

Aix Marseille Vert

Bulletin de la régionale APMEP d'Aix-Marseille

*Magazine trimestriel paraissant quatre fois par an
N°7 (Janvier, Février, Mars 2002)*

a
p
m
e
p

- **Éditorial**
(Catherine DUFOSSE)
- **Suites géométriques et quadratures**
(André BONNET)
- **Les décimales de π**
(Bernard EGGER)
- **Triangles et quadrilatères inscrits dans un cercle
et circonscrits à un autre cercle**
(Françoise PÉCAUT)
- **L'agenda du prof de maths**

Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public

Siège de l'Association :

A.P.M.E.P. Régionale d'Aix-Marseille
Université de Provence UFR MIM
3, Place Victor Hugo
13331 MARSEILLE Cedex 3
Tél : 04 91 10 61 06
Fax : 04 91 10 61 24

Comité de rédaction du bulletin de la régionale

Direction de la publication : André Bonnet
Rédaction et réception des articles : Yvon Poitevineau

AIX MARSEILLE VERT

Bulletin de la régionale A.P.M.E.P. d'Aix-Marseille
Imprimé au siège de l'Association
N° ISSN : 0756-8991
Dépôt légal : Janvier 2000

Avant toutes choses, bonne année à tous !

Que cette année palindrome, (il n'y en a qu'une par siècle, ce n'est pas si fréquent ! !) vous soit favorable et vous apporte toutes sortes de choses belles et bonnes.

L'année a commencé pour moi sur les chapeaux de roue, avec un colloque sur l'enseignement primaire en Europe à la Sorbonne, le 7 janvier, jour de la rentrée scolaire. En tant que membre de la commission Kahane, je participais à l'organisation de cette réunion. Ainsi, au lieu d'enseigner à mes élèves de première S ce qu'est le produit scalaire, j'ai passé un moment à tenir le vestiaire et à distribuer des badges (à la totale stupéfaction de notre IG Marc Fort qui passait par là !). Outre cette reconversion inattendue et plutôt comique, ce colloque m'a conduit à quelques réflexions qui m'ont fait apprécier cette journée perdue pour mes élèves : l'enseignement primaire a une place fondamentale où les aléas politiques jouent un rôle particulièrement crucial qui est apparu clairement au cours des interventions successives.

- ◆ Ainsi, la déléguée de Roumanie a expliqué que l'enseignement primaire, dans la période « communiste », s'était cantonné à un travail d'alphabétisation et que de nouveaux programmes, plus ambitieux sur le plan de la formation intellectuelle se mettaient en place actuellement.
- ◆ Le délégué du Portugal, a expliqué quant à lui que le taux d'alphabétisation était très faible au temps de la dictature de Salazar, et que le gouvernement actuel faisait de gros efforts pour rattraper ce retard, avec l'aide et la participation active et organisée des enseignants, très motivés et très militants : l'association des professeurs de mathématiques a 6000 membres dans ce petit pays de 10 ou 11 millions d'habitants !
- ◆ Autre exemple : l'Italie, où un projet de réforme prévoyant l'unification des écoles secondaires (actuellement fractionnées en beaucoup de types de lycées) a été annulé par le gouvernement Berlusconi, et remplacé par un système diamétralement opposé, augmentant de 5 à 8 le nombre d'écoles secondaires différentes, introduisant 6 niveaux d'examens au lieu des 3 actuels et des tests d'admission à l'université.
- ◆ Mais ma plus grande surprise a été la description de la situation allemande. On sait que le système d'apprentissage à l'allemande a été admiré et prôné par certains en France. Or les résultats de l'Allemagne aux tests internationaux sont régulièrement faibles, et les résultats de l'Allemagne à l'étude PISA sur la population de 15 ans, dont les résultats ont été publiés par l'OCDE fin 2001 ont presque fait scandale : l'Allemagne y est classée 27ème sur les 32 pays étudiés, juste devant le Brésil par exemple. L'intervenante allemande au colloque de la Sorbonne nous a fait une description très préoccupante de l'école primaire allemande : dans presque tous les Länder, l'école primaire ne dure que 4 ans, c'est la seule « école pour tous », et son rôle est essentiellement de trier les élèves en 3 catégories dès l'âge de 10 ans : les « bien doués » qui iront au Gymnasium et pourront seuls accéder à l'Université, les « moyens » qui iront en Realschule, et les « moins doués » qui seront dirigés vers les Hauptschule. Ajoutons que les horaires de l'école primaire sont très légers (quelques heures dans la matinée, même pas une demi-journée complète) ce qui conduit les femmes à rester à la maison pour garder leurs enfants. Résultats de ce système rigide : la seule école qui compte est le Gymnasium, et l'école primaire est négligée et méprisée, elle n'a pas été rénovée de façon substantielle depuis 30 ans, et on demande d'abord aux institutrices d' « aimer les enfants », sans trop se soucier des enjeux intellectuels de l'enseignement primaire, de sorte que la situation empire au lieu de s'améliorer. Quand ce genre de description est fait par une spécialiste reconnue sur les plans national et international, il est crédible, et il fait froid dans le dos... Je garde en

tête les paroles d'un jeune allemand lues dans Libération justement ce 7 Janvier : il disait que personne ne s'était plus soucié de le faire progresser à partir du moment où il avait été classé une fois pour toutes comme « mauvais élève » : l'école avait rempli sa mission envers lui, qui était de le cataloguer !

Et la France dans tout ça ? Elle se situe dans la moyenne, mais ce qui y est remarquable, c'est que les écarts y sont assez resserrés : notre collègue unique a donc bien une vertu ; il ne fait pas des miracles, mais il réussit bel et bien à réduire, plus que beaucoup d'autres systèmes, les écarts entre les populations d'origines sociales diverses ! Nous ne ramons pas pour rien !

J'ai conclu de tout ceci que chaque pays a en somme l'enseignement qu'il mérite, au sens où chacun est responsable de la qualité son enseignement, et où les choix politiques en matière d'enseignement ont des conséquences décisives. Il faut une longue patience, une attention et une coopération de tous, ainsi qu'une volonté politique constante pour construire un système d'enseignement efficace et démocratique et c'est un système assez fragile que quelques décisions politiques irréfléchies peuvent mettre facilement en danger. En cette année d'élection, il n'est peut-être pas inutile de le rappeler !

Suites géométriques et quadratures

André BONNET, Université de Provence

1 La notion de quadrature :

Dans le langage courant, le mot quadrature est souvent synonyme d'impossibilité, par allusion au vieux problème de la quadrature du cercle. En mathématiques, il est employé à la fois pour la réalisation, à la règle et au compas, d'un carré ayant même aire qu'une figure donnée, mais aussi pour désigner une intégrale ou une primitive. Cette dernière utilisation du mot est courante chez les mécaniciens qui concluent parfois leur étude par l'expression « ... le problème est alors ramené à des quadratures ».

Posé depuis l'antiquité, le problème de la quadrature du cercle a occupé, jusqu'au XIX^{ème} siècle, des générations de mathématiciens. Rappelons que l'impossibilité de résoudre, « à la règle et au compas », ce problème est la conséquence de la transcendance de π (démontrée en 1882 par *Lindeman*) et du fait que les nombres constructibles (rapports de grandeurs constructibles) sont dans des extensions algébriques de degré 2^n de \mathbb{Q} .

Au dix-septième siècle, le mot quadrature est parfois simplement employé pour un résultat ou une propriété sur l'aire de la figure étudiée.

La figure la plus simple à réaliser, avec un compas, étant le cercle, il était normal d'aborder, en premier, le problème de la quadrature du cercle. D'autres figures simples, comme les coniques, peuvent aussi être envisagées.

Pour une ellipse, le problème de la quadrature est tout aussi impossible que pour le cercle. En effet, une ellipse dont les demi-axes sont a et b , s'obtient à partir d'un cercle de rayon a (ou b) par une affinité de rapport $\frac{b}{a}$ (ou $\frac{a}{b}$). L'aire de l'ellipse étant égale à πab , il est tout aussi impossible que pour le cercle, de construire, à la règle et au compas, un carré de même aire que l'ellipse, à partir des grandeurs a et b .

Le cas de l'hyperbole a fait l'objet d'un article dans ce bulletin (voir [1] *AixMarseilleVert* n° 1, page 3). Rappelons le résultat donné (en 1647) par *Grégoire de Saint Vincent*. Pour une hyperbole d'équation algébrique $xy = 1$, si on note $\mathcal{L}(x)$ l'aire sous l'hyperbole limitée par l'axe Ox et les droites verticales passant par les points $(1,0)$ et $(x,0)$ de l'axe Ox , on a, pour deux réels positifs a et b , la relation :

$$\mathcal{L}(ab) = \mathcal{L}(a) + \mathcal{L}(b).$$

Le travail de *Grégoire de Saint Vincent* est à rapprocher de celui de *Pierre Fermat*. Dans [2] page 182 on trouve la phrase suivante : *Pierre Fermat* ... en 1636 ... fait connaître, dans un écrit intitulé « *Sur la transformation et la simplification des lieux ...* », sa méthode *uniforme et constante* qui lui permet de *carrer au moyen d'une progression géométrique* toutes les paraboles et hyperboles (à l'exception d'une seule).

Il faut signaler que, pour *Fermat*, le terme de parabole (resp. hyperbole) désigne une courbe d'équation $y = ax^m$ où m est un entier naturel (resp. un entier négatif). Il n'est peut être pas inutile de rappeler aussi, que gr,ce à *Descartes* (1596-1650) la notion de courbe passe, à cette époque, d'un statut purement géométrique à celui de courbe algébrique. Toutefois il semble que la notion d'abscisse ait été pour la première fois utilisée par *Grégoire de Saint Vincent* dans son travail sur l'hyperbole cité plus haut.

2 Quadratures, calcul infinitésimal, calcul intégral et calcul différentiel :

La première définition précise de l'intégrale date selon [2] de 1823 et est attribuée à Cauchy. Celui-ci, en reprenant les idées de Leibniz (qui « interprétait les aires comme des sommes de rectangles »), démontre que, pour une fonction f réelle, continue sur l'intervalle $[x_0, X]$ et pour une subdivision de cet intervalle en n sous intervalles par les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = X$, la somme :

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

tend vers une limite, lorsque la longueur du plus grand sous intervalle tend vers zéro et que cette limite ne dépend que de f et des valeurs extrêmes de x_0 et X .

Ce n'est qu'en 1854 que *Riemann* développera, dans sa thèse d'habilitation, une théorie de l'intégration plus générale que celle de *Cauchy*.

Par contre, depuis le début du *XVII^e* siècle les méthodes infinitésimales prolifèrent et conduisent *Newton* et *Leibniz* à s'intéresser de près au calcul infinitésimal. Dès 1669, le lien entre quadratures et dérivées est établi clairement par *Newton*. Toutefois il faudra attendre « *Quadratura curvarum* » écrit en 1676 et publié en 1704, pour que *Newton* formule ce qui correspond à peu près à notre définition actuelle de la dérivée.

3 La quadrature de la parabole :

Nous présenterons tout d'abord le point de vue d'*Archimède*. Celui-ci prouve que l'aire sous la parabole, on dit aussi aire d'un segment parabolique, est égale à quatre fois le tiers de l'aire du triangle de même base inscrit dans la parabole (cf. fig. 1 ci-dessous, triangle bleu) et dont le troisième sommet est sur le diamètre conjugué de la base. Nous présenterons ensuite le point de vue de *Fermat* qui utilise, comme *Grégoire de Saint Vincent*, une méthode « d'exhaustion » dont la définition sera donnée ultérieurement.

On peut rappeler que *Grégoire de Saint Vincent* utilise abondamment, dans son étude de l'hyperbole, des « progressions » géométriques.

Méthode d'Archimède (287-212 av. JC) :

Une étude complète du travail d'*Archimède* est donnée dans [2] page 172-173. Toutefois la figure de la page 172 est un cas particulier (base du triangle perpendiculaire à l'axe de la parabole) alors que la démonstration est valable pour le cas général. On pourra, pour la lecture de ces deux pages, remplacer cette figure par la figure suivante :

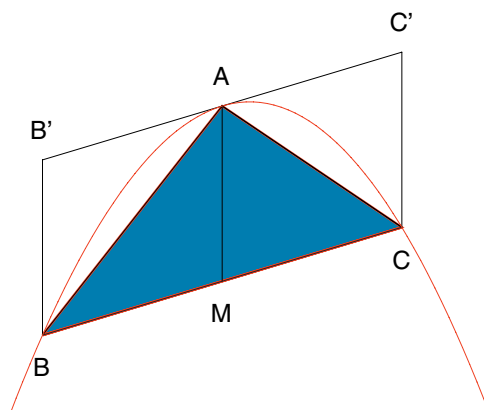


fig. 1

Le principe de la démonstration d'*Archimède* est :

1. de remplir l'espace entre le triangle ABC et la parabole par des triangles obtenus par dichotomie,
2. de parvenir, par des considérations géométriques simples à l'évaluation de l'aire de ces triangles,
3. d'établir la conjecture : « aire sous la parabole $= \frac{4}{3}$ aire du triangle ABC »,
4. de faire la démonstration de cette conjecture par un double raisonnement par l'absurde.

Dans la figure 1, qui correspond à la première étape, M est le milieu de BC et AM est le diamètre conjugué de BC .

La deuxième étape consiste à introduire deux nouveaux triangles, ayant pour bases respectives les cotés BA et AC et dont les sommets sont sur la parallèle à BB' passant par les milieux E de BM et F de MC (Cf. fig 2). On notera K , (respectivement L), les milieux de BA , resp. AC .

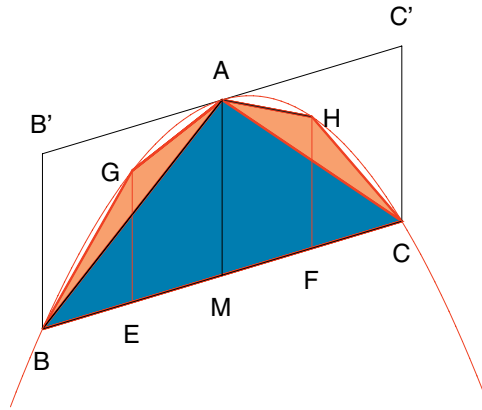


fig. 2

Pour la réalisation d'une figure, on peut difficilement aller au delà de la troisième étape (Cf. fig 2 bis, ci-dessous)

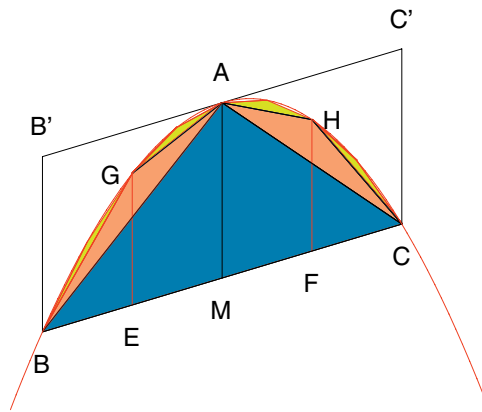


fig. 2 bis

Par des considérations géométriques simples, que l'on peut le mettre en évidence par une figure (Cf. fig 3, ci-dessous), on montre que l'aire des triangles BGA et AHC (en marron) sont égales à $\frac{1}{8}$ de l'aire du triangle ABC (en bleu):

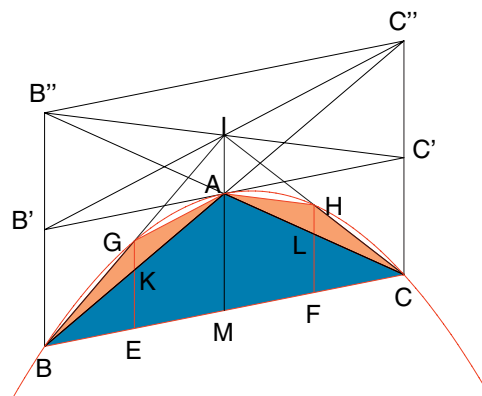


fig. 3

Par la suite on notera T l'aire du triangle ABC et par A l'aire du segment parabolique de base BC .
 A la deuxième étape, la somme des aires des trois triangles ABC , BGA , AHC est égale à: $T + 2 \frac{1}{8} T = (1 + \frac{1}{4})T$.

On poursuit le remplissage de la parabole, en construisant quatre nouveaux triangles, inscrits dans la parabole, de bases BG , GA , AH , HC et dont le sommet est sur la parallèle à BB' passant par le milieu de la base. On obtient une somme des aires de ces sept triangles égale à $(1 + \frac{1}{4} + (\frac{1}{4})^2) T$.

A l'étape n , on dispose de $2^n - 1$ triangles, dont la somme des aires est égale à $U_n = (1 + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{4^{(n-1)}}) T$.

Pour conclure, il faudrait calculer la limite de la suite U_n ce qu'évite, bien entendu *Archimède* car ceci le conduirait à calculer une somme infinie.

Par contre, comme il dispose de l'identité: $(1 + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{4^{(n-1)}}) T + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{(n-1)}} T = \frac{4}{3} T$, il conjecture que le résultat cherché doit être $\frac{4}{3} T$, ce qu'il démontre par le double raisonnement par l'absurde que l'on peut reconstituer ainsi :

1/ Supposons que l'aire A du « segment parabolique » soit supérieure à $\frac{4}{3} T$. On peut alors trouver une valeur de n telle que les $2^n - 1$ triangles construits sous la parabole (par la méthode précédente) aient une aire totale $U_n = (1 + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{4^{(n-1)}}) T$ inférieure à A et supérieure à $\frac{4}{3} T$.

Or U_n est égal à $\frac{4T}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{T}{4^{(n-1)}}$. L'hypothèse $A > \frac{4}{3} T$ est donc à rejeter.

2/ Supposons maintenant que l'aire A soit inférieure à $\frac{4}{3} T$ et notons D la différence $D = \frac{4}{3} T - A$. D'après l'axiome d'*Archimède*, justement, il doit exister un entier n telle que $4^n D > T$.

On a alors: $D = \frac{4}{3} T - A > \frac{1}{4^n} T > \frac{1}{3} \frac{1}{4^n} T = \frac{4}{3} T - (1 + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{4^{(n-1)}}) T$, d'où l'on déduit :

$A < (1 + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{4^{(n-1)}}) T = U_n$. Or en considérant les $2^n - 1$ triangles construits sous la parabole, dont l'aire totale est $U_n = (1 + \frac{1}{4} \dots + \frac{1}{4^{(n-1)}}) T$ on met en évidence que U_n doit être inférieure à A . L'hypothèse $A < \frac{4}{3} T$ est donc aussi à rejeter.

Conclusion : la seule valeur possible pour A est $\frac{4}{3} T$.

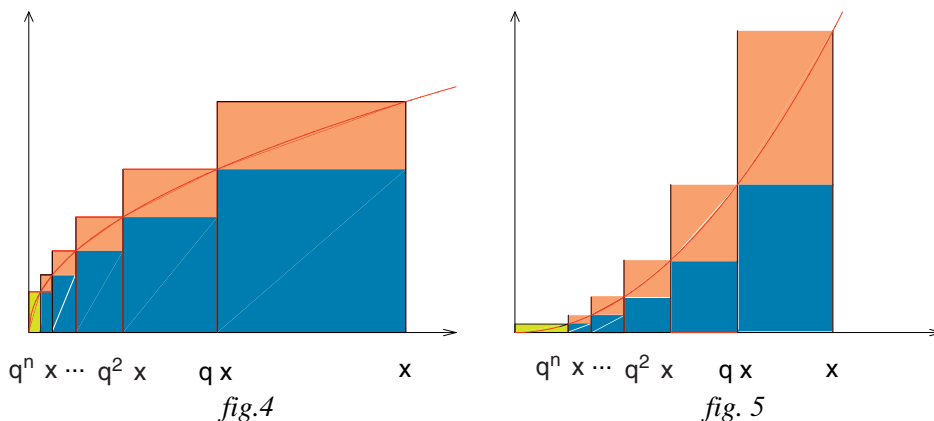
On peut remarquer qu'*Archimède* évite d'utiliser la notion, un peu confuse, de polygone à un nombre infini de cotés et que les aires approchées n'épuisent pas, « exhaustivement », l'aire recherchée. La méthode d'*Archimède* diffère ainsi sensiblement des méthodes du XVIIème siècle, telles que celles utilisées par *Grégoire de Saint Vincent* ou par *Pierre Fermat*, que l'on désigne souvent, pour cette raison, de « méthodes d'exhaustion ».

Les quadratures de Fermat et de Pascal :

Pour une meilleure compréhension, nous décrivons la méthode utilisée par *Pierre Fermat* (1601-1665) pour « carrer les paraboles », en utilisant le symbolisme moderne de l'algèbre. Le travail de *Fermat* a été repris par *Blaise Pascal* (1623-1662) en utilisant des rectangles construits sur des abscisses en progression arithmétique, ce qui est un peu hors sujet eu égard au thème choisi, mais présente un réel intérêt pour les techniques de quadratures utilisées à cette époque. La démonstration de Pascal est fournie en annexe.

Il y a deux façons d'envisager la parabole comme une courbe algébrique. Suivant sa disposition par rapport aux axes, elle aura une équation de la forme $y = x^2$, ou $y^2 = x$. Dans les deux cas il est possible d'imaginer cette courbe comme un graphe d'une fonction. C'est ce que nous ferons avec la racine carrée, pour remplacer la deuxième équation par $y = \sqrt{x}$. Dans les deux cas nous allons montrer, en utilisant des suites géométriques, que l'aire est une primitive de la fonction donnant y en fonction de x .

Pour calculer l'aire sous la parabole d'équation $y = \sqrt{x}$ (fig.4) ou $y = x^2$ (fig. 5) située entre O et x , *Fermat* choisit sur l'axe des points dont les abscisses sont : $x, q x, q^2 x, q^3 x, \dots$ où q est un nombre réel positif inférieur à 1, (cf. fig. 4 ou 5) :



Cas de la parabole d'équation $y = \sqrt{x}$:

Pour une valeur de x donnée, on notera S_n et T_n la somme des aires des rectangles situés respectivement sous la parabole et au-dessus d'elle et on notera A l'aire sous la parabole. On a alors l'encadrement suivant : $S_n < A$ et $A < T_n + q^n x \sqrt{q^n x}$.

Calculons S_n et T_n : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (q^k x - q^{(k+1)} x) \sqrt{q^{(k+1)} x}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (q^k x - q^{(k+1)} x) \sqrt{q^k x}$ ce qui donne

après mise en facteur des puissances de q : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} q^{(\frac{1}{2} + \frac{3k}{2})} (1 - q) x \sqrt{x}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} q^{(\frac{3k}{2})} (1 - q) x \sqrt{x}$ (on constate par le calcul que $S_n = \sqrt{q} T_n$, ce qui était prévisible géométriquement).

La somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison a et de premier

terme 1 étant égale à $\frac{1 - a^n}{1 - a}$, en prenant $a = q^{(\frac{3}{2})}$ on a : $\sum_{k=0}^{n-1} q^{(\frac{3k}{2})} = \frac{1 - a^n}{1 - a}$.

En écrivant $1 - a = 1 - \sqrt{q}^3 = (1 - \sqrt{q})(1 + \sqrt{q} + q)$ et $1 - q = (1 - \sqrt{q})(1 + \sqrt{q})$ on obtient : $S_n = \frac{(1 - \sqrt{q}^{(3n)})(1 + \sqrt{q})(x \sqrt{x})}{1 + \sqrt{q} + q}$ dont la limite quand n tend vers l'infini est $\frac{(1 + \sqrt{q}) x \sqrt{x}}{1 + \sqrt{q} + q}$.

On termine, en faisant tendre vers 1 la raison q , et on obtient $\frac{2x\sqrt{x}}{3}$.

La limite de T_n étant $\frac{q(1 + \sqrt{q}) x \sqrt{x}}{1 + \sqrt{q} + q}$ et celle du terme complémentaire $q^n x \sqrt{q^n x}$ étant nulle on en déduit $A = \frac{2x\sqrt{x}}{3}$.

Cas de la parabole d'équation $y = x^2$:

On notera, comme précédemment, S_n et T_n la somme des aires des rectangles situés respectivement sous la parabole et au-dessus d'elle et A l'aire sous la parabole. On a alors l'encadrement suivant : $S_n < A$ et $A < T_n + q^n x (q^n x)^2$.

On trouve pour S_n et T_n : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (q^k x - q^{(k+1)} x) (q^{(k+1)} x)^2$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (q^k x - q^{(k+1)} x) (q^k x)^2$ ce qui

donne après mise en facteur des puissances de q : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} q^{(3k+2)} (1 - q) x^3$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n-1} q^{(3k)} (1 - q) x^3$ (on constate aussi que $S_n = q^2 T_n$, ce qui était prévisible géométriquement). On termine le calcul en prenant

$a = q^3$ ce qui donne : $\sum_{k=0}^{n-1} q^{(3k)} = \frac{1 - a^n}{1 - a}$ puis comme $1 - a = 1 - q^3 = (1 - q)(1 + q + q^2)$ on obtient :

$$S_n = (1 - q^{(3n)}) \frac{x^3}{1 + q + q^2}.$$

Quand n tend vers l'infini, la limite de S_n est $\frac{x^3}{1+q+q^2}$, celle de T_n est $\frac{q^2 x^3}{1+q+q^2}$ et celle de $q^n x (q^n x)^2$ est nulle. On en déduit l'encadrement suivant : $\frac{x^3}{1+q+q^2} < A < \frac{q^2 x^3}{1+q+q^2}$ valable pour toute valeur de $q < 1$.

En faisant tendre q vers 1 on en déduit $A = \frac{x^3}{3}$.

1 Généralisation :

Dès 1636 Fermat sait carrer les paraboles d'équations $y = ax^m$, comme l'atteste sa correspondance avec Roberval. On appliquera la méthode précédente à une courbe d'équation $y = x^m$, avec dans un premier temps, m entier positif, puis ensuite avec un exposant négatif distinct de -1 .

Cas d'un exposant m positif :

On obtient : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (q^k x - q^{(k+1)} x) (q^{(k+1)} x)^m = \sum_{k=0}^{n-1} q^{((m+1)k+m+1)} (1-q) x^m$ et :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} (q^k x - q^{(k+1)} x) (q^k x)^m = \sum_{k=0}^{n-1} q^{((m+1)k+1)} (1-q) x^m$$

(on constate encore que $S_n = q^m T_n$, ce qui était prévisible géométriquement).

D'autre part le terme complémentaire est $q^n x (q^n x)^m = (q^{(m+1)})^n x^{(m+1)}$ et la suite géométrique qui permet d'obtenir la limite de S_n (resp. T_n) est de raison $a = q^{(m+1)}$ et de premier terme $q^{(m+1)}$ (resp. q).

Quand n tend vers l'infini, la limite de S_n est $\frac{q^{(m+1)} x^{(m+1)}}{1+q+\dots+q^m}$, celle de T_n est $\frac{q x^{(m+1)}}{1+q+\dots+q^m}$ et celle du terme complémentaire $(q^{(m+1)})^n x^{(m+1)}$ est nulle.

On en déduit l'encadrement suivant : $\frac{q^{(m+1)} x^{(m+1)}}{1+q+\dots+q^m} < A < \frac{q x^{(m+1)}}{1+q+\dots+q^m}$ valable pour toute valeur de $q < 1$.

En faisant tendre q vers 1 on en déduit $A = \frac{x^{(m+1)}}{m+1}$.

Cas d'un exposant négatif distinct de -1 :

Pour un exposant négatif, on utilisera de préférence une équation de la courbe sous la forme $y = \frac{1}{x^m}$ avec m positif distinct de 1 . La convergence des séries géométriques que l'on rencontrera impose de prendre

$q < 1$ si $m < 1$ et de prendre $q > 1$ si $m > 1$. Dans les deux cas on notera A_n l'aire située sous « l'hyperbole » et limitée par les verticales passant par les points d'abscisses x et $q^n x$. On notera S_n et T_n la somme des aires des rectangles situés respectivement sous « l'hyperbole » et au-dessus d'elle. On obtient suivant le cas des figures assez différentes des précédentes.

Ex 1 : $m = \sqrt{2}$, pour « l'hyperbole » d'équation $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ on a :

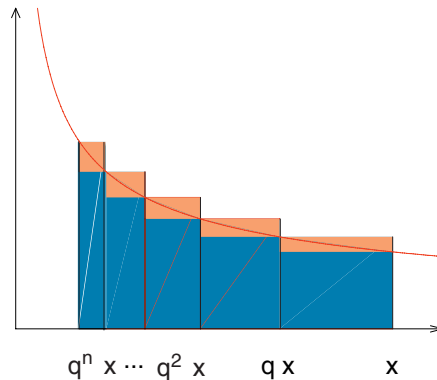


fig. 6

Ex 2 : $m = 2$, et pour « l'hyperbole » d'équation $y = \frac{1}{x^2}$ on a :

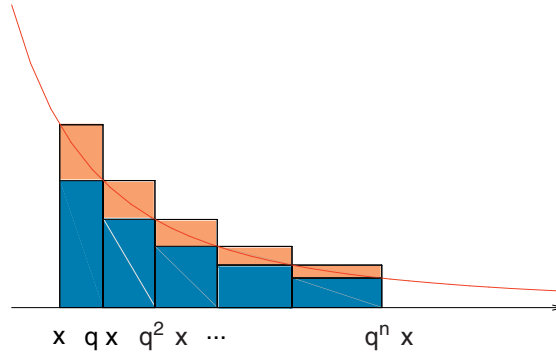


fig. 7

Ces figures mettent en évidence l'encadrement : $S_n < A_n < T_n$.

On peut appliquer, à la courbe d'équation $y = \frac{1}{x^m}$ (m entier positif), un calcul analogue au précédent :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{q^{(k+1)} x - q^k x}{(q^{(k+1)} x)^m} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{q^{((1-m)k+1-m)} (q-1)}{x^{(m-1)}} \text{ et } T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{q^{(k+1)} x - q^k x}{(q^k x)^m} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{q^{((1-m)k+1)} (q-1)}{x^{(m-1)}}$$

(on constate encore que $S_n = \frac{T_n}{q^m}$, ce qui était prévisible géométriquement).

La suite géométrique, qui permet d'obtenir la limite de S_n (resp. T_n), est de raison $a = (\frac{1}{q})^{(m-1)}$ et de premier terme $\frac{1}{q^{(m-1)}}$ (resp. q). A noter, que les valeurs choisies pour q en fonction de la place de m par rapport à 1 assurent la convergence de la série géométrique. A noter, aussi, qu'il n'y a pas, dans ces deux cas, de terme complémentaire.

Quand n tend vers l'infini, la limite de S_n est :

$$\frac{q-1}{q^{(m-1)} (1-a) x^{(m-1)}} = \frac{q-1}{(q^{(m-1)} - 1) x^{(m-1)}} = \frac{1}{(q^{(m-2)} + \dots + q + 1) x^{(m-1)}}$$

celle de T_n est : $\frac{q^m}{(q^{(m-2)} + \dots + q + 1) x^{(m-1)}}$.

En faisant tendre la raison q vers 1 on obtient une limite commune aux deux expressions précédentes, la valeur : $A = \frac{1}{(m-1) x^{(m-1)}}$. Cette valeur est en fait $\int_x^\infty \frac{1}{t^m} dt$ à partir de laquelle on retrouve une primitive de $\frac{1}{x^m}$ par la formule classique :

$$\int_1^x \frac{1}{t^m} dt = \int_1^\infty \frac{1}{t^m} dt - \int_x^\infty \frac{1}{t^m} dt = C^{te} - A.$$

2 Annexe : la méthode de Blaise Pascal

La parabole étant envisagée comme graphe de la fonction $y = x^2$, *Pascal* utilise des rectangles construits sur des abscisses en progression arithmétique de raison d , qui découpent le segment $[0, x]$ en n intervalles.

Il calcule l'aire du k -ième rectangle : $d \cdot (kd)^2$, puis la somme de ces aires :
 $S = d \cdot d^2 + d \cdot (2d)^2 + d \cdot (3d)^2 \dots + d \cdot (nd)^2 = d^3 + 4d^3 + 9d^3 + \dots + n^2 d^3 =$
 $(1 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \cdot d^3 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} d^3 = (\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}) d^3.$

Après ce calcul, *Pascal* s'autorise à négliger les termes de degrés 2 et 1 dans le résultat précédent et ne garde que le terme de degré 3. Avec cette omission la somme $S = \frac{d^3 n^3}{3} = \frac{(nd)^3}{3} = \frac{x^3}{3}$ qui fournit le résultat attendu.

Bibliographie :

- [1] Bulletin de la régionale APMEP d'Aix-Marseille, *AixMarseilleVert* n° 1
- [2] Amy DAHAN-DALMENICO & Jeanne PEIFFER, Une histoire des mathématiques. Routes et dédales.(Seuil)

LES DECIMALES DE π

BERNARD EGGER

La génération de suites de nombres pseudo aléatoires est un enjeu essentiel pour la simulation.

Si comme le dit B Ycard dans le cours écrit pour le logiciel SEL, « *Paradoxalement, le problème de démontrer qu'une suite particulière est aléatoire est indécidable en général* », le test du Chi-deux peut nous permettre de rejeter éventuellement une hypothèse. Nous allons l'appliquer aux 1250 premières décimales de π .

Bien entendu le nombre 1250 est « petit ». Il permet simplement de donner une image de ce qui est faisable. Il a l'avantage de permettre des traitements informatiques rapides tant sur Derive que sur Excel.

Nous partons de l'hypothèse que les décimales de π ont une distribution uniforme. C'est-à-dire que pour 1250, on en attend théoriquement 125 pour chacune des valeurs de 0 à 9. Qu'en est-il exactement ?

La première tâche est de saisir ces 1250 décimales.

Pour cela nous allons à nouveau utiliser le logiciel de calcul formel Derive.

Celui-ci permet d'afficher π avec bien plus de 1250 décimales.

π

```

3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348~
2534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848111745028410270193852110~
5559644622948954930381964428810975665933446128475648233786783165271201909145648566923460~
3486104543266482133936072602491412737245870066063155881748815209209628292540917153643678~
9259036001133053054882046652138414695194151160943305727036575959195309218611738193261179~
3105118548074462379962749567351885752724891227938183011949129833673362440656643086021394~
9463952247371907021798609437027705392171762931767523846748184676694051320005681271452635~
6082778577134275778960917363717872146844090122495343014654958537105079227968925892354201~
9956112129021960864034418159813629774771309960518707211349999998372978049951059731732816~
0963185950244594553469083026425223082533446850352619311881710100031378387528865875332083~
8142061717766914730359825349042875546873115956286388235378759375195778185778053217122680~
6613001927876611195909216420198938095257201065485863278865936153381827968230301952035301~
852968995773622599413891249721775283479131515574857242454150695950829533168617278558890~
7509838175463746493931925506040092770167113900984882401285836160356370766010471018194295~
5596198946767837449448255379774726847104047534646208046684259069491293313677028989152104~
7521620569660240580381501935112533824300355876402474964732639141992726042699227967823547~
8163600934172164121992458631503028618297455570674983850549458858692699569092721079750930~
2955
                
```

Ci-dessus par exemple, il y en a 1500.

Bien entendu, on pourrait envisager de saisir avec patience tous ces chiffres dans les 1250 premières lignes de la colonne A du tableur. Mais l'entreprise a de quoi rebuter.

C'est donc en utilisant les fonctions de texte des tableurs que nous allons opérer.

Pour comprendre la méthode commençons par ne prélever que les 10 premières

décimales.

```

PrecisionDigits := 11
Precision := Approximate

u := STRING( $\pi$ )
v := DELETE(DELETE(u, 1), 1)
w

 $\pi$  = 3.1415926535
u = 3.1415926535
v = 1415926535
a1415926535
                
```

On a utilisé les fonctions de traitement des chaînes de caractères que contient Derive.

On copie dans le presse papier la chaîne a1415926535 retournée par Derive.

On colle cette chaîne dans la cellule D2 du tableur par exemple.

D
a1415926535

La lettre « a » sert tout simplement à empêcher le logiciel d'évaluer 1415926535 comme un nombre ce qu'il ne manquerait pas de faire.

Il ne reste plus qu'à extraire chacun des chiffres et à les ranger dans les cellules B1,..., B10, la colonne A contenant les entiers de 2 à 11.

La fonction **STXT** qui extrait une sous chaîne d'une chaîne donnée, à partir d'un certain rang, et d'une longueur donnée, remplit parfaitement ce rôle.

B1	=	=STXT(\$D\$1;A1;1)		
A	B	C	D	
2	1		a1415926535	
3	4			

Les résultats retournés ne sont pas des nombres mais des « lettres ». On peut les conserver sous cette forme, ou bien les transformer en chiffre à l'aide de **CNUM** :

=	=CNUM(B1)	
C		
1	a	14

On peut même combiner les deux opérations avec en B1 : **=CNUM(STXT(\$D\$2 ;A1 ;1)**
C'est ce que nous ferons par la suite.

Pour clarifier la mise en page et en vue d'une utilisation pour un autre test, nous allons découper le problème en 5 étapes, en extrayant des chaînes de 260 décimales dont nous placerons les 250 premières valeurs en 5 colonnes.

La colonne A contient les entiers de 2 à 251.

Il reste maintenant à extraire les différentes chaînes dans Derive.

```
Precision := Approximate
PrecisionDigits := 1600
u := STRING(pi)
u
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803~
48253421170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174502841027019385~
21105559644622948954930381964428810975665933446128475648233786783165271201909145648566~
92346034861045432664821339360726024914127372458700660631558817488152092096282925409171~
53643678925903600113305305488204665213841469519415116094330572703657595919530921861173~
81932611793105118548074462379962749567351885752724891227938183011949129833673362440656~
64308602139494639522473719070217986094370277053921717629317675238467481846766940513200~
05681271452635608277857713427577896091736371787214684409012249534301465495853710507922~
79689258923542019956112129021960864034418159813629774771309960518707211349999998372978~
0499510597317328160963185950244594534690830264252230825334468503526193118817101000313~
78387528865875332083814206171776691473035982534904287554687311595628638823537875937519~
57781857780532171226806613001927876611195909216420198938095257201065485863278865936153~
38182796823030195203530185296899577362259941389124972177528347913151557485724245415069~
59508295331168617278558890750983817546374649393192550604009277016711390098488240128583~
61603563707660104710181942955596198946767837449448255379774726847104047534646208046684~
25906949129331367702898915210475216205696602405803815019351125338243003558764024749647~
3263914199272604269227967823547816360093417216412199245863150302861829745557067498385~
05494588586926995690927210797509302955321165344987202755960236480665499119881834797753~
566369807426542527862551818417574672890977772793800
```

On commence par éliminer le « 3. ».

```
v := DELETE(DELETE(u, 1), 1)
```

On extrait les 250 premières décimales, puis on ajoute la lettre « a » devant :

```
w := v
VECTOR(k, k, 1, 250)
t := APPEND(a, w)
t
a141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034~
82534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848111745028410270193852~
11055596446229489549303819644288109756659334461284756482337867831652712019091
```

On copie le résultat dans le presse papiers et on le colle dans le tableur, en cellule G1 par exemple.

En cellule B1, on entre la formule : **=CNUM(STXT(\$G\$1 ;A1 ;1))**.

Puis on copie cette formule, on sélectionne la première plage et l'on fait **CTRL V**.

On retourne à Derive pour les 250 décimales suivantes :

La procédure est totalement identique.

```
w := v
VECTOR(k, k, 251, 500)
t := APPEND(a, w)
t
a456485669234603486104543266482133936072602491412737245870066063155881748815209209628292~
54091715364367892590360011330530548820466521384146951941511609433057270365759591953092~
18611738193261179310511854807446237996274956735188575272489122793818301194912
```

(remarque : l'instruction `t :=APPEND(a,w)` n'est en réalité pas à réécrire, puisqu'elle s'applique à la nouvelle valeur de `w`).

Et ainsi de suite... En définitive, on a :

	E1		=	=CNUM(STXT(\$G\$4,A1;1))			
	A	B	C	D	E	F	G
1	2	1	4	9	5	3	a1415926535897
2	3	4	5	8	1	8	a4564856692346
3	4	1	6	3	8	0	a9833673362440
4	5	5	4	3	7	9	a5187072113499
5	6	9	8	6	0	5	a3809525720107

Il ne reste plus qu'à comptabiliser le nombre d'occurrences de chaque chiffre.

=NB SI(\$B\$1:\$F\$250;G8)	
Barre de formule	H
0	117
1	143
2	124
3	126
4	112
5	129
6	116
7	120
8	129
9	134

En colonne I, on fait apparaître les effectifs théoriques pour une distribution uniforme, c'est-à-dire 125 et l'on applique le test du Chi-deux.

=TEST.KHIDEUX(H7:H16;I7:I16)		
G	H	I
8	129	125
9	134	125
		0,71730697

Le résultat obtenu est très bon. On ne peut pas rejeter l'hypothèse que la répartition des 1250 premières décimales de π soit uniforme.

Mais bien sûr nous n'avons pas prouvé qu'il s'agit d'une suite « aléatoire » : nous aurions par exemple obtenu le même pourcentage avec un nombre dont les 117 premiers chiffres après la virgule auraient été des « 0 », les 143 suivants des « 1 », etc.

LE TEST DU POKER

Pour tester la qualité d'un générateur de nombres pseudo aléatoires, plusieurs moyens sont possibles. Le test d'uniformité est un des plus fréquent : nous l'avons utilisé pour la suite des décimales du nombre π .

Il consiste par exemple à vérifier que pour un grand nombre de nombres pseudo aléatoires compris entre 0 et 1, comme ceux retournés par la fonction **ALEA**, le premier chiffre après la virgule qui est compris entre 0 et 9 a pour chacune des valeurs possibles une fréquence « autour de 10% ».

Si par exemple on place dans la plage A1 :E1000 la formule matricielle **{ENT(10*ALEA)}** (rappelons que pour introduire une telle formule, on sélectionne la plage, puis en ligne de formule, on entre cette formule sans accolade et l'on tape sur **CTRL MAJ ENTRÉE**), et si l'on compte le nombre d'apparition de chaque chiffre à l'aide de l'instruction **NB.SI**, le test du Khi-deux appliqué par rapport aux valeurs théoriques d'une distribution uniforme, à savoir 500 pour chaque chiffre, ne permet pas de rejeter l'hypothèse d'une distribution uniforme

=TEST.KHIDEUX(G1:G10;H1:H10)					
D	E	F	G	H	
9	7	0	478	500	
4	3	1	542	500	
9	0	2	501	500	
7	1	3	468	500	
4	3	4	493	500	
3	7	5	522	500	
7	4	6	510	500	
4	9	7	481	500	
7	6	8	504	500	
7	3	9	501	500	
1	9				
1	1		0,478		

Mais ce test d'uniformité n'est pas suffisant pour considérer que l'on a un « bon générateur ». En effet il donnerait le même résultat si par exemple pour l'écran ci-dessus, tous les 0 correspondaient aux 478 premières valeurs, tous les 1 aux 542 valeurs suivantes...

Un test plus efficace est celui dit du « poker ».

On utilisera le livre d'Arthur Engel, *Les certitudes du hasard*, pour le décrire :

Les chiffres à tester sont regroupés par bloc de 5. Il existe 10^5 tels blocs et chacun a donc la probabilité 10^{-5} d'apparaître. Ces blocs de 5 chiffres sont regroupés en 7 catégories dont les probabilités sont calculées. On compare alors ces probabilités avec les fréquences observées.

Le tableau ci-dessous donne la description de ces 7 catégories, lointainement inspirées du poker :

N°	DESCRIPTION	TYPE	EXEMPLE	PROBABILITÉ
1	Chiffres distincts	abcde	34679	0,3024
2	Une paire	aabcd	05609	0,5040
3	Deux paires	aabbc	43354	0,1080
4	Un triplet	aaabc	67669	0,0720
5	Paire-triplet	aaabb	77676	0,0090
6	Quadruplet	aaaab	22212	0,0045
7	Quintuplet	aaaaa	77777	0,0001

On laisse au lecteur le soin de vérifier ces probabilités.

A l'aide de ce tableau théorique et du test du χ^2 , on peut examiner si les décimales de π remplissent bien ce test.

Nous allons reprendre les décimales, que nous avons déjà rangées en paquets de 5 puisque nous les avons écrites en 250 rangées de 5 colonnes.

Il suffit de compter combien de ces paquets contiennent 5 chiffres distincts, une paire,... Bien évidemment ce rangement n'est pas tout à fait aléatoire, mais il nous suffira dans un premier temps (créer un rangement en paquets de 5 plus aléatoire ne présente pas de difficulté majeure de programmation : il suffit de placer les 1250 décimales dans un tableau ; on désigne aléatoirement un indice du tableau et l'on range le contenu dans une cellule. On place alors la dernière case du tableau dans la case maintenant vide, et l'on recommence avec une décimale de moins jusqu'à ce que l'on ait épuisé les décimales).

Il faut donc apprendre au tableur à compter chacun des cas.

Le principe sera le suivant : dans un premier temps nous mettons à 0 les cellules qui contiendront le nombre d'occurrences de chaque type : paire, brelan... (ces valeurs seront rangées tout au long de l'exécution du programme dans un tableau **pok** à 7 cases).

Pour chacune des 250 lignes on place les cinq cellules dans un tableau nommé **table**, tableau que l'on trie de façon à ce que les cellules de même valeur soient placées côte à côte.

```

Sub poker()
Dim table(5) As Variant
Dim table2(5) As Variant
Dim resul(5) As Variant
Dim pok(7) As Variant

For i = 1 To 7
    pok(i) = 0
Next i

```

Appel de la procédure par le mot clé **sub**.
Zone de définition de tableaux avec leur dimension entre parenthèses. On ne fixe pas le type de contenu de chaque tableau (c'est ce que signifie **Variant**)

Initialisation du tableau **pok**.

```

For k = 1 To 250
For i = 1 To 5
    table(i) = Cells(k, i).Value
    resul(i) = 0
    table2(i) = 0
Next i
i = 1
Do While i <= 5
    u = table(i)
    j = i + 1
    Do While j <= 5
        If table(j) = u Then
            v = table(i + 1)
            table(j) = v
            table(i + 1) = u
            j = j + 1
            i = i + 1
        Else
            j = j + 1
        End If
    Loop

```

Pour chacune des 250 lignes, on procède de la même façon.

On range dans **table** les contenus de la ligne et l'on trie **table** de façon à ce que les cellules de même contenu soient contiguës.

Pour chaque valeur différente de **table**, on compte le nombre de fois où elle apparaît, à l'aide d'un tableau **table2**.

```

i = i + 1
Loop
i = 1
Do While i <= 5
    u = table(i)
    For j = 1 To 5
        If table(j) = u Then
            table2(j) = 1
        Else
            table2(j) = 0
        End If
    Next j
    s = table2(1) + table2(2) + table2(3) + table2(4) + table2(5)
    resul(s) = resul(s) + 1
    i = i + s
Loop

```

```

If resul(1) = 5 Then
    pok(1) = pok(1) + 1
End If
If resul(5) = 1 Then
    pok(7) = pok(7) + 1
End If
If resul(2) = 2 Then
    pok(3) = pok(3) + 1
End If
If resul(2) = 1 Then
    If resul(3) = 1 Then
        pok(5) = pok(5) + 1
    Else
        pok(2) = pok(2) + 1
    End If
End If
If resul(3) = 1 And resul(2) = 0 Then
    pok(4) = pok(4) + 1
End If
If resul(4) = 1 Then
    pok(6) = pok(6) + 1
End If
For i = 1 To 7
    Cells(i, 8).Value = pok(i)
Next i
Next k

```

Le tableau **resul** contient 5 cases : la première indique le nombre de valeurs qui n'apparaissent qu'une seule fois dans **table**, la deuxième le nombre de celles qui apparaissent deux fois, la troisième trois fois, etc.

En fonction des valeurs contenues dans **resul**, on peut savoir la structure de **table** et modifier le contenu de **pok**.

Affichage sur l'écran du tableur des résultats.

Et redémarrage de la boucle.

Au bout de quelques secondes, on obtient :

G	H
rien	78
une paire	121
deux paires	24
un brelan	24
un full	2
un carré	1
une quinte	0

En colonne I, on place les probabilités théoriques données plus haut et les effectifs qui correspondent pour 250 lots (le test du Khi-deux ne s'applique impérativement qu'à des effectifs).

I	J
0,3024	75,6
0,504	126
0,108	27
0,072	18
0,009	2,25
0,0045	1,125
0,0001	0,025

Pour appliquer le test du Khi-deux, il faut également que les effectifs de chaque modalités soient supérieurs ou égaux à 5. On procède donc à un regroupement des dernières lignes et l'on applique le test.

G	H	I	J
rien	78		75,6
paire	121		126
2 paires	24		27
autre	27		21,4
test khideux	0,5573		

On peut considérer que les 1250 décimales de π ont passées avec succès le test du poker. Mais est-ce bien sûr ? Notre rangement initial y est-il pour quelque chose ?

Montrons comment nous pourrions distribuer de façon plus aléatoire les 1250 décimales. On commence par renommer la feuille de travail qui contient les 1250 décimales (par exemple « poker et pi ») et une autre feuille, par exemple « poker 2 ». On introduit dans l'éditeur Visual Basic le programme suivant :

```
Sub tri()
Dim decimale(1250) As Variant
Sheets("poker et pi").Select
For k = 1 To 5
  For i = 1 To 250
    decimale(i + 250 * (k - 1)) = Cells(i, k)
  Next i
Next k
```

On entre dans le tableau **decimale** les 1250 décimales qui se trouvent dans la feuille « poker et pi ».

On active la deuxième fenêtre et on initialise les deux variables i et k

```
Sheets("poker 2").Select
i = 1
k = 1
```

Et enfin le corps du programme avec le remplacement des 1250 décimales en 5 colonnes et 250 lignes

```
Do While i <= 1250
  a = Int(Rnd() * (1250 - i + 1)) + 1
  b = decimale(a)
  decimale(a) = decimale(1250 - i + 1)
  q = Int(i / 250)
  r = i - q * 250
  If r = 0 Then
    r = 250
  End If
  Cells(r, k).Value = b
  If r = 250 Then
    k = k + 1
  End If
  i = i + 1
Loop
End Sub
```

Comme on peut le constater ci-dessous, si l'on fait fonctionner l'ensemble des programmes (**tri** puis **poker**) on trouve des résultats tout à fait différents à chaque exécution.

Il est difficile d'en conclure quelque chose concernant les décimales du nombre π , ne serait-ce que du fait du relativement petit nombre de décimales choisies. Toutefois, nous rencontrons une fois de plus la difficulté évoquée plus haut concernant la preuve statistique.

rien	91	0,3024	75,6
une paire	117	0,504	126
deux paires	30	0,108	27
un brelan	11	0,072	18
un full	1	0,009	2,25
un carré	0	0,0045	1,125
une quinte	0	0,0001	0,025
rien	91		75,6
une paire	117		126
deux paires	30		27
autres	12		21,4
test khideux		0,0413	

rien	77	0,3024	75,6
une paire	118	0,504	126
deux paires	34	0,108	27
un brelan	17	0,072	18
un full	2	0,009	2,25
un carré	2	0,0045	1,125
une quinte	0	0,0001	0,025
rien	77		75,6
une paire	118		126
deux paires	34		27
autres	21		21,4
test khideux		0,5018	

Même en tenant compte de l'inévitable fluctuation d'échantillonnages, il semble difficile de conclure sur le comportement des 1250 premières décimales de π vis à vis du test du poker.

Triangles et quadrilatères inscrits dans un cercle et circonscrits à un autre cercle (fin)

Auteur : **Françoise PECAUT**

12 - Quadrilatères interscrits dans deux ellipses co-axiales.

a) Dans cette sous-section, nous avons montré la proposition ci-dessous (voir A.M.V n°6, §12) :

Pour qu'on puisse inscrire un quadrilatère dans deux ellipses co-axiales, $\mathcal{E}(a', b') \subset \mathcal{E}(a, b)$, il faut et il suffit que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, soit $a'^2 b^2 + a^2 b'^2 = a^2 b^2$ ($\alpha = \frac{a'}{a}$, $\beta = \frac{b'}{b}$).

b) Dans cette sous-section, nous avons examiné quelques cas particuliers (voir A.M.V n°6) : l'une des ellipses est un cercle, puis les deux ellipses sont homofocales.

c) Tous les polygones interscrits dans deux ellipses homofocales ont même périmètre, comme nous allons le démontrer ci-dessous.

Rappelons d'abord un théorème (de Poncelet) sur les tangentes issues d'un point P à une conique à centre de foyers F et F'. Soient M et M' les points de contact des deux tangentes issues de P (quand elles existent, distinctes) : les angles (PM, PM') d'une part, (PF, PF') d'autre part, ont mêmes bissectrices (voir fig. 12).

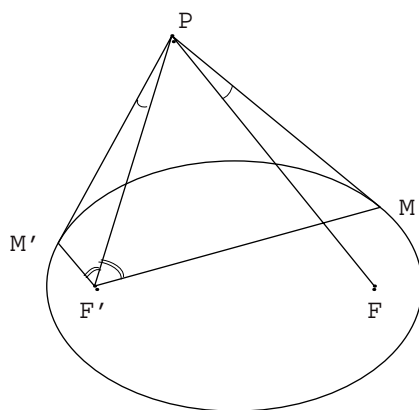


Fig. 12 : Les "petits" théorèmes de Poncelet

Considérons maintenant un polygone A_1, A_2, \dots, A_n à n côtés, inscrit dans deux ellipses homofocales $\mathcal{E}(a', b') \subset \mathcal{E}(a, b)$: en chaque sommet $A_i \in \mathcal{E}(a, b)$, les côtés du polygone qui ont le même point A_i en commun font le même angle avec la tangente à $\mathcal{E}(a, b)$ en A_i , qui est la bissectrice extérieure de l'angle $\angle FA_i F'$. Ainsi se trouvent justifiées les appellations «polygone de lumière» et «trajectoire de billard» (M. Berger, géométrie, 9.4.1 et 9.4.2.).

Admettons le (grand) théorème de Poncelet dans toute sa généralité (cf. A.M.V. n°5, introduction au troisième épisode). Alors tout point voisin de A_i sur $\mathcal{E}(a, b)$ est aussi sommet d'un polygone inscrit à n côtés. Ainsi prend un sens la différentielle de A_i , vecteur $\overrightarrow{dA_i}$ porté par la tangente à $\mathcal{E}(a, b)$ en A_i . Soit \mathcal{P} le périmètre $\sum_{i=1}^n A_i A_{i+1}$ ($A_{n+1} = A_1$).

Désignant par $\vec{u}(A_i, A_{i+1})$ le vecteur unitaire de $\overrightarrow{A_i A_{i+1}}$, on peut écrire la distance $A_i A_{i+1}$ sous forme du produit scalaire $A_i A_{i+1} \cdot \vec{u}(A_i, A_{i+1})$. Alors :

$$d\mathcal{P} = \sum_{i=1}^n \left(\overrightarrow{dA_{i+1}} - \overrightarrow{dA_i} \right) \cdot \vec{u}(A_i, A_{i+1}) + \sum_{i=1}^n \overrightarrow{A_i A_{i+1}} \cdot d\vec{u}(A_i, A_{i+1})$$

La deuxième somme est nulle puisque la différentielle d'un vecteur unitaire a un support orthogonal à ce vecteur. Dans la première somme, groupons les deux termes qui contiennent $\overrightarrow{dA_i}$ (tenant compte aussi de ce que $A_{n+1} = A_1$) :

$$d\rho = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{dA_i} \cdot [\vec{u}(A_{i-1} A_i) - \vec{u}(A_i A_{i+1})] = 0$$

En effet $\vec{u}(A_{i-1} A_i) - \vec{u}(A_i A_{i+1})$ est porté par la bissectrice intérieure de l'angle $\angle A_{i-1} A_i A_{i+1}$ tandis que $\overrightarrow{dA_i}$ est porté par la bissectrice intérieure.

La propriété de périmètre constant pour les polygones inscrits dans deux ellipses homofocales est démontrée.

Dans le cas $n=4$, les quadrilatères inscrits sont tous des parallélogrammes. On pourra vérifier que le rectangle et le losange de la famille ont même périmètre, soit :

$$\left. \begin{aligned} a^2 - b^2 &= a'^2 - b'^2 \neq 0 \\ a' / b' &= a^2 / b^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a' + b' = \sqrt{a^2 + b^2}$$

d) Interscription d'un quadrilatère dans deux ellipses co-axiales qui se coupent (nécessairement en quatre points) :

Jusqu'ici, nous avons supposé $\mathcal{E}(a', b') \subset \mathcal{E}(a, b)$ parce que les calculs du §11, fondés sur la projection conique du §10, exigent $\Gamma(\Omega, \rho) \subset C(O, R)$.

Que signifie donc la condition (8) — trouvée en 12,a) et que nous rappelons ci-dessous : —

$$\beta^4 = (\alpha^2 - 1)^2 \quad (8)$$

lorsqu'il n'en est pas ainsi et que cependant l'interscriptibilité a un sens ?

Ce cas se présente lorsque $\mathcal{E}(a, b)$ et $\mathcal{E}(a', b')$ se coupent en quatre points distincts. Par exemple, si $a' > a$ et $b' < b$, les deux arcs de $\mathcal{E}(a, b)$ extérieurs à $\mathcal{E}(a', b')$ peuvent permettre d'inscrire des quadrilatères à côtés tangents à $\mathcal{E}(a', b')$. Alors $\alpha > 1$, $\beta < 1$, et la condition d'interscriptibilité (8) s'écrit $\alpha^2 - \beta^2 = 1$, $\alpha^2 < 2$.

On pourrait donner des arguments fondés sur des calculs dans le corps des complexes, utilisant les racines p et q (imaginaires conjuguées) de l'équation (4) du §10, dont la partie imaginaire est non nulle puisque $\Delta < 0$ pour $R - \rho < d < R + \rho$.

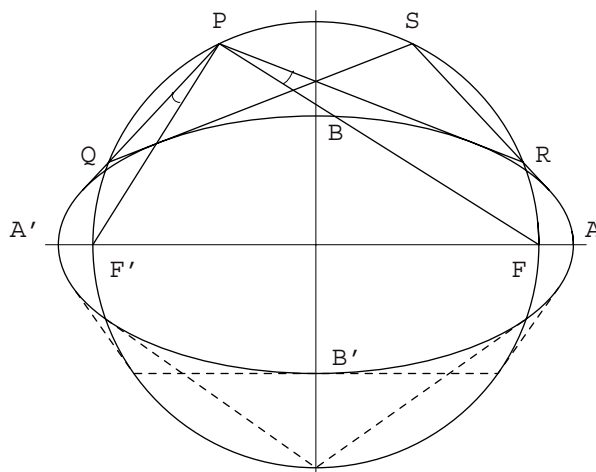


Fig. 13 : Contre-parallélogramme inscrit.

Mais il nous paraît plus conforme à l'esprit de ce travail de montrer directement que la relation $\alpha^2 - \beta^2 = 1$ implique, pour $1 < \alpha < \sqrt{2}$, que les ellipses $\mathcal{E}(a, b)$ et $\mathcal{E}(a', b')$ se coupent en quatre points et permettent l'interscription de quadrilatères.

Démonstration :

On ne restreint pas la généralité en supposant (fig.13) que $\mathcal{E}(a, b)$ est un cercle de rayon r , $a'^2 - b'^2 = r^2$. En effet, dans le cas général, on peut appliquer une affinité dont l'axe est l'un des axes communs aux deux ellipses, qui transforme $\mathcal{E}(a, b)$ en cercle. Une telle affinité ne change ni α , ni β , ni l'interscription.

Soit P un point de l'un des arcs du cercle extérieurs à l'ellipse. Les tangentes issues de P à $\mathcal{E}(a', b')$ recoupent le cercle $C(O, r)$ en Q et R. Le cercle $C(O, R)$ coupe le grand axe de l'ellipse aux foyers F et F' de celle-ci, à cause de la relation $a'^2 - b'^2 = r^2$. Grâce au petit théorème de Poncelet rappelé plus haut (§12,c), les angles $\angle QPF'$ et $\angle FPR$ sont égaux, et l'arc de cercle $\widehat{F'Q}$ est égal à l'arc de cercle \widehat{FR} . Il s'ensuit que Q et R sont symétriques par rapport à la médiatrice de [FF']. Soit S le symétrique de P par rapport à cette même droite. Les tangentes issues de S à $\mathcal{E}(a', b')$ sont respectivement les droites symétriques des tangentes menées par P ; elles passent donc l'une par Q, l'autre par R.

Nous avons ainsi prouvé que le contre-parallélogramme PQSR est interscrit. Tout autre point de l'arc de cercle où a été choisi P est, de même, sommet d'un contre-parallélogramme interscrit. La figure 13 montre en pointillés les deux quadrilatères pliés interscrits, sur l'autre arc de cercle extérieur à $\mathcal{E}(a', b')$ (cf. A.M.V. n°4, fig.7).

13 - Triangles interscrits dans deux ellipses co-axiales.

Le lecteur pourra vérifier les résultats suivants :

a) $R^2 - d^2 = 2 \rho R$ se transforme par les formules (7) du §11 en $(\alpha - 1)^2 = \beta^2$.

Pour deux ellipses coaxiales $\mathcal{E}(a', b') \subset \mathcal{E}(a, b)$ (α et β sont tous deux inférieurs à 1) cette relation équivaut à $\alpha + \beta = 1$ (on rappelle que $\alpha = \frac{a'}{a}$, $\beta = \frac{b'}{b}$).

b) Pour deux ellipses coaxiales $\mathcal{E}(a', b') \subset \mathcal{E}(a, b)$ admettant des triangles interscrits :

- $\mathcal{E}(a, b)$ est un cercle de rayon $r \iff a' + b' = r$
- $\mathcal{E}(a', b')$ est un cercle de rayon $r \iff \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{r}$
- $\mathcal{E}(a', b')$ et $\mathcal{E}(a, b)$ sont homofocales $\iff \frac{a'^2}{b'^2} = \frac{b+b'}{a+a'} \frac{a'}{b'}$

c) Tous les triangles interscrits dans deux ellipses homofocales $\mathcal{E}(a', b') \subset \mathcal{E}(a, b)$ ont le même périmètre $2\mathcal{P}$ où $\mathcal{P}^4 = \frac{[(a+a')(b+b')]^3}{a'b'}$.

d) Pour deux ellipses coaxiales ayant quatre points communs distincts, par exemple $\alpha > 1$, $\beta < 1$, la relation $(\alpha - 1)^2 = \beta^2$ s'écrit $\alpha - \beta = 1$, $\alpha < 2$. Quand cette condition est remplie, tout point d'un arc de $\mathcal{E}(a, b)$ extérieur à $\mathcal{E}(a', b')$ est sommet d'un triangle interscrit (voir fig.14 le cas $a' - b' = r$).

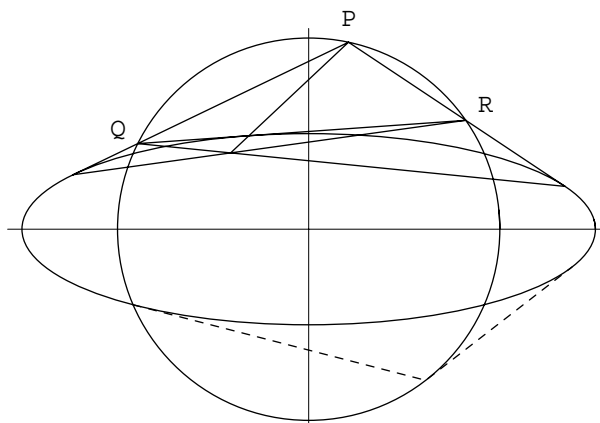


Fig. 14 : Triangle PQR interscrit entre cercle et ellipse sécants.

e) Pour tout triangle interscrit, les droites joignant un sommet du triangle au point de contact du côté opposé sont concourantes.

14 - Conclusion.

Tout au long de ces cinq épisodes, nous avons démontré le théorème de Poncelet, dit grand théorème de Poncelet, dans des cas particuliers : pour les polygones, on s'est borné aux cas des triangles et des quadrilatères, et pour la paire de coniques, on s'est borné à une paire de cercles, ou à une paire d'ellipses de mêmes axes.

Les démarches sont naïves et élémentaires. Beaucoup de détails ont été donnés, et pourtant des questions se posent encore, et le lecteur a été souvent convié à expliciter ou à prolonger ce qui est écrit.

On peut espérer paradoxalement que malgré le parti pris d'un texte qui se suffit à lui-même, ces pages auront surtout convaincu de l'intérêt d'une vraie démonstration dans le cadre d'une théorie adéquate.

C'est pourquoi je termine par une bibliographie succincte. J'invite ceux qui apprécient la pédagogie «hands on» (la main à la pâte) à se plonger dans les écrits originaux de Poncelet.

Bibliographie.

M.BERGER : Géométrie. Nathan, Paris 1990.

H.J.M. BOS, C.KERS, F.DORT and D.W. RAVEN : Poncelet's closure theorem, *Expositiones Mathematicae* 5, 289-364 (1987).

P.A.GRIFFITHS : Variations on a theorem of Abel. *Inventiones Mathematicae*,35,321-390 (1976).

P.A.GRIFFITHS and J.HARRIS : On Cayley explicit solution to Poncelet's porism. *L'enseignement mathématique*,24, 31-40 (1978).

MATHEMATICAL INTELLIGENCER : Poncelet theorem revisited vol.20,n°4,31-32 (1998).

J.V. PONCELET : *Traité des propriétés projectives des figures*, deuxième édition. Gauthier-Villars 1865 (première parution en 1822).

J.V. PONCELET : *Applications d'Analyse et de Géométrie qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figures*, Mallet-Bachelier (1862), Gauthier-Villars (1864) (2 vol.).

D.ZVONKINE : *Courbes elliptiques dans la géométrie élémentaire*. Quadrature n°27, Argenteuil 1997.

Fin du cinquième et dernier épisode.

L'agenda du prof de maths

Si vous avez connaissance près de chez vous (même un peu plus loin . . .) de manifestations à caractère pédagogique ou/et scientifique dignes d'intérêt, n'hésitez pas à nous le faire savoir en contactant la rédaction du bulletin (e-mail : ypoit@gulliver.fr).

Les conférences APMEP/IPR/IREM/IUFM

Voici le programme des conférences du second trimestre 2001-2002, organisé par la « famille mathématique » de l'académie (APMEP/ IREM / Inspection Régionale / IUFM) :

- ❑ Mercredi 9 janvier 2002, 15h à 17h, au Lycée Émile Zola, Aix-en-Provence :
JOËL MERKER (Université de Provence/CNRS) : Complexité inattendue de problèmes mathématiques simples.
- ❑ Mercredi 6 mars 2002, 15h à 17h, au Lycée de Luynes :
ROBERT ROLLAND (Université de Provence) : Exemples d'algorithmes. Preuves d'existences et constructions effectives d'objets.
L'adresse du lycée de Luynes : 200 rue Georges Duby, 13080, Luynes.
- ❑ Mercredi 27 mars 2002 (Le lieu et l'heure restent à définir) :
ANDRÉ BONNET (Université de Provence) : Du problème du tonneau à la fonction exponentielle : une introduction de la fonction exponentielle dans l'esprit des nouveaux programmes de terminale S.

Séminaire d'Histoire des sciences mathématiques et physiques. Enquête sur les mathématiques : épistémologie, histoire, sociologie.

MM. Éric BRIAN, Alain MICHEL et Claude ROSENTAL
Centre de la Vieille Charité
13002 Marseille
Tél. 0491140727 - Fax 0491913401
Salle B, porte 208 (sous réserve)

- ❑ Mercredi 16 janvier 2002 :
ÉRIC BRIAN (Centre A.Koyré, EHESS) : « Calcul des probabilités au XVIII^e siècle et estimation de la population ancienne auXX^e siècle. »
- ❑ Mercredi 20 février 2002 :
YVES GINGRAS (UQAM) : « Les effets de la mathématisation de la physique. »
- ❑ Mercredi 20 mars 2002 :
MARYVONNE SPIESSER (Toulouse) : « Arithmétique pratique, arithmétique savante à l'aube de la Renaissance : l'exemple des arithmétiques commerciales dans le Sud de la France. »
- ❑ Mercredi 17 avril 2002 :
IAN HACKING (Collège de France) : « L'émergence des probabilités. »
- ❑ Mercredi 15 mai 2002 :
HÉLÈNE GISPERT (Paris) : « (Titre à annoncer) »
- ❑ Mercredi 19 juin 2002 :
CLAUDE ROSENTAL (SHADYC, CNRS-EHESS) : « Explorations logico-spaciales à la Nasa. Vers une sociologie historique du travail démonstratif. »

L'association « Échange et diffusion des savoirs »

Cette association organise depuis deux saisons à l'Hôtel du département des Bouches-du-Rhône des conférences de haut niveau ouvertes au public et libres d'accès, poursuivant un objectif à la fois simple, nécessaire et ambitieux : populariser et démocratiser l'accès aux savoirs sans jamais céder sur la qualité intellectuelle des interventions.

La saison qui vient propose deux cycles de conférences aux thèmes ancrés dans les préoccupations contemporaines. L'un s'intéresse aux « figures du temps », le second cycle de conférences portera sur les « figures de la science ».

Pour tous renseignements, s'adresser à : Cécile Arnold, chargée de communication.
Echange et Diffusion des savoirs, 16 rue Beauvau 13001 Marseille. Téléphone : 04 96 11 24 50 ; Télécopie : 04 96 11 24 51 ; email : cecile.arnold@des-savoirs.org

Voici le cycle : « Figures de la science » (conférences en libre accès) :

- ❑ Jeudi 31 janvier 2002 :
JEAN-PIERRE LUMINET : « Figures du ciel : de l'harmonie des sphères à l'Univers chiffonné »
- ❑ Jeudi 28 février 2002 :
ALAIN PROCHIANTZ : « Les métamorphoses de la machine-esprit »
- ❑ Jeudi 18 avril 2002 :
MICHAEL SINGLETON : « Vive la différence ! »
- ❑ Jeudi 25 avril 2002 :
AHMED DJEBBAR : « Les sciences arabes et leur circulation autour de la Méditerranée (IXe-XVe siècles) »
- ❑ Jeudi 16 mai 2002 :
MICHEL GOURINAT : « La conception nietzschéenne de la science »
- ❑ Jeudi 23 mai 2002 :
GIORGIO ISRAEL : « Le mysticisme de la Kabbale et le rationalisme scientifique »