier 1831. Entre-temps, il fut arrêté le 7 Mai 1831 à la suite d'un toast régicide qu'il avait porté, poignard à la main, lors du banquet républicain aux Vendanges de Bourgogne, puis il fut défendu dans le journal *Globe* et finalement acquitté le 15 Juin. Mais le 4 Juillet, Poisson présenta

17. Gauss publiait en latin, et relativement peu, et attendait que les fruits de ses recherches soient vraiment parfaits – « *Pauca, sed matura* », disait-il. Ainsi, pour la plupart des datations historiques de ses découvertes, les historiens se sont basés sur deux sources d'information importantes : sa correspondance, et son célèbre *Journal mathématique*. Ce Journal, l'œuvre résumée d'une vie, long d'une vingtaine de pages seulement, contient 146 énoncés extrêmement brefs et datés précisément, de tous les résultats que Gauss a démontrés dans sa vie et qu'il jugeait importants.

18. Extensions de corps liées à l'équation algébrique  $x^n - 1 = 0$ , dite *cyclotomique*, du grec *kyklos*, cercle et *tomê*, coupure.

19. Gauss en avait déjà trouvé une démonstration en 1796. Adrien-Marie Legendre (1752-1833), mathématicien français, est l'auteur de nombreux *traités* qui demeurèrent longtemps des classiques par excellence et qui eurent une influence très profonde sur les recherches de Gauss.

20. Gauss démontre que ce polygone régulier à  $n$  côtés est constructible à la règle et au compas *si et seulement si*  $n = 2^m p_1 p_2 \dots p_k$  est le produit par une puissance de 2 de nombres *premiers* de la forme  $p_j = 2^{2^j} + 1$ , où  $j$  est un entier,  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Un nombre  $p$  est dit *premier* s'il n'est pas divisible par un nombre  $q$  strictement inférieur à  $p$ . Ces nombres  $p_j$  sont appelés *nombres de Fermat*, car Pierre de Fermat (1601-1665), conseiller au Parlement de Toulouse, et renommé pour ses recherches en arithmétique, avait conjecturé que tous les nombres  $p_j$  sont premiers. Les nombres  $p_0 = 3$ ,  $p_1 = 5$ ,  $p_2 = 17$ ,  $p_3 = 257$ ,  $p_4 = 65537$ , sont premiers. Mais le mathématicien suisse Euler établit en 1732 que  $p_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297$  n'est pas premier, et qu'il est divisible par 641 ; Legendre en 1780 montra que  $p_6$  est divisible par 274 177 et *on ne connaît explicitement aucun  $p_j$  premier pour  $j \geq 5$  !* Une telle remarque limite donc de manière inattendue la portée du théorème de Gauss, dans lequel tous les  $p_j$  apparaissant dans  $n = 2^m p_1 p_2 \dots p_k$  doivent, en plus, être des nombres premiers. Ainsi, une conjecture, même célèbre, peut très bien s'avérer être complètement fausse...

21. J.-P. Colette, *Histoire des mathématiques*, Vuibert, Paris, 1979.

22. On pourra consulter l'excellent texte de G. Verriest, *Œuvres mathématiques d'Évariste Galois*, publiées en 1897, suivies d'une notice sur Évariste Galois et la théorie des équations algébriques, Gauthiers-Villars, Paris, 1961. Cette notice fournit des éléments biographiques complets et propose une introduction historique et heuristique sans égal à la théorie de Galois, interprétée comme *processus de discernement progressif de l'indiscernabilité des racines*.

son rapport, négatif, dans lequel il mettait en doute son théorème central et déclarait ses raisonnements incompréhensibles. La rancœur de Galois fut immense, et il se jeta à corps perdu dans la lutte politique, oubliant presque entièrement ses recherches mathématiques. Emprisonné par deux fois à partir du 14 Juillet 1831, il décéda le 30 Mai 1832 des suites des blessures causées par un absurde duel dû à une obscure querelle amoureuse entre hommes pour une « midinette ». Galois s'était rendu au duel avec l'idée qu'il allait mourir et avait rédigé dans la nuit précédant le drame un testament mathématique fourmillant d'idées nouvelles que la postérité allait confirmer. On a beaucoup commenté l'importance des conceptions de Galois<sup>23</sup> et rêvé sur ce qu'il aurait pu continuer à inventer s'il n'était pas mort si prématurément.

### 3 La part de rêve et d'intuition

En définitive, les aventures de Gauss et de Galois (et d'autres), qui sont exemplaires sur le plan historique, symbolisent une part d'idéalité et de rêve dans l'activité de tous les mathématiciens, chez qui on retrouve la stupéfiante précocité d'un Victor Hugo, d'un Arthur Rimbaud, cristallisant une rêverie qui oscille entre mythe et réalité. À l'époque de Fermat, on pouvait faire des mathématiques en amateur, par passion. Au dix-huitième siècle, on pouvait « faire des mathématiques par lettres ». Au dix-neuvième siècle, on pouvait faire de l'algèbre et de la géométrie hors contexte axiomatique, hors contexte structural, avec des moyens intuitifs et heuristiques qui n'étaient pas ressaisis dans un langage aux apparences rigoureuses, bref en utilisant des méthodes à caractère « génétique » ou quasi-empiriques. Mais aujourd'hui, la virtuosité des jeunes chercheurs ne se déclare plus en moyenne avant l'âge de vingt-cinq ou de trente ans. Car aujourd'hui, il y a beaucoup à apprendre avant de commencer à chercher, aujourd'hui, les mathématiques se sont institutionnalisées et popularisées, elles se sont considérablement fortifiées, spécialisées et même raffinées à l'extrême sur le plan technique (qu'on songe à l'évolution hyper-abstraite de l'arithmétique depuis les *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss, déjà hautement techniques, et qui ont aujourd'hui près deux cent ans) et ainsi, des enjeux d'un type nouveau sont aussi apparus quant à la constitution d'un domaine que l'on peut désigner comme celui de la *recherche en mathématiques*. Mais c'est un domaine qui apparaît très mystérieux de l'extérieur et l'on se demande souvent pourquoi les mathématiques existent et comment elles peuvent exister pour ceux qui en font tous les jours.

## 5 Conditions de possibilité générales pour ce que l'on peut désigner comme la recherche en mathématiques

### 1 Trois conditions

(i) La *première condition de possibilité* de la recherche est primordiale : c'est qu'il existe des « problèmes ouverts » à résoudre et pour lesquels personne n'a idée de la solution, et plus généralement, qu'il existe des champs de « choses à faire », qu'il existe des objets à étudier, mais qui « résistent » fortement, qu'il reste à traiter des cas « difficiles », *même si* la vision de toutes ces possibilités laissées dans l'ombre demeure assez imprécise et vague, sauf peut-être pour les spécialistes, *même si* l'issue d'une recherche est très souvent imprévisible, *même si* personne, ni aucune institution ne peut prendre la responsabilité de dire que telle recherche donnera sûrement des résultats positifs. Cela peut paraître extrêmement banal, mais c'est un fait : en mathématiques, « il y a des choses à faire », « il y a du nouveau à chercher », et ces choses ne sont pas seulement de l'ordre de la répétition, de la duplication, de l'imitation, ou de l'application de mathématiques toutes faites au monde technologique et industriel.

(ii) La *deuxième condition de possibilité* de la recherche en mathématiques, c'est le rapport fondamental au monde physique et économique, comme univers d'inspiration, comme réservoir sans fin de problématiques. Il s'agit du rapport entre le monde abstrait et le monde concret, et de « l'efficacité déraisonnable » – et mystérieuse – des mathématiques dans le monde physique. Ce rapport est crucial pour le développement du monde abstrait. Le mathématicien français Joseph Fourier (1768-1830) avait défendu l'idée d'une *fécondation réciproque double* entre ces deux mondes<sup>24</sup> : « toute question physique se ramène à une recherche d'analyse mathématique et la physique est un moyen assuré de former l'analyse mathématique elle-même ».

23. « La grande portée de l'œuvre de Galois tient en somme à ce fait que sa théorie si originale des équations algébriques est une application systématique des deux notions fondamentales de groupe et d'invariant » (Sophus Lie (1842-1899), *Influence de Galois sur le développement des mathématiques*, publié dans *Le centenaire de l'École Normale 1795-1895*, Hachette, 1895.

24. *Théorie analytique de la chaleur*, Introduction, 1822.

(iii) *La troisième condition de possibilité*, pour la recherche en mathématiques, et la plus prosaïque, c'est l'attribution de moyens concrets de fonctionnement par les gouvernements, par les instances politiques : locaux, crédits, création de postes, voyages à l'étranger, renouvellements de contrats d'Unités Mixtes de Recherche, etc. Il y a environ 60 000 mathématiciens chercheurs « professionnels » dans le monde (universités, organismes de recherche, grandes entreprises, micro-informatique) et près de 6 000 en France.

Parmi les trois conditions de possibilité ainsi dégagées : l'ouverture intrinsèque des mathématiques, la fécondation par le monde physique, et l'attribution de moyens de fonctionnement, je choisirai de me limiter ici à l'exposé de quelques aspects simples et accessibles de la première<sup>25</sup>. C'est en effet l'*autonomie* du questionnement mathématique qui reste le plus difficile à saisir de l'extérieur.

## 2 La présence de questions ouvertes

En effet, ce n'est que de l'intérieur que l'on peut vraiment apprendre à voir l'importance des *questions ouvertes*, leur articulation générale les unes avec les autres, leur interdépendance, leur réciprocity et les projets et les enjeux qu'elles représentent. On entend par *question ouverte* une question mathématique qu'il est possible de formuler à partir d'une connaissance théorique précise, qui semble intéressante en elle-même, mais dont personne ne connaît la réponse. Paradoxalement, ce qui rend les mathématiques possibles, leur *ouverture intrinsèque*, demeure éternellement ce qui est le plus difficile à voir... En effet, la spécialisation et le raffinement de l'activité sont devenus tels, que dans la plupart des domaines pour lesquels existe une très longue tradition, comme l'arithmétique ou la géométrie algébrique, il est presque impossible de voir de l'intérieur les questions ouvertes, à moins d'avoir reçu une formation très rigoureuse et très longue, à moins d'avoir consacré une grande partie de sa vie presque exclusivement à la recherche, et qui plus est, dans un domaine précis et restreint. Mais néanmoins, on peut donner, à partir d'exemples classiques, un petit aperçu sur l'ouverture propre aux mathématiques, grâce à quelques « questions-phare » qui sont faciles à exprimer, mais qui sont néanmoins restées ouvertes très longtemps, ou qui le sont encore.

## 3 Équations diophantiennes

Par exemple, l'*arithmétique des équations diophantiennes*<sup>26</sup> recèle de nombreuses conjectures arithmétiques simples, faciles à exprimer, et presque « gratuites », mais qui sont la plupart très difficiles à résoudre. On appelle *équation diophantienne* la donnée d'un système d'équations polynomiales à coefficients entiers :

$$(1) \quad f(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, f_r(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

à résoudre en nombres entiers,  $x_1, \dots, x_n$ . De nombreux exemples peuvent être inventés. On sait depuis les travaux de J. Robinson, Yu. V. Matijasevic et d'autres (peu avant 1970) qu'il n'existe pas de procédure algorithmique universelle permettant de décider si une équation diophantienne possède des solutions en nombres entiers, ou n'en possède pas<sup>27</sup>.

Les équations diophantiennes les plus célèbres sont :

a. *La conjecture de Fermat* : pour  $n \geq 3$ , l'équation :

$$(2) \quad x^n + y^n = z^n$$

n'a pas de solutions en nombres entiers positifs avec  $xyz \neq 0$ <sup>28</sup>. Pour  $n = 2$ , c'est l'*équation de Pythagore*, qui admet une infinité de solutions. Dans la première moitié du XVII<sup>e</sup> siècle, Pierre de Fermat avait prétendu être en possession d'une démonstration de cette assertion, au moins pour les cas  $n = 3$  et  $n = 4$ <sup>29</sup>. Le cas  $n = 4$  fut démontré noir sur blanc par Frénicle en 1676 en utilisant la méthode de descente infinie de Fermat. Le cas  $n = 3$ , plus délicat, fut ébauché par Euler en 1774, puis précisé par Gauss. Legendre mit au point en 1823 le cas  $n = 5$  par méthode de montée infinie. Lamé en 1837 établit le cas  $n = 7$ . Puis, vers 1850, Kummer vint rafler tous les exposants premiers inférieurs à 100, sauf 37, 59 et 67, et de nombreux autres au-delà. En 1893, Mirimanoff démontra le cas  $n = 37$ . En 1968, le théorème de

25. Pour la seconde condition de possibilité, les mathématiciens possèdent tout un arsenal d'exemples montrant la nécessité d'employer des concepts venant des mathématiques les plus abstraites pour résoudre des problèmes physiques ou économiques concrets (voir *Gazette*, n°74, *ibidem*).

26. Article *Équations diophantiennes*, *Encyclopaedia universalis*, 1997.

27. Ce fut la solution *négative* au dixième problème de la liste des 23 problèmes proposés par Hilbert lors de sa conférence au *Congrès International des Mathématiciens* de 1900, et qui eut une si profonde influence sur le développement des mathématiques au XX<sup>e</sup> siècle.

Fermat était démontré pour tous les nombres premiers jusqu'à 125 000 et d'autres au-delà. Mais ce n'est qu'en 1993-1995 que le mathématicien britannique Andrew Wiles obtint des résultats qui impliquaient le théorème pour tous les nombres  $n \geq 3$ .

b. *L'équation de Pell-Fermat*:

$$(3) \quad x^2 - dy^2 = 1,$$

où l'on suppose  $d$  sans facteur carré, qui possède une infinité de solutions.

Par extension, on appelle aussi *équation diophantienne exponentielle* une équation dans laquelle les exposants figurent parmi les inconnues.

c. La plus fameuse de ce type est l'*équation de Catalan*:

$$(4) \quad x^m - y^n = 1,$$

à résoudre en entiers  $(x, y, m, n)$  au moins égaux à 1. Catalan (1814-1894) affirmait qu'elle n'admettrait pas d'autres solutions que  $3^2 - 2^3 = 1$ . En 1976, R. Tijdeman a montré que l'équation de Catalan n'a qu'un nombre fini de solutions, et n'en avait aucune au-delà d'un certain rang, mais en donnant une borne véritablement colossale: il n'y a plus de solutions pour  $x^m > \exp \exp \exp 250$ . Après le résultat de Tijdeman, la vérification de la conjecture de Catalan était ainsi réduite à un nombre *fini* – mais très grand – de calculs. Malheureusement, cette borne se situe bien au-delà des limites de calcul – par vérification mécanique au cas par cas – que possèdent les plus puissants ordinateurs actuels ou futurs. Un vide énorme subsiste donc entre cette borne, et ce que l'on sait atteindre par une vérification mécanique de la conjecture de Catalan pour des entiers  $x, y, m, n$  bornés. Et ce vide constitue peut-être une figure originale et paradoxale – bien que transitoire<sup>30</sup> – de l'infini potentiel: l'infini, ce ne serait pas l'infini illimité, ce serait un infini limité qui se situerait dans l'entre-deux entre le calcul accessible par ordinateur et ce qui est inaccessible à ce dernier, *pour de simples raisons de taille physique indépassable, actuellement ou dans l'avenir*.

#### 4 Conclusion

Ainsi, il existe quelques questions ouvertes sur lesquelles des générations de chercheurs se sont acharnées avant qu'une solution complète et satisfaisante ne soit apportée. Certaines sont toujours ouvertes. Il faut dire que l'intérêt pour les questions arithmétiques n'est pas partagé par tous les mathématiciens. Vladimir I. Arnold n'écrivait-il pas, à propos du théorème de Fermat-Wiles: « Il est clair que non seulement cela ne provoque pas une grande admiration pour la mathématique, mais qu'au contraire cela suscite des doutes sur la nécessité de tels efforts (comparables à l'escalade de rochers difficiles) pour résoudre des problèmes exotiques dont on peut se demander à qui et à quoi ils vont servir. »<sup>31</sup> Heureusement, il existe des questions arithmétiques qui exigent de l'escalade de très haut niveau et que tout mathématicien reconnaîtra « utile au premier degré ». Par exemple, la question la plus importante depuis près d'un siècle et demi, celle dont la réponse aurait le plus de retombées et de corollaires, non seulement en arithmétique, mais dans de nombreuses autres branches des mathématiques, est la conjecture dite de Riemann sur les zéros de la fonction *zeta*<sup>32</sup>. Mais il existe plus généralement de nombreuses catégories de questions ouvertes, plus ou moins locales, particulières, techniques et spécialisées. En général, les domaines précis des mathématiques, comme l'algèbre différentielle, la topologie algébrique ou les équations aux dérivées partielles, sont tendus vers l'étude de multiples objets complexes que l'esprit interroge sans relâche. Il serait difficile d'en parler sans rentrer dans les détails, ce qui demande une formation spécifique à chacun de ces domaines, mais nous pouvons d'ores et déjà conclure que les mathématiciens s'immergent dans les questions ouvertes,

28. Sur la conjecture de Fermat, et la démonstration de Wiles-Taylor, voici quatre références, classées par ordre d'accessibilité: (1) Amir D. Aczel, *L'énigme du théorème de Fermat*, Desclée de Brouwer, 1998. (2) Yves Hellegouarch, *Fermat vaincu!*, Quadrature, n°22 (1995); (3) Catherine Goldstein, *Le théorème de Fermat enfin démontré*, La Recherche, Numéro hors-série, *L'Univers des nombres* Août 1999; (4) Yves Hellegouarch, *Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles*, Masson, Paris, 1997.

29. Dans les marges des *Arithmétiques* de Diophante, Pierre de Fermat aurait écrit ces lignes qui allaient devenir une énigme légendaire: « Il n'est pas possible de décomposer un cube en somme de deux cubes, une puissance quatrième en somme de deux puissances quatrièmes et généralement aucune puissance, d'exposant supérieur à 2 en deux puissances de même exposant ». En vérité, on ne connaît aucune trace de ces démonstrations. Presque tous les théorèmes de Fermat étaient donnés sans démonstration, car il était d'usage de proposer ses découvertes à la sagacité de ses interlocuteurs, par un jeu d'émulation témoignant d'une concurrence très vive, notamment entre géomètres anglais et géomètres français.

30. jusqu'à ce qu'une démonstration nouvelle plus puissante, abaissant considérablement la borne limite, ne soit découverte.

que c'est ce qui rend leur activité possible et que leur travail « pour l'honneur de l'esprit humain » répond lui aussi à une demande sociale d'élévation de l'esprit.

## 6 *Se maintenir disponible face à l'imprévisible et lui réserver une place de choix*

La troisième condition de possibilité est la plus paradoxale – ce qui explique qu'il soit possible d'en jouer facilement comme le fit Claude Allègre qui souhaitait « brader » les mathématiques, et d'autres choses. Car les dispositifs institutionnels – universités, organismes de recherche, ministères – se trouvent confrontés à un problème apparemment insoluble : *programmer l'inventivité, prévoir l'imprévisible, contraindre l'invention à être inventive*. Le paradoxe est de taille... , c'est presque une aporie. Il s'agit de préserver un *maintien de disponibilité face à la surrection de l'événement et de la découverte*. Et l'installation dans la durée, dans l'indétermination, dans l'indécision et dans l'hésitation semble nécessaire. Sinon, la recherche, qui demande du temps, serait abandonnée avant d'être commencée. En définitive, il semble que la recherche soit redevable d'une *confiance dans la puissance de construction à long terme qu'offrent le temps et la durée*. Ainsi, le financement des institutions de recherche tient compte intrinsèquement de la durée. Et l'idéal serait de *prendre sans cesse des dispositions nouvelles pour réanimer le sens de l'inventivité à long terme*<sup>33</sup>. Mais aucun argument philosophique, politique ou technocratique ne peut étayer la nécessité de cette disponibilité : on sait seulement que de telles dispositions, décidées à un niveau politique, sont favorables à la réussite scientifique. Le rôle de l'État et des institutions est bel et bien de *garantir et promouvoir* la possibilité et la mobilité de l'inventivité contre certaines forces puissantes (le marché, le profit à court terme, la rentabilité des capitaux) qui vont en sens inverse. On comprend alors rétrospectivement combien ont pu paraître ineptes et dégradants les propos de Claude Allègre, qui pouvaient être interprétés à juste titre comme une volonté de faire jouer ces forces puissantes contre les forces de l'esprit et de les faire jouer, sans mobile apparent, contre certains pôles d'excellence en France (littérature, mathématiques, physique des particules).

## 7 *Le travail de réécriture, l'évaluation, la réception et l'acceptation d'un résultat par la communauté*

Près de quatre-vingt dix pour-cent du temps de l'activité en mathématiques est consacré à réécrire des textes, des articles et des livres : réécriture de ses propres manuscrits, simplification et réécriture de théorèmes connus, réécriture de livres, ajouts de chapitres, réorganisation du plan d'un livre, *etc.* Par exemple, la rédaction de chacun des fascicules du célèbre traité *Éléments de mathématique* de Bourbaki<sup>34</sup> se faisait en général en sept ou huit fois. Une première rédaction était confiée à l'un des membres de Bourbaki. Cette première version était alors *lue à haute voix* lors d'un congrès, comme test, elle était alors impitoyablement critiquée par les autres membres, et ensuite, la rédaction d'une deuxième version était confiée à un autre membre, plus ou moins choisi au hasard, jusqu'au prochain congrès... et ainsi de suite jusqu'à ce que le processus converge, parfois par lassitude, vers une septième ou huitième version unanimement acceptée et prête à la publication.

*C'est le choix d'une personne différente pour chaque rédaction successive et la lecture critique en commun qui ont fait la force du procédé d'écriture du groupe Bourbaki.* L'intersubjectivité, gage de rigueur, est essentielle : elle offre des possibilités de reconstruction et d'amélioration sans égal. Dans la recherche mathématique contemporaine, la relecture et la réécriture occupent aussi une place centrale pour la stabilisation et la reconnaissance des résultats.

Lorsqu'un chercheur a longtemps travaillé sur un sujet et obtenu des résultats qu'il juge satisfaisants, sans erreur et dignes d'être publiés, il *soumet* son manuscrit à une revue, à un journal, un peu comme un écrivain, célèbre ou inconnu, soumet un roman aux Éditions du Seuil. Dans ce dernier cas, un comité de rédaction examine, le plus souvent lors d'une réunion commune, la valeur du travail soumis. Mais

31. V. I. Arnold, *Sur l'éducation mathématique*, Gazette des mathématiciens, n°78 (1998), pages 19-29.

32. Pour une présentation divertissante, cf. Keith Devlin, *Mathématiques, un nouvel âge d'or*, Chapitre 9, Masson, Paris, 1992.

33. D. Lecourt, *Le conformisme dans la recherche scientifique et technique*, L'aventure humaine, n°2, Mai-Juin 1995, 52-56, Association Diderot Éditeur, Paris.

34. Sur Bourbaki, je recommande vivement la lecture de Maurice Mashall, *Bourbaki, une société secrète de mathématiciens*, Pour la Science, collection « Les génies de la science », (hors-série), Fév-Mai 2000. *L'Univers des nombres*, La Recherche, Hors-série, n°2, Août 1999.

chez les mathématiciens, la technicité du travail et la spécialisation, font que peu de gens peuvent lire les travaux soumis. D'où la nécessité de confier ce travail à des *rapporateurs* (*referees*, en anglais) spécialisés dans la même discipline, et qui sont le plus souvent des *concurrents directs* de la personne qui soumet son travail, ou des mathématiciens établis qui ont peu de temps à consacrer à une lecture très attentive du travail soumis et qui distribuent le travail à leurs élèves. Il faut savoir que l'examen précis d'un article peut demander plus de cinquante heures de travail. Il y a essentiellement deux règles de sélection : la première, facile à respecter, c'est que le travail puisse être jugé intéressant, digne de publication et fécond par la suite. Sur ce point, une opinion rapide peut être émise. La seconde, plus difficile à suivre, c'est que le travail en question soit juste, exempt de toute erreur, parfaitement prêt pour la publication. Alors il faut entrer dans le détail. C'est le cas lorsqu'un résultat important, comme la solution à la conjecture de Fermat, est annoncé. Si quelque chose de vraiment nouveau a été inventé sur le plan conceptuel, le délai d'attente peut devenir très long. Par exemple, le premier manuscrit de Galois (*cf. supra*), avait été égaré par Fourier. Poisson ne réussit pas à comprendre le second, long d'un quinzaine de pages seulement, et il écrivit un rapport négatif en Juillet 1831, au bout de... six mois ! En fin de compte, il fallut attendre le travail de Camille Jordan (1838-1922) dans son *Traité des substitutions* (1870), plus de trente ans plus tard, pour que l'ampleur des conceptions de Galois fût dévoilée. Si quelque chose de vraiment nouveau sur le plan technique a été inventé, le délai de vérification des détails techniques peut être aussi très long. Souvent, les rapporteurs mettent presque un an à « épulcher » un article. Car il leur faut *lire seul et sans explications informelles* un travail où tout a été compressé. Contrairement aux mémoires de mathématiques du dix-huitième et du dix-neuvième siècle, les écrits mathématiques contemporains sont en effet écrits dans un style *ultra-compact*, qui est le fruit de réécritures et de simplifications extrêmement nombreuses. En voici trois exemples.

a.<sup>35</sup> En Juillet 1993, lors d'une conférence sur la théorie des nombres organisée par son ancien directeur de thèse John Coates, Andrew Wiles annonçait qu'il était en mesure de démontrer une partie importante de la conjecture de Shimura-Taniyama-Weil, partie qui suffirait pour établir la fameuse conjecture de Fermat. Tous les grands noms de la théorie des nombres étaient présents. Wiles était engagé depuis Mai 1993, date à laquelle il eut une idée qui permettait de débloquent une situation délicate, dans une course contre la montre pendant laquelle il rédigea un manuscrit de plus de deux cents pages, qu'il termina juste avant de prendre l'avion pour la conférence. Vint ensuite le moment de soumettre ce travail à la critique. Les deux cent pages furent donc envoyées à plusieurs chercheurs éminents dans le domaine de la théorie des nombres. Et Katz, amis de Wiles à Princeton, buta sur un problème à première vue anodin, mais que Wiles ne parvint pas à fixer. Parallèlement, de nombreux mathématiciens dans le monde étaient parvenus à la même conclusion. Alors la démonstration s'écroula comme un château de cartes. Le 4 décembre 1993, Wiles finit par annoncer publiquement que son manuscrit ne devait plus être distribué comme prépublication et qu'il espérait corriger l'erreur lors de son prochain cours à Princeton en février 1994. Mais ce n'est qu'en septembre 1994 que Wiles réussit à combler le trou laissé dans sa démonstration, en utilisant la *théorie horizontale d'Iwasawa*, qui lui était familière depuis sa thèse...<sup>36</sup>.

b.<sup>37</sup> Il y a près de quarante ans, René Thom avait formulé une conjecture, dite *conjecture du gradient*, sur les tangentes à la trajectoire d'une courbe intégrale d'un champ de vecteurs à coefficients polynomiaux. Soit  $P(x) = P(x_1, \dots, x_n)$  un polynôme à  $n$  variables (ou une fonction analytique). On considère les trajectoires de l'équation différentielle d'ordre un  $dx(t)/dt = \nabla P(x(t))$  où  $\nabla P(x) = (\partial P/\partial x_1, \dots, \partial P/\partial x_n)$  est le *gradient* de  $P$ , et  $t \in \mathbb{R}$ . En supposant que la solution existe pour tout  $t \geq 0$ , on démontre<sup>38</sup> que la limite  $\lim_{t \rightarrow 0, t > 0} x(t)$  existe toujours dans l'espace à  $n$  dimensions  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $x_0$  cette limite. Thom

avait conjecturé que, de plus, la limite des *sécantes*  $\lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{x(t) - x_0}{|x(t) - x_0|}$  existe toujours elle aussi. Cette conjecture constituait le dernier problème ouvert de la théorie classique des ensembles algébriques<sup>39</sup>. Deux mathématiciens polonais, C. Kurdyka et T. Mostowski, ont annoncé en 1996 une solution à cette conjecture, dans un article touffu, de près de soixante pages, que très peu de spécialistes ont réussi à lire. Deux ans après, A. Parusinski s'est joint à ce travail, l'a lu, et l'a considérablement simplifié. Une nouvelle version, longue de dix-neuf pages de pages seulement, a alors circulé à partir de 1999, et paraîtra bientôt aux *Annals of Mathematics*.

35. *cf.* Amir D. Aczel, *op. cit.*

36. Par un éclair de génie que Wiles date du 19 Septembre 1994 : « Cela a été le moment le plus important de toute ma vie de recherche. Brusquement, de façon tout à fait inattendue, j'ai eu cette incroyable révélation... quelque chose qui ne m'arriverait plus jamais ».

37. K. Kurdyka, T. Mostowski and A. Parusinski, *Proof Gradient Conjecture of R. Thom*, Preprint 1996 et 1999.

38. En utilisant l'inégalité dite de Lojasiewicz.

39. *cf.* S. Lojasiewicz, *Sur la géométrie semi- et sous-analytique*, Annales de l'Institut Fourier, n°43, 1993, 1575-1595.

c.<sup>40</sup> Voici un troisième exemple très spectaculaire de réécriture d'un théorème mathématique. En 1916, le mathématicien allemand Bieberbach<sup>41</sup> avait conjecturé que tous les coefficients  $a_n$  d'une fonction holomorphe  $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ ,  $z = x + iy$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , définie et *univalente*<sup>42</sup> dans le disque unité  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  satisfont l'inégalité  $|a_n| \leq n$ , et que cette inégalité est optimale. Près de mille articles avaient été publiés sur ce sujet jusqu'à ce qu'en 1984, le mathématicien américain Louis de Branges apporte une solution, qui est restée célèbre dans les annales. En Avril 1984, de Branges se rendit exprès à Leningrad, pour visiter les spécialistes russes de ce domaine qu'on appelle la *théorie géométrique des fonctions de variable complexe*, muni d'un manuscrit énorme de... trois cents quatre-vingt-cinq pages typographiées ! Dans ce projet de livre, de Branges élaborait toute une nouvelle théorie d'analyse fonctionnelle entièrement orientée vers une démonstration finale de la conjecture de Bieberbach dans le dernier chapitre. Il exposa sa preuve aux membres du séminaire de Leningrad, Emeljanov, Kamoskii, Kuz'mina, Milin, Goluzina et d'autres, qui avaient d'abord accueilli la nouvelle avec méfiance et circonspection, mais qui bientôt furent convaincus de la véracité de la preuve. Que firent-ils alors ? Eh bien, ils *récrivirent en cachette* de nombreux passages de la preuve, en la traduisant dans leur langage et en essayant d'éviter tout recours à cette « théorie » nouvelle d'analyse fonctionnelle que De Branges avait bâtie. Tant et si bien qu'à la fin du séjour de De Branges, ils lui proposèrent avec insistance de publier seulement une version résumée de cette preuve dans le langage classique qu'ils utilisaient. Il fallut convaincre de Branges, qui refusa d'abord de jeter tout son livre aux oubliettes, mais il finit par être convaincu de l'intérêt de publier une preuve courte et élégante, que les Russes avaient considérablement simplifiée, et ils décidèrent d'un commun accord de faire un preprint à Leningrad, qui fut publié ensuite dans le journal suédois, *Acta Mathematica*. En définitive, les concurrents directs de de Branges, ses interlocuteurs principaux, l'ont ni plus ni moins forcé à réécrire son théorème avant qu'il ne soit publié !

## 8 Épilogue

Ces trois derniers exemples montrent parfaitement l'importance des interactions, des échanges, de l'intersubjectivité et de la réécriture dans la recherche mathématique contemporaine : jeu de renvois spéculaires entre la production d'un résultat et sa réception par la communauté scientifique. Ces pratiques sont aussi un *travail* collectif, et la stabilisation des résultats se construit lentement dans le temps, car le temps de la recherche est très extensible. À cause des simplifications et de la réécriture, le délai entre une découverte et sa publication peut parfois dépasser cinq ans (Section 7 **b supra**). Et les communautés de spécialistes, ces « îles mathématiques » autonomes, qui sont multiples et nombreuses, ont elles aussi comme d'autres communautés une vie propre, ce sont des « collègues insulaires » dans l'immensité du monde mathématique, des collègues qui s'ouvrent sur le possible par certaines lucarnes vitales dont seuls les spécialistes reçoivent l'infime lumière qui leur permet de progresser. Par exemple, la théorie des nombres est organisée comme un grand archipel, comprenant les îles dans lesquelles Wiles et ses collaborateurs évoluent (Section 7 **a**). De même, l'étude des propriétés métriques, différentielles et topologiques des ensembles algébriques ou sous-analytiques est une autre « île mathématique », dont les habitants vivent notamment en France, en Pologne, aux États-Unis (Section 7 **a**), *etc.* On ne peut donc que louer l'ingéniosité de Swift, qui regroupait tous les mathématiciens sur une île quasi-céleste mise en lévitation sur le monde, à ceci près qu'aujourd'hui, plusieurs îles, liées par des fils plus ou moins ténus, voguent en apesanteur, pareilles à de véritables archipels dans un océan d'inconnu.

Mais dans cette structure en archipel, où certaines îles naissent brusquement comme des volcans en mer, et d'autres ne cessent de s'enrichir par le travail patient de leurs habitants, il devient difficile pour une seule conscience de continuer à saisir l'*unité des mathématiques*, qui demeure pourtant essentielle. Et on s'entretient beaucoup, entre mathématiciens, sur les effets limitants de la « compartimentation » entre les domaines de recherche, car l'histoire a montré que de grandes idées naissent souvent d'un rapprochement théorique fécond entre deux ordres indépendants de pensée, par exemple entre l'algèbre et la géométrie depuis le livre fondateur *La Géométrie* de Descartes (Leyde, 1637), puis dans un mémoire de Dedekind-Weber (1882) reconstituant *algébriquement* la théorie des surfaces de Riemann, et dans les *Éléments de géométrie algébrique* de Dieudonné-Grothendieck (1960-70), *etc.* En définitive, le monde mathématique

40. La connaissance de la théorie des fonctions holomorphes n'est pas nécessaire à la bonne compréhension de ce paragraphe.

41. Une fonction holomorphe est dite *univalente* si elle est injective : *unus*, un ; *valente*, valeur ; elle ne prend qu'une seule fois une valeur donnée.

42. cf. O. M. Fomenko and G. V. Kuz'mina, *The last 100 days of the Bieberbach conjecture*, The mathematical intelligencer, vol. 8, n°1, 1996, 40-47.

est très vaste, il ne cesse de s'étendre. Mais le plus important dans ce monde, c'est la présence et l'existence de *questions ouvertes*, inscrites dans le *temps de la recherche* (historique, collectif et individuel) et dont on ne perçoit l'ampleur et tout l'éveil qu'elles suscitent que de l'intérieur. Finalement, la nostalgie que l'on a d'une époque révolue où pouvaient exister des hommes de science universels ressemble à un aveu d'impuissance : aujourd'hui, il devient de plus en plus impossible à une conscience de s'installer dans un intérieur encyclopédique lui permettant de *voir* l'unité des mathématiques, et donc de *voir* ce qui manque à cette unité, c'est-à-dire *l'ouverture de l'unité* et toutes les possibilités inexplorées de rapprochement qui en découlent.

Enfin, on aurait pu parler plus longuement de la nécessité pour un chercheur de s'isoler et d'accepter la souffrance, l'échec, l'inquiétude, et le fait de « sécher » longtemps sur une question. Tous ces éléments d'incertitude entrent pour une part importante dans la vie d'un mathématicien. À ce sujet, l'académicienne Michèle Vergne déclare que l'insatisfaction et l'exigence l'ont toujours forcée à continuer : « Comprendre quelque chose de nouveau est un intense bonheur. Je voudrais aussi mentionner les longues périodes de vide, où mon jugement sur mes capacités se fait sévère. Cette alternance douloureuse entre satisfaction éphémère et doute total m'a toujours forcée à travailler. »<sup>43</sup>

---

43. *Discours et Notices biographiques*, Paris, Institut de France, tome I, 1997-1998, pp.115-118.

## Côté d'un nombre

André LAURENT

« Côté de  $N$  » : c'est ainsi que les Chinois, dès le 1<sup>er</sup> siècle, désignaient la racine carrée d'un nombre  $N$ , entier ou fractionnaire. Nous verrons plus loin comment ils calculaient ce « côté », avec... des baguettes !

### 1 Rappel

Dans le N° 2 de notre bulletin régional, j'ai relaté<sup>1</sup> comment les Chinois utilisaient de simples baguettes de bambou pour compter, effectuer les quatre opérations et résoudre des problèmes. Les nombres étaient représentés dans un système de numération décimal de position (même si, pour éviter les confusions de lecture, on disposait de deux séries de chiffres : l'une destinée aux unités de rang pair, l'autre aux unités de rang impair) :

Chiffres des unités, des centaines, etc.								
I	II	III	IIII	IIIII	⊥	⊥⊥	⊥⊥⊥	⊥⊥⊥⊥
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffres des dizaines, des mille, etc.								
—	=	≡	≡≡	≡≡≡	⊥	⊥⊥	⊥⊥⊥	⊥⊥⊥⊥

Pour écrire les nombres, on disposait les baguettes sur des damiers à calcul, ou *Suan Pan*.

Exemples :

=	II	II	=	II	=	II	=	II
22		222			2222			

Une unité absente était représentée par un vide :

=		II		II	=			II
20		202			2002			

<sup>1</sup>Des baguettes pour compter, Aix Marseille Vert N° 2 (Avril, Mai, Juin 2000).

## 2 Repères historiques

L'usage des baguettes pour compter est apparu à l'époque des *Printemps et Automnes* (770 – 476 av. J.-C.). Vers 200 av. J.-C., on commence à effectuer les quatre opérations, puis à résoudre des problèmes, toujours avec des baguettes.

Les premiers écrits mathématiques connus datent de la dynastie des *Han* (de 202 av. J.-C. jusqu'en 220). De cette époque est issu le grand classique de la tradition mathématique chinoise : *Les neuf chapitres sur les procédures mathématiques*. Il s'agit d'un résumé des savoir-faire de ce temps, qui a servi de référence pendant près d'un millénaire. Au chapitre quatre de ce traité, on trouve un algorithme de calcul du « côté d'un nombre » : c'est dire que, dès le début du 1<sup>er</sup> siècle, on savait, en Chine, extraire la racine carrée d'un nombre. Nous allons voir cela d'un peu plus près.

## 3 Racine carrée de 126 736

### 3.1 Présentation et première étape

La représentation de 126 736 dans un *Suan Pan* était accompagnée d'un repère en deuxième ligne, pour indiquer le rang des chiffres au cours des calculs :

—		⊥	π	≡	⊤

Dans la première étape du calcul, on décalait le repère de deux rangs en deux rangs vers la gauche :

—		⊥	π	≡	⊤
		←	←	←	←

### 3.2 Deuxième étape

On recherche la racine carrée entière de 12, soit 3, qu'on place en haut de la tablette, au rang des centaines. Son carré 9 est placé au-dessus du repère :

—		⊥	π	≡	⊤

On fait ensuite la soustraction  $126736 - 90000 = 36736$ , et on remplace le nombre initial par ce résultat (2<sup>e</sup> ligne). On place ensuite le double du premier chiffre 3 de la racine (soit 6) au-dessus du repère, puis on décale comme indiqué dans le deuxième tableau (noter le changement du chiffre 6, dû au passage à l'unité de rang inférieur) :

		III		
III	⊥	π	≡	τ
τ				
I				

		III		
III	⊥	π	≡	τ
→	⊥			
→	→	I		

### 3.3 Troisième étape

On effectue maintenant les calculs sur les nombres marqués par le repère : 367 en 2<sup>e</sup> ligne, 60 en 3<sup>e</sup> ligne. On recherche le plus grand entier  $d$  tel que  $d^2 + 60d \leq 367$ . On place cet entier 5 en haut de la tablette, comme chiffre des dizaines de la racine. Dans les résultats intermédiaires, au-dessus du repère, on place  $60 \times 5 = 300$  (3<sup>e</sup> ligne), et  $5^2 = 25$  (4<sup>e</sup> ligne) :

		III	≡	
III	⊥	π	≡	τ
III				
	=	IIII		
		I		

### 3.4 Quatrième étape

$36736 - (30000 + 2500) = 4236$  : comme dans la 2<sup>e</sup> étape, on place ce nombre en 2<sup>e</sup> ligne, puis on double la racine ( $35 \times 2 = 70$ ) et on recommence les décalages :

	III	≡	
≡	II	≡	τ
⊥			
	I		

	III	≡	
≡	II	≡	τ
→	⊥		
	→	→	I

### 3.5 Dernière étape

On cherche le plus grand entier  $u$  tel que  $u^2 + 700u \leq 4236$ . On place cet entier 6 en haut de la tablette, comme chiffre des unités de la racine. Les résultats intermédiaires sont ici  $700 \times 6 = 4200$  (3<sup>e</sup> ligne), et  $6^2 = 36$  (4<sup>e</sup> ligne) :

	III	≡	T
≡	II	≡	T
≡	II		
		≡	T
			I

On remarque que  $4236 - (4200 + 36) = 0$ , ce qui signifie que 356 est la racine carrée exacte de 126 736 .

## 4 Justification

Dans *Les neuf chapitres*, l'algorithme de calcul du « côté d'un nombre » était donné sans aucune justification : on ne s'intéressait qu'au savoir-faire. Il est cependant aisé de comprendre ce qui se passe :

La racine carrée de 126 736 peut s'écrire  $100c + 10d + u$ , où  $c$  est le chiffre des centaines,  $d$  celui des dizaines et  $u$  celui des unités. On a alors :

$$126736 = (100c + 10d + u)^2 = 10000c^2 + 100d^2 + u^2 + 2000cd + 200cu + 20du$$

Après avoir trouvé  $c = 3$ , il vient :

$$126736 - 90000 = 36736 = 100d^2 + 6000d + 600u + 20du + u^2$$

Nous voici au début de la troisième étape. Après avoir trouvé  $d = 5$ , les calculs se simplifient encore :  $36736 = 2500 + 30000 + 600u + 100u + u^2$

$$4236 = 700u + u^2.$$

Il est alors immédiat que  $u = 6$ .

Pour terminer, on comparera cet algorithme à celui que les plus anciens d'entre nous ont pratiqué en d'autres temps, et que je reproduis ci-contre sans autre commentaire :

126736	356
-90000	65 × 5 = 325
36736	706 × 6 = 4236
-32500	
4236	
-4236	
0	

# ***Association des Professeurs de Mathématiques Régionale d'Aix-Marseille***

La régionale de l'APMEP d'Aix-Marseille a le plaisir de vous convier à sa journée régionale. Notre réflexion portera sur l'évolution des mathématiques que nous enseignons : évolution des pratiques mais aussi des contenus, en partie liée à l'évolution des mathématiques elles-mêmes.

Cette annonce est aussi une convocation à l'assemblée générale annuelle statutaire de l'association.

**Samedi 25 mai 2002**

**Journée régionale de l'APMEP**

**à l'IUFM d'Aix-Marseille, site de la Canebière**

Programme :

**9h : Accueil**

**9h 30 : Conférence de Christian Mauduit**

*Discret et continu : quelles places respectives dans les mathématiques d'aujourd'hui ?*

**11h : Assemblée générale de la Régionale d'Aix-Marseille**

**12h15 : Repas** (réservation à l'accueil)

**14h15 : Atelier** (en deux plages : 14h.15 - 15h.45 et 16h. - 17h.30 inscriptions à l'accueil)

**A 1 / André Bonnet** : Un exemple de la place grandissante des applications dans les nouveaux programmes : une nouvelle vision de la fonction exponentielle à partir de la radioactivité, du problème du tonneau ou du refroidissement du biberon...

**A 2 / Roland Chiavassa** : Probabilités continues, la loi exponentielle et la modélisation de nombreux phénomènes : désintégration d'un atome radioactif, pannes ... et une loi plus générale, la loi de Weibull.

**A 3 / Bernard Egger** : Réflexions sur l'utilisation en classe des TICE, avec, en application quelques idées pour les nouveaux programmes de lycée.

**A 4 / Dominique Proudhon** : Présentation de la brochure de l'IREM (en préparation) sur les graphes, en particulier application des graphes aux probabilités.

## **La rencontre lycées-université à la faculté des sciences de Luminy.**

*Une assistance nombreuse a assisté à ces rencontres organisées par des enseignants de la faculté des sciences de Luminy, et par les IPR de mathématiques. Beaucoup d'enseignants ont fait le déplacement depuis le Nord de l'académie.*

*L'attente de nouvelles perspectives, de la part des professeurs du secondaire, était sans doute forte, chacun espérant voir le fossé qui sépare la terminale de l'Université se combler un peu plus. Mais il a bien fallu constater que chacun reste sur ses positions et se renvoie la balle, aussi bien du côté des initiateurs de programmes de lycées, que du côté des enseignants universitaires.*

*Nous publions ci-dessous un résumé des principales interventions et quelques uns des thèmes des débats qui ont suivi.*

### **Pourquoi cette rencontre?**

Étant donné le dépeuplement des filières scientifiques, et l'inquiétude qui en résulte, deux questions se posent:

1. Quelle est la mission de l'Université? Est-ce de transmettre un savoir et lequel?
2. Peut-on améliorer la situation, et comment?

Pour tenter de répondre à ces questions, la rencontre s'orientera autour d'exposés suivis de débats, dont nous rendrons brièvement compte ici.

En préliminaire, MARTINE LEWILLON, IPR, nous apporte quelques informations concernant des projets en cours d'étude:

- Revisite de toutes les filières scientifiques qui se dépeuplent..
- Réduire la rupture entre lycées et Université.
- Projet de rénovation des prépas avec un premier trimestre d'adaptation.
- Traiter le problème de la fuite vers les IUT.

### **Comment réussir un cursus universitaire? (A. BROGLIO)**

L'étudiant doit arriver à l'Université avec un projet professionnel et doit accepter l'idée que les études demandent beaucoup d'investissement en travail personnel.

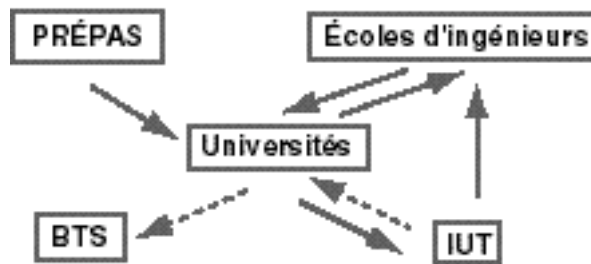
Pour l'aider, des améliorations ont été apportées:

- Pas d'amphis surchargés.
- Des salles d'informatique en libre accès.
- Un suivi du travail des étudiants principalement à travers des colles de maths, une évaluation en TD partiels, la pratique des mathématiques assistées par ordinateur.
- Des choix de cursus à la carte.
- Des propositions de pluridisciplinarité en liaison avec l'économie, la biologie, la physique, l'informatique, les sciences sociales.

De multiples passerelles existent, et une double compétence est encouragée.

### **Sur la diversité des cursus universitaires (A. PICHON)**

Les passerelles entre les différentes formations post-bac sont nombreuses, mais à perméabilité variable.



Ainsi,

- Il n'y a pas de passerelle entre BTS et Université pour un élève moyen.
- Il est en général peu réaliste d'entrer à l'Université en sortant d'un IUT.

Par contre entre classes préparatoires, écoles d'ingénieurs et universités, de nombreuses possibilités existent ☐

- À l'entrée en classe préparatoire, il est recommandé de pratiquer la double inscription fac-classe prépa, pour bénéficier d'examens spécifiques permettant de valider la première année.
- Après une année de prépas, on peut aussi entrer sur dossier en seconde année de DEUG.
- Après deux années de prépas et échec aux concours, on a la possibilité d'entrer sur dossier en année de licence.
- Après le DEUG, un étudiant peut intégrer une école d'ingénieurs sur concours.
- Dans l'autre sens, l'Université accueille des étudiants d'écoles d'ingénieur qui désirent préparer un DEA ou une thèse.

### **De l'utilité des mathématiques (J.L. MALTRET)**

Certains vous diront que les maths, c'est beau, c'est amusant et c'est utile, pendant que d'autres au contraire ne voient dans les mathématiques qu'une discipline austère et incompréhensible, un instrument de sélection et au mieux une trousse à outils pour les autres sciences.

En fait dans l'enseignement supérieur, 60% des mathématiques sont des maths de service. Faut-il faire des maths « Pour les maths » ? Les mathématiciens vous répondront que les questions gratuites apportent des réponses à des questions qu'on ne se posait pas.

Les domaines d'application des mathématiques sont multiformes ☐

- Dans la recherche on demandera une capacité à modéliser, à formaliser, à proposer des solutions en physique, chimie, mécanique, biologie finances.
- L'utilisation des moyens informatiques permettra de proposer des outils de simulation et de sécurisation (cryptographie, codage).

Enfin les mathématiques assureront aux étudiants de nombreux débouchés ☐

1. Soit à partir d'une formation mathématique monodisciplinaire ☐
  - a. L'enseignement (ne pas oublier que dans les années à venir le nombre de postes à pourvoir se conjugue avec une diminution du flux d'étudiants).
  - b. Les concours administratifs (comme les impôts ...).
  - c. Les écoles d'ingénieurs.
2. Soit à partir d'un cursus transverse ☐
  - a. Informatique (logique et mathématiques discrètes).
  - b. Simulation (mécanique, physique).
  - c. Sciences sociales (statistiques, analyse de données et prévisions).

## **Les débats.**

Nous ne mentionnons que quelques thèmes significatifs qui ont résulté des discussions ayant suivi chaque exposé.

### **Trois raisons de choisir les études scientifiques**

1. La nécessité de structurer sa pensée pour la rendre plus rapide, dans un monde où tout va vite, est essentielle.
2. Les sciences, et les maths en particulier, sont le moteur du développement économique de la planète.
3. Avec un bac+5 scientifique, on devient plus souvent cadre qu'avec un diplôme de lettres ou de droit équivalent.

### **Les difficultés au niveau du lycée**

Elles proviennent de plusieurs causes les élèves butent très vite sur la moindre difficulté technique les exemples concrets, qui aideraient à la motivation, sont souvent longs et difficiles à mettre en œuvre.

Est-ce que l'introduction des statistiques et de l'informatique peuvent aider à résoudre ces problèmes

La nécessité de bien définir les compétences à développer chez les élèves devient indispensable.

Le manque de volonté devant l'abstraction et l'effort de recherche devient général les élèves, comme les étudiants, s'arrêtent à la première difficulté. Cette constatation, qui se partage avec d'autres disciplines (comme la philosophie), semble être un problème de société lié à la culture actuelle.

### **Un constat bien pessimiste ...**

Si on lit le rapport DEMAILLY (août 2001) « nous ne formons pas assez de scientifiques, le niveau baisse, l'acquisition fiable des techniques et des savoirs fondamentaux n'est pas assurée... »

On peut en rechercher les causes de différents côtés

- Dans la volonté de démocratisation de l'enseignement entraînant l'accroissement des effectifs et qui nécessiterait une augmentation des moyens nécessaires.
- Dans la volonté d'égaliser les chances, qui entraîne l'uniformisation et la réduction des exigences.
- Dans un certain laxisme des orientations.
- Dans la réduction des horaires consacrés aux mathématiques.
- Dans certains choix pédagogiques (disparition du raisonnement, diminution des exigences de technicité etc.).