

Triangles et quadrilatères inscrits dans un cercle et circonscrits à un autre cercle (fin)

Auteur : **Françoise PECAUT**

12 - Quadrilatères interscrits dans deux ellipses co-axiales.

a) Dans cette sous-section, nous avons montré la proposition ci-dessous (voir A.M.V n°6, §12) :

Pour qu'on puisse inscrire un quadrilatère dans deux ellipses co-axiales, $\mathcal{E}(a', b') \subset \mathcal{E}(a, b)$, il faut et il suffit que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, soit $a'^2 b^2 + a^2 b'^2 = a^2 b^2$ ($\alpha = \frac{a'}{a}$, $\beta = \frac{b'}{b}$).

b) Dans cette sous-section, nous avons examiné quelques cas particuliers (voir A.M.V n°6) : l'une des ellipses est un cercle, puis les deux ellipses sont homofocales.

c) Tous les polygones interscrits dans deux ellipses homofocales ont même périmètre, comme nous allons le démontrer ci-dessous.

Rappelons d'abord un théorème (de Poncelet) sur les tangentes issues d'un point P à une conique à centre de foyers F et F'. Soient M et M' les points de contact des deux tangentes issues de P (quand elles existent, distinctes) : les angles (PM, PM') d'une part, (PF, PF') d'autre part, ont mêmes bissectrices (voir fig. 12).

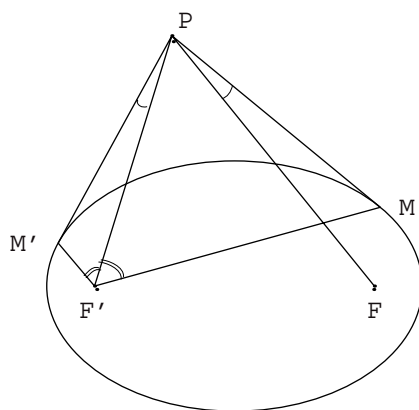


Fig. 12 : Les "petits" théorèmes de Poncelet

Considérons maintenant un polygone A_1, A_2, \dots, A_n à n côtés, inscrit dans deux ellipses homofocales $\mathcal{E}(a', b') \subset \mathcal{E}(a, b)$: en chaque sommet $A_i \in \mathcal{E}(a, b)$, les côtés du polygone qui ont le même point A_i en commun font le même angle avec la tangente à $\mathcal{E}(a, b)$ en A_i , qui est la bissectrice extérieure de l'angle $\angle FA_i F'$. Ainsi se trouvent justifiées les appellations «polygone de lumière» et «trajectoire de billard» (M. Berger, géométrie, 9.4.1 et 9.4.2.).

Admettons le (grand) théorème de Poncelet dans toute sa généralité (cf. A.M.V. n°5, introduction au troisième épisode). Alors tout point voisin de A_i sur $\mathcal{E}(a, b)$ est aussi sommet d'un polygone inscrit à n côtés. Ainsi prend un sens la différentielle de A_i , vecteur $\overrightarrow{dA_i}$ porté par la tangente à $\mathcal{E}(a, b)$ en A_i . Soit \mathcal{P} le périmètre $\sum_{i=1}^n A_i A_{i+1}$ ($A_{n+1} = A_1$).

Désignant par $\vec{u}(A_i, A_{i+1})$ le vecteur unitaire de $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$, on peut écrire la distance $A_i A_{i+1}$ sous forme du produit scalaire $A_i A_{i+1} \cdot \vec{u}(A_i, A_{i+1})$. Alors :

$$d\mathcal{P} = \sum_{i=1}^n \left(\overrightarrow{dA_{i+1}} - \overrightarrow{dA_i} \right) \cdot \vec{u}(A_i, A_{i+1}) + \sum_{i=1}^n \overrightarrow{A_i A_{i+1}} \cdot d\vec{u}(A_i, A_{i+1})$$

La deuxième somme est nulle puisque la différentielle d'un vecteur unitaire a un support orthogonal à ce vecteur. Dans la première somme, groupons les deux termes qui contiennent $\overrightarrow{dA_i}$ (tenant compte aussi de ce que $A_{n+1} = A_1$) :

$$d\rho = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{dA_i} \cdot [\vec{u}(A_{i-1} A_i) - \vec{u}(A_i A_{i+1})] = 0$$

En effet $\vec{u}(A_{i-1} A_i) - \vec{u}(A_i A_{i+1})$ est porté par la bissectrice intérieure de l'angle $\angle A_{i-1} A_i A_{i+1}$ tandis que $\overrightarrow{dA_i}$ est porté par la bissectrice intérieure.

La propriété de périmètre constant pour les polygones inscrits dans deux ellipses homofocales est démontrée.

Dans le cas $n=4$, les quadrilatères inscrits sont tous des parallélogrammes. On pourra vérifier que le rectangle et le losange de la famille ont même périmètre, soit :

$$\left. \begin{aligned} a^2 - b^2 &= a'^2 - b'^2 \neq 0 \\ a' / b' &= a^2 / b^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a' + b' = \sqrt{a^2 + b^2}$$

d) Interscription d'un quadrilatère dans deux ellipses co-axiales qui se coupent (nécessairement en quatre points) :

Jusqu'ici, nous avons supposé $\mathcal{E}(a', b') \subset \mathcal{E}(a, b)$ parce que les calculs du §11, fondés sur la projection conique du §10, exigent $\Gamma(\Omega, \rho) \subset C(O, R)$.

Que signifie donc la condition (8) — trouvée en 12,a) et que nous rappelons ci-dessous : —

$$\beta^4 = (\alpha^2 - 1)^2 \quad (8)$$

lorsqu'il n'en est pas ainsi et que cependant l'interscriptibilité a un sens ?

Ce cas se présente lorsque $\mathcal{E}(a, b)$ et $\mathcal{E}(a', b')$ se coupent en quatre points distincts. Par exemple, si $a' > a$ et $b' < b$, les deux arcs de $\mathcal{E}(a, b)$ extérieurs à $\mathcal{E}(a', b')$ peuvent permettre d'inscrire des quadrilatères à côtés tangents à $\mathcal{E}(a', b')$. Alors $\alpha > 1$, $\beta < 1$, et la condition d'interscriptibilité (8) s'écrit $\alpha^2 - \beta^2 = 1$, $\alpha^2 < 2$.

On pourrait donner des arguments fondés sur des calculs dans le corps des complexes, utilisant les racines p et q (imaginaires conjuguées) de l'équation (4) du §10, dont la partie imaginaire est non nulle puisque $\Delta < 0$ pour $R - \rho < d < R + \rho$.

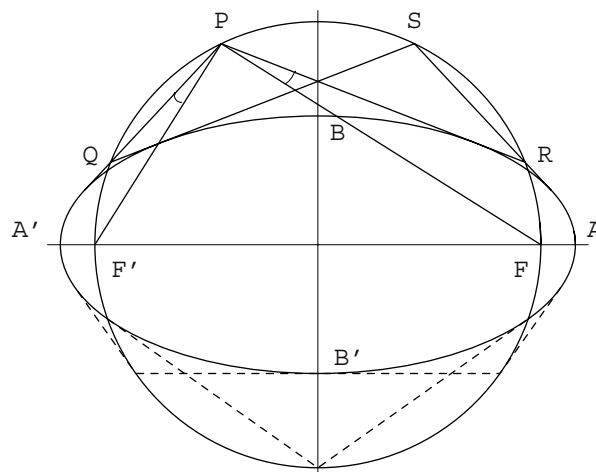


Fig. 13 : Contre-parallélogramme inscrit.

Mais il nous paraît plus conforme à l'esprit de ce travail de montrer directement que la relation $\alpha^2 - \beta^2 = 1$ implique, pour $1 < \alpha < \sqrt{2}$, que les ellipses $\mathcal{E}(a, b)$ et $\mathcal{E}(a', b')$ se coupent en quatre points et permettent l'interscription de quadrilatères.

Démonstration :

On ne restreint pas la généralité en supposant (fig.13) que $\mathcal{E}(a, b)$ est un cercle de rayon r , $a'^2 - b'^2 = r^2$. En effet, dans le cas général, on peut appliquer une affinité dont l'axe est l'un des axes communs aux deux ellipses, qui transforme $\mathcal{E}(a, b)$ en cercle. Une telle affinité ne change ni α , ni β , ni l'interscription.

Soit P un point de l'un des arcs du cercle extérieurs à l'ellipse. Les tangentes issues de P à $\mathcal{E}(a', b')$ recouperont le cercle $C(O, r)$ en Q et R. Le cercle $C(O, r)$ coupe le grand axe de l'ellipse aux foyers F et F' de celle-ci, à cause de la relation $a'^2 - b'^2 = r^2$. Grâce au petit théorème de Poncelet rappelé plus haut (§12,c), les angles $\angle QPF'$ et $\angle FPR$ sont égaux, et l'arc de cercle $\widehat{F'Q}$ est égal à l'arc de cercle \widehat{FR} . Il s'ensuit que Q et R sont symétriques par rapport à la médiatrice de [FF']. Soit S le symétrique de P par rapport à cette même droite. Les tangentes issues de S à $\mathcal{E}(a', b')$ sont respectivement les droites symétriques des tangentes menées par P ; elles passent donc l'une par Q, l'autre par R.

Nous avons ainsi prouvé que le contre-parallélogramme PQSR est interscrit. Tout autre point de l'arc de cercle où a été choisi P est, de même, sommet d'un contre-parallélogramme interscrit. La figure 13 montre en pointillés les deux quadrilatères pliés interscrits, sur l'autre arc de cercle extérieur à $\mathcal{E}(a', b')$ (cf. A.M.V. n°4, fig.7).

13 - Triangles interscrits dans deux ellipses co-axiales.

Le lecteur pourra vérifier les résultats suivants :

a) $R^2 - d^2 = 2 \rho R$ se transforme par les formules (7) du §11 en $(\alpha - 1)^2 = \beta^2$.

Pour deux ellipses coaxiales $\mathcal{E}(a', b') \subset \mathcal{E}(a, b)$ (α et β sont tous deux inférieurs à 1) cette relation équivaut à $\alpha + \beta = 1$ (on rappelle que $\alpha = \frac{a'}{a}$, $\beta = \frac{b'}{b}$).

b) Pour deux ellipses coaxiales $\mathcal{E}(a', b') \subset \mathcal{E}(a, b)$ admettant des triangles interscrits :

- $\mathcal{E}(a, b)$ est un cercle de rayon $r \iff a' + b' = r$
- $\mathcal{E}(a', b')$ est un cercle de rayon $r \iff \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{r}$
- $\mathcal{E}(a', b')$ et $\mathcal{E}(a, b)$ sont homofocales $\iff \frac{a'^2}{b'^2} = \frac{b+b'}{a+a'} \frac{a'}{b'}$

c) Tous les triangles interscrits dans deux ellipses homofocales $\mathcal{E}(a', b') \subset \mathcal{E}(a, b)$ ont le même périmètre $2\mathcal{P}$ où $\mathcal{P}^4 = \frac{[(a+a')(b+b')]^3}{a'b'}$.

d) Pour deux ellipses coaxiales ayant quatre points communs distincts, par exemple $\alpha > 1$, $\beta < 1$, la relation $(\alpha - 1)^2 = \beta^2$ s'écrit $\alpha - \beta = 1$, $\alpha < 2$. Quand cette condition est remplie, tout point d'un arc de $\mathcal{E}(a, b)$ extérieur à $\mathcal{E}(a', b')$ est sommet d'un triangle interscrit (voir fig.14 le cas $a' - b' = r$).

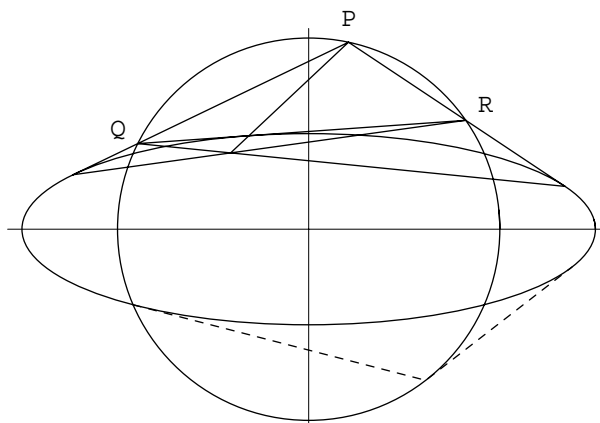


Fig. 14 : Triangle PQR interscrit entre cercle et ellipse sécants.

e) Pour tout triangle interscrit, les droites joignant un sommet du triangle au point de contact du côté opposé sont concourantes.

14 - Conclusion.

Tout au long de ces cinq épisodes, nous avons démontré le théorème de Poncelet, dit grand théorème de Poncelet, dans des cas particuliers : pour les polygones, on s'est borné aux cas des triangles et des quadrilatères, et pour la paire de coniques, on s'est borné à une paire de cercles, ou à une paire d'ellipses de mêmes axes.

Les démarches sont naïves et élémentaires. Beaucoup de détails ont été donnés, et pourtant des questions se posent encore, et le lecteur a été souvent convié à expliciter ou à prolonger ce qui est écrit.

On peut espérer paradoxalement que malgré le parti pris d'un texte qui se suffit à lui-même, ces pages auront surtout convaincu de l'intérêt d'une vraie démonstration dans le cadre d'une théorie adéquate.

C'est pourquoi je termine par une bibliographie succincte. J'invite ceux qui apprécient la pédagogie «hands on» (la main à la pâte) à se plonger dans les écrits originaux de Poncelet.

Bibliographie.

M.BERGER : Géométrie. Nathan, Paris 1990.

H.J.M. BOS, C.KERS, F.DORT and D.W. RAVEN : Poncelet's closure theorem, *Expositiones Mathematicae* 5, 289-364 (1987).

P.A.GRIFFITHS : Variations on a theorem of Abel. *Inventiones Mathematicae*,35,321-390 (1976).

P.A.GRIFFITHS and J.HARRIS : On Cayley explicit solution to Poncelet's porism. *L'enseignement mathématique*,24, 31-40 (1978).

MATHEMATICAL INTELLIGENCER : Poncelet theorem revisited vol.20,n°4,31-32 (1998).

J.V. PONCELET : *Traité des propriétés projectives des figures*, deuxième édition. Gauthier-Villars 1865 (première parution en 1822).

J.V. PONCELET : *Applications d'Analyse et de Géométrie qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figures*, Mallet-Bachelier (1862), Gauthier-Villars (1864) (2 vol.).

D.ZVONKINE : *Courbes elliptiques dans la géométrie élémentaire*. Quadrature n°27, Argenteuil 1997.

Fin du cinquième et dernier épisode.