

Aix Marseille Vert

Bulletin de la régionale APMEP d'Aix-Marseille

*Magazine trimestriel paraissant quatre fois par an
N°6 (Octobre, Novembre, Décembre 2001)*

a
p
m
e
p

- **Éditorial**
(Catherine DUFOSSÉ)
- **Changement de cap pour le bulletin
Aix Marseille Vert**
- **L'épreuve anticipée de mathématiques
en première L au bac 2001**
- **La simulation en statistique**
(Bernard EGGER)
- **Triangles et quadrilatères inscrits dans un cercle
et circonscrits à un autre cercle**
(Françoise PÉCAUT)
- **Le cube moyen**
(Catherine DUFOSSÉ)
- **Lu pour vous**
- **L'agenda du prof de maths**

Siège de l'Association :

A.P.M.E.P. Régionale d'Aix-Marseille
Université de Provence UFR MIM
3, Place Victor Hugo
13331 MARSEILLE Cedex 3
Tél : 04 91 10 61 06
Fax : 04 91 10 61 24

Comité de rédaction du bulletin de la régionale

Direction de la publication : André Bonnet
Rédaction et réception des articles : Yvon Poitevineau

AIX MARSEILLE VERT

Bulletin de la régionale A.P.M.E.P. d'Aix-Marseille
Imprimé au siège de l'Association
N° ISSN : 0756-8991
Dépôt légal : Janvier 2000
Ce numéro a été tiré à 400 exemplaires.

Éditorial

Catherine DUFOSSÉ

Rentrée 2001 ...

Ca y est, c'est reparti, et l'année scolaire est déjà bien commencée, la première qui soit inscrite tout entière dans le nouveau millénaire. On aurait envie d'annoncer en fanfare : l'École s'engage dans le Nouveau Millénaire, sonnez trompettes !

La réalité est moins enthousiasmante ... Les horaires de mathématiques sont grignotés chaque année au collège comme au lycée et de nouveaux programmes sont mis en place sans que rien ne soit fait pour s'assurer partout de leur faisabilité.

L'incohérence de la mise en place des TPE en terminales frise le scandale : à l'heure actuelle, beaucoup de professeurs ont comme moi et conformément aux directives officielles, une heure dans leur service pour faire des TPE en Terminale, mais pas d'élèves, ou quasiment pas, toujours conformément aux directives officielles ...

Ainsi, les enseignements les plus fondamentaux ont été rognés pour laisser la place aux TPE, qui n'existent pas ou à peine ! Je suis peut-être simpliste, mais la logique de tout ceci m'échappe, et je me sens un jouet dont on se moque aux mains de nos politiques ...

Au collège, on attendait de grandes choses, et au moins quelques idées pour sortir le collège unique de son ornière. Mais non, les effets de manche passés, rien n'a bougé en cette rentrée. Pas de vagues !

C'est ainsi que le chantier du bac n'avance pas, et les représentants de l'APMEP dans les commissions de réflexion sur le sujet ne peuvent que constater ce sur-place ...

L'année 2002 sera une année électorale, qu'on se le dise, et l'évolution nécessaire de l'École attendra des jours meilleurs. Alors, chacun dans sa classe fait le dos rond et invente tout seul des solutions, parce que les difficultés, elles, sont toujours là, et n'attendent pas les élections. Mais soyons positifs ! Les mathématiques sont toujours aussi belles et le montrer à nos jeunes est toujours aussi passionnant : Aide-toi, le ciel t'aidera, dit le proverbe.

Alors, nous nous aidons cette année encore en participant à la mise en place d'une série de conférences : celles de la « famille mathématique » de notre académie (APMEP, IREM, IPR, IUFM) ; et en outre, en organisant à cette occasion une série d'ateliers ou de rencontres. (Voir le programme à la rubrique « L'agenda du prof de maths »). Devant l'urgence, nous avons décidé de mettre la priorité sur les plus importantes nouveautés des programmes de lycée, sur les sujets les plus méconnus. Nécessité fait loi, et nous restons décidés, envers et contre tout, à faire le maximum pour nos élèves.

C'est que le monde que nous allons leur laisser semble bien terrifiant en ce début d'automne, et tout ce que nous pouvons faire pour eux, nous les profs, c'est de les préparer le mieux possible à faire face aux difficultés les plus inattendues. L'École porte la responsabilité de cette formation, et plus que jamais, son rôle apparaît primordial pour préparer l'avenir. Nous le savons de longue date, mais nous aimerions que d'autres en prennent conscience, et fassent ce qu'il faut pour nous donner les moyens d'assurer au mieux cette charge.

Changement de cap pour le bulletin Aix Marseille Vert

Yvon POITEVINEAU

Chers lecteurs

Vous avez dû remarquer, en recevant votre numéro 6 d'Aix Marseille Vert, un changement de présentation. Certes, le format « de poche » des cinq premiers numéros nous semblait bien séduisant, mais la Régionale ne pouvait plus en supporter le coût pour une expédition gratuite à tous les adhérents (il faut savoir le timbrage à lui seul représentait plus de 50% du prix de revient).

Aussi, c'est la dernière fois que vous recevez ainsi le bulletin (gratuitement pour les adhérents, moyennant une modique somme pour les abonnés) ; en outre, nous vous le présentons sous un format « A4 » plus dépouillé, tel que vous pourrez vous le constituer à l'avenir, en le téléchargeant à partir de notre site internet et en l'imprimant vous-même.

Le site internet de La Régionale ; parlons-en maintenant. Vous le trouverez à l'adresse :

<http://www.apmep-aix-mrs.org>

Il est encore peu développé, et la page d'accueil ne vous mènera guère qu'au bulletin Aix Marseille Vert (accès direct : *<http://www.apmep-aix-mrs.org/bulletin>*).

À partir de là, plusieurs possibilités vous seront offertes :

1. Consulter directement le bulletin en ligne au format HTML. Vous pouvez aussi « l'aspirer » à l'aide de votre navigateur s'il le permet, ou d'un utilitaire, afin de pouvoir le consulter hors connexion.
2. Consulter le bulletin en ligne au format PDF dans une nouvelle fenêtre. Pour cela, vous devez posséder le programme ACROBAT READER d'Adobe Corporation. (S'il n'est pas installé sur votre machine, vous pourrez à partir de notre site, le télécharger très rapidement).
Le format PDF permet une lecture plus agréable des textes mathématiques et des images, et la fenêtre dispose de boutons de navigation spécifiques. Vous pouvez aussi enregistrer l'article sur votre disque sous ce format, ou l'imprimer.
3. Télécharger directement les articles qui vous intéressent sur votre disque. Il se présentent sous la forme d'un fichier compressé d'extension « .zip » et une fois décompressés¹, vous obtenez un fichier au format PDF, que vous pourrez consulter à l'aide d'ACROBAT READER.
4. Télécharger l'ensemble du bulletin, au format « .zip » ; une fois décompressé, vous obtenez un fichier au format PDF et si vous l'imprimez, vous reconstituez un bulletin tel que celui-ci.

Enfin, me direz-vous, et si mon allergie à tout ce qui touche à l'informatique et à l'internet persiste, ou bien si l'imprimerie, ça n'est vraiment pas mon truc, que faire ?

Alors ce n'est pas si grave ; il faut nous écrire :

Yvon Poitevineau - 213 Chemin du vallon de l'amandier - 13 190 Allauch

pour demander un abonnement d'un an, et envoyer un chèque de 6€ libellé au nom de la Régionale d'Aix-Marseille APMEP - CCP 289482 U Marseille, à l'adresse de notre trésorier :

Joël Denizot - 34, Boulevard Merle - 13 012 Marseille

Enfin, pour que notre bulletin continue à vivre, il faut nous aider à l'alimenter.

Les propositions d'articles sont naturellement les bienvenues ; le bulletin ne pourra pas survivre si vous ne nous aidez pas. Ces articles peuvent porter sur un travail ou une expérience à caractère pédagogique, un travail de réflexion ou de recherche en mathématiques ou un simple mot d'humeur.

Pour proposer un article, il suffit de contacter la rédaction du bulletin (mail : ypoit@gulliver.fr).

Enfin, n'hésitez pas à nous écrire (même adresse) pour nous faire part de vos remarques et suggestions sur le site et le bulletin, et n'hésitez pas à nous signaler toutes les erreurs que vous pourriez découvrir.

1. Pour décompresser le fichier, il vous faudra un programme tel que WINZIP, ZITIT etc. ; nous allons dès que possible mettre en ligne des fichiers auto-décompressables.

L'épreuve anticipée de mathématiques en première L, au bac 2001

Les fédérations de parents et la réalité de la réforme ...

Voilà où mène fatalement une réforme menée à la va-vite ! Il s'agit ici du bac L de Première, en maths-info. Sa première année de mise en place l'an dernier a été un exercice d'acrobatie sans filet, de système D, d'invention continuelle, individuelle ou en groupe ...

Que des collègues aient refusé de jouer ce jeu-là était inévitable, j'ai été surtout surprise de la quantité de ceux qui l'ont joué, et de la qualité de ce qu'ils ont produit. Mais je vous laisse apprécier !

La scène se passe dans l'académie de Lille, (où auront lieu les Journées Nationales de l'APMEP fin Octobre ...). Ce sont les Fédérations de parents qui s'insurgent, oubliant que c'est pour beaucoup leur soutien qui a permis à Allègre de faire passer à la hussarde ces nouveautés mal préparées !! Le problème qu'elles soulèvent ne me semble pas mineur, quel que soit le sujet de bac proposé, et même s'il tentait de limiter les dégats ...

A méditer ! et bonne lecture !

Catherine DUFOSSÉ

Peut-on encore faire confiance à l'Éducation Nationale ? (Communiqué de presse)

Mercredi 13 juin, dans l'après-midi, ont eu lieu les épreuves anticipées de mathématiques et informatique pour les élèves de première des sections littéraires (L). À l'issue de ces épreuves, les élèves du lycée Pasteur de Lille sont sortis désarmés d'avoir eu des questions relatives à des connaissances en informatique. Ils en ont alerté leurs parents qui, lors d'une rencontre vendredi soir avec deux professeurs de mathématiques et le proviseur du lycée, ont eu confirmation que l'enseignement d'informatique n'avait pas pu être assuré.

Les raisons invoquées sont :

- le manque de formation de ces enseignants qui se disent en difficulté pour prendre en charge un enseignement dont les directives et les programmes leur ont été communiqués le 30 août 2000,
- une installation des matériels informatiques incompatible avec un véritable encadrement des lycéens,
- la parution tardive des manuels (avril 2001),
- l'inexistence de sujets types préparatoires. Depuis le début de l'année scolaire, aucun Inspecteur Pédagogique Régional n'a organisé de rencontre pour assurer la mise en place de cette nouvelle réforme, et le courrier envoyé par l'un des professeurs du lycée pour exprimer ses difficultés est resté sans réponse.

Les 2 associations de parents d'élèves du lycée (F.C.P.E. et P.E.E.P.) dénoncent les carences d'un système scolaire qui ne permet pas aux jeunes de composer, avec les mêmes chances de réussite, sur un sujet du baccalauréat relevant de programmes nationaux. Les parents ont donc pris la décision de solliciter un rendez-vous avec le Recteur de l'Académie de Lille pour demander la non prise en compte des questions faisant l'objet du litige (Exercice 1, questions 2 et 3) dans la correction de cette épreuve qui, dans sa préparation n'a pas respecté le principe d'égalité républicaine de traitement pour tous les candidats.

C'est donc une remise en cause des principes fondamentaux de l'École Publique ; ce sont les élèves qui en sont les premières victimes, notamment les plus démunis. Les associations se réservent la possibilité d'un recours en Tribunal Administratif pour annulation, si leur demande n'était pas satisfaite.

Compte-rendu de la rencontre avec M. le Recteur (mercredi 20 juin 2001 à 16 h)

Rapporté par Mme Jocelyne Dubois, Présidente parents d'élèves (FCPE) et Mr Gilles Dos Santos, Président parents d'élèves (PEEP).

À cette entrevue étaient présents M. FORTIER, Recteur de l'Académie de Lille, M. COLET, I.P.R. de Mathématiques, M. LE MOAL, Proviseur du Lycée Pasteur de Lille et les représentants des deux associations de parents d'élèves, M. DOS SANTOS (PEEP) et Mme DUBOIS (FCPE).

À notre grande surprise, les premières paroles du Recteur furent prononcées sur un ton très autoritaire. Elles mettaient en évidence un mécontentement devant notre communiqué de presse. Les deux représentants des associations de parents d'élèves laissèrent M. FORTIER terminer son « discours d'accueil » puis M. DOS SANTOS (PEEP) souhaita faire connaissance avec les personnes présentes. Il nous fut ensuite fait le reproche de paroles diffamatoires dans notre communiqué de presse, d'erreurs de compréhension dues à un « faux sens », selon M. le Recteur.

Des explications plus précises furent données par M. COLET (IPR) :

- le manque de formation des enseignants et l'inexistence de sujets types préparatoires sont sans fondement. Les enseignants avaient accès, sur Internet, à l'ensemble des informations nécessaires à la fois pour l'enseignement du programme, et pour la préparation des élèves à l'épreuve. Les IPR n'ont pas organisé de réunion pour la mise en place des nouveaux programmes. Ils n'ont aucune obligation de le faire. Ils n'ont d'ailleurs pas reçu le courrier envoyé en septembre 2000, sous couvert du chef d'établissement, par l'un des professeurs de mathématiques.

- si l'intitulé du sujet est : « Épreuve anticipée de mathématiques-informatique », les deux questions faisant l'objet du litige (voir sujet, questions 2-a, 2-b et 3-a), ne font en aucun cas référence à des connaissances en informatique.

- si le B.O. du 31 août 2000 précise dans la présentation générale du programme : « Il intègre, comme son intitulé mathématiques-informatique le suggère, une dimension informatique en proposant systématiquement une mise en oeuvre sur tableur des différents paragraphes », en aucun cas notre remarque évoquant l'absence totale d'utilisation de matériel informatique par les élèves de deux classes du lycée ne peut être associée à des difficultés que les élèves auraient rencontrées pendant les épreuves ! Chaque professeur est libre du choix de sa méthode pédagogique, et l'ensemble du programme de 1ère L pouvait être traité sans utiliser à aucun moment un ordinateur ! D'autre part les manuels ne sont pas forcément indispensables à la formation.

M. le Recteur réaffirme sa totale confiance envers les enseignants du Lycée Pasteur. Il signale également aux parents que, s'ils ne sont pas satisfaits de l'enseignement public, ils peuvent toujours inscrire leurs enfants dans un établissement privé ! Devant notre insistance à souligner l'injustice dont ont été victimes les élèves du Lycée Pasteur, M. le Recteur nous signale que les corrections sont déjà commencées et que les premières constatations sont optimistes. Globalement les résultats seraient meilleurs que les années précédentes dans les sections L. Les deux questions posant problème auraient été plutôt bénéfiques. Cependant, lors de la réunion d'harmonisation des notes une analyse statistique évaluera si les élèves du Lycée Pasteur ont eu des notes inférieures à celles des élèves des autres lycées et s'il s'avérait qu'après harmonisation certains élèves aient encore des notes très basses une appréciation accompagnera la note.

Cette confrontation nous a permis de mesurer quel était l'état d'esprit des autorités pédagogiques de notre académie. Nous laissons chaque parent juger de l'attitude qu'il doit avoir pour son enfant, sachant que le recours en tribunal administratif est toujours possible et que les associations de parents d'élèves sont là pour leur apporter une aide dans ce genre de situation. D'autre part nous envoyons ces documents aux associations de spécialistes : l'IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) et l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public).

J. DUBOIS Présidente de la FCPE Pasteur Lille

Voici enfin la réponse de Jean-Paul Bardoulat, président de l'APMEP pour l'année 2001-2002, au courrier des mêmes :

Jean-Paul BARDOULAT
Président de l'APMEP

à
Madame Jocelyne DUBOIS
Monsieur Gilles DOS SANTOS

Je vous remercie de m'avoir transmis votre courrier au recteur de l'académie de Lille, le compte rendu de l'audience et votre communiqué de presse. Peut-être pourrons nous échanger plus longuement sur ce problème, et bien d'autres, les 29, 30 et 31 octobre prochain lors des journées nationales de l'APMEP qui auront lieu à Lille et où je vous accueillerai bien volontiers. J'espère que grâce à la mansuétude des correcteurs les candidats n'auront pas été pénalisés.

Nous connaissons bien à l'APMEP la situation que vous avez fort bien décrite : le manque d'information et de formation des professeurs, l'absence de manuels, d'annales ou de sujets types et l'insuffisance d'équipement des établissements. Pour y pallier, un important groupe de collègues de toute la France et même de l'étranger, tout aussi démunis que ceux de Lille, ont mis leurs compétences et leurs efforts en commun et dans le cadre de l'APMEP. Ils ont échangé par courrier électronique leurs difficultés, leurs activités leurs sujets de devoirs . . .

Bien sûr cela ne dispense en rien l'éducation nationale de ses devoirs les plus élémentaires et il est navrant de constater que le recteur et l'IPR de mathématiques s'abritent aussi facilement derrière les textes et les possibilités de formation par internet en oubliant (volontairement?) à quel point elles sont limitées. C'est une bien curieuse utilisation du progrès !

Ce n'est pas par corporatisme ou par esprit de corps que je vous invite à réfléchir avant d'engager des poursuites, il serait cependant regrettable qu'elles se retournent contre des collègues dont la bonne volonté ne semble pas être mise en cause. Cette situation met en évidence l'importance et la nécessité d'une meilleure collaboration entre les parents et les enseignants, entre les fédérations de parents et les associations de spécialistes, en particulier l'APMEP. Nous avons un objectif essentiel commun : assurer la meilleure formation possible pour chaque adolescent et lui donner ainsi un maximum de chances pour affronter l'avenir. Nos revendications pour l'évolution de l'enseignement sont trop peu souvent entendues, avec l'aide et le soutien des parents elles auraient, sans aucun doute, plus de chances d'aboutir. Ne rentrons pas dans le jeu des responsables du système éducatif qui ont peut-être intérêt à nous opposer.

En espérant que les candidats de ce lycée et de toute l'académie de Lille auront eu de bons résultats à cette épreuve, je vous prie d'agréer, madame, monsieur, l'expression de ma considération distinguée.

Jean-Paul BARDOULAT

La simulation en statistique (suite)

Bernard Egger

Résumons-nous : pour « construire le hasard », il est courant d'employer des suites récurrentes « chaotiques ». De telles suites, phénomènes purement déterministes comme toute suite récurrente, ont l'étrange propriété de ressembler terriblement à ce que l'on attend du hasard. Cette similitude nous intéresse d'autant plus qu'elle n'est pas seulement d'ordre graphique. Il est par exemple courant de se demander que la variable aléatoire qui à un nombre obtenu par cette suite associe le chiffre d'un rang donné dans ce nombre suit bien une loi uniforme. On pourrait tout aussi bien vouloir construire une suite qui permettrait d'avoir une loi binomiale, une loi de Poisson, ou une loi normale.

Dans tous les cas, nous construisons des générateurs de nombres aléatoires ou plutôt pseudo-aléatoires, qu'il est important de tester, pour savoir s'ils sont conformes à notre attente. Indépendamment des tests, nous avons vu dans l'article précédent qu'un grain de sable pouvait surgir à l'insu de l'utilisateur : la cyclicité du générateur. Le problème est d'importance : un test peut se révéler adapté si on l'effectue sur de petits échantillons, et totalement inadapté si on le fait fonctionner sur un échantillon important : nous avons vu que la suite proposée dans le magazine 3'33 était périodique avec une période de 100000. Nous voici bien loin du hasard ! Il n'y a d'ailleurs dans le cadre des suites chaotiques aucune solution évidente : votre calculatrice, ou le logiciel Excel utilisent des nombres décimaux d'une longueur maximale donnée. Quel que soit celui dont on part, il arrivera un moment où nous aurons épuisé tous les nombres possibles, et la suite étant récurrente, totalement déterministe, un nouveau cycle démarrera. La question principale est alors de construire des générateurs dont le cycle est le plus long possible. 100000 c'est vraiment court !

Nous aborderons dans un prochain article les réponses qui sont le plus fréquemment apportées à cette question. Pour le moment revenons aux tests.

La dernière fois nous avons examiné l'uniformité. Elle constitue souvent le minimum exigible. De façon plus élaborée on peut tester des situations faisant appel à l'équiprobabilité mais moins directement que dans la répartition uniforme. Le principe général en est le suivant : retrouver des résultats théoriques connus (en tenant compte de l'imprécision produite nécessairement par la fluctuation d'échantillonnage). Bien entendu dans un second temps, les mêmes procédés pourront être utilisés pour mettre les élèves sur la voie de ces probabilités.

Un exemple simple est constitué par une situation de Bernoulli. Prenons un cas classique : un questionnaire comprend 9 questions, comportant chacune trois réponses possibles, une seule étant exacte. On répond au hasard. On sait que la variable aléatoire X qui donne le nombre de réponses justes suit une loi binomiale de paramètres 9 et $\frac{1}{3}$. Son espérance mathématique vaut donc 3. 1000 candidats vont répondre aléatoirement au questionnaire. On se propose de simuler cette situation et de « vérifier expérimentalement » que la moyenne des réponses justes est proche de 3.

Les générateurs de nombres pseudo-aléatoires des calculatrices ou des tableurs retournent habituellement des nombres compris entre 0 et 1. Il y a trois réponses possibles ; deux sont fausses. On notera 0 la réponse juste et 1 une réponse fausse. Pour chaque question, il faut obtenir une simulation (c'est-à-dire une variable aléatoire) qui retourne 0 ou 1 avec « deux fois plus de 1 que de 0 ». Si x est un nombre compris entre 0 et 1, $\text{PARTIE_ENTIÈRE}(3x)$ est soit 0, soit 1, soit 2. Soit y l'un de ces trois entiers, alors $\text{PARTIE_ENTIÈRE}(y/2 + 0,5)$ vaut 0 quand y vaut 0 et vaut 1 si y vaut 1 ou 2. On compose tout cela et l'on prend $x = \text{ALEA}()$ (nombre aléatoire). On a comme instruction :

$\text{PARTIE_ENTIÈRE}(\text{PARTIE_ENTIÈRE}(3 * \text{ALEA}()) / 2 + 0,5)$

A1									
A	B	C	D	E	F	G	H	I	
0	1	0	1	1	0	1	1	1	1

Il ne reste plus qu'à « compter » le nombre de 0, ou plutôt qu'à apprendre au tableur à compter. L'instruction « NB.SI » permet de compter le nombre d'occurrences de *variable* dans la plage : $\text{plage}(\text{NB.SI}(\text{plage} : \text{variable}))$.

Par exemple avec ces nouvelles données :

J1	=NB.SI(A1:I1;0)									
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2

Il ne reste plus qu'à recopier cette première ligne jusqu'à la millième ligne

990	1	1	0	1	1	0	1	0	0	4
991	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
992	1	1	0	0	0	0	1	1	1	4
993	0	1	0	1	1	1	1	1	1	2
994	0	1	1	1	1	1	0	1	0	3
995	1	0	0	1	0	0	1	0	1	5
996	1	1	0	1	1	0	1	0	0	4
997	1	1	0	0	1	0	0	0	1	5
998	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0
999	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1000	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1

On peut alors calculer la moyenne de la colonne J.

=MOYENNE(J1:J1000)			
D	E	F	G
3,032			

Ce résultat paraît satisfaisant. Son utilisation pédagogique aussi ! L'espérance est proche de 3 ce qui rend « facilement » identifiable à $\frac{1}{3}$.

D'un point de vue plus théorique, on peut se demander si ce résultat est « suffisamment » proche de 3. Le nombre de réponses justes à chaque questionnaire est une variable aléatoire de moyenne 3 et de variance 2.

Le théorème de la limite centrée permet de dire alors que la variable aléatoire qui à chaque échantillon de 1000 questionnaires associe le nombre moyen de réponses justes par questionnaire suit une loi normale de moyenne 3 et d'écart-type $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1000}}$. 95 % des échantillons de 1000 questionnaires auront donc un

nombre moyen de réponses justes compris entre $3 - 1,96 \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1000}}$ et $3 + 1,96 \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1000}}$, c'est-à-dire environ entre 2,91 et 3,09. Le résultat obtenu de 3,032 est conforme à cette attente. Le générateur de nombres pseudo-aléatoires d'Excel « résiste » bien à ce test.

Mais on peut aller plus loin. Il est en effet très facile de déterminer combien chacune des valeurs entre 0 et 9 apparaît dans la plage des 1000 résultats. On en déduit aisément la fréquence de chacune d'elles.

Or nous connaissons (les élèves pas encore si l'on utilise l'activité comme découverte), les résultats théoriques fournis par la loi binomiale. Voilà une bonne occasion d'utiliser un test du Khi-deux. Ce test ne s'utilisant qu'avec des effectifs, nous ramenons les fréquences et autres probabilités à des effectifs dont le somme vaut 1000.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	26	135	229	257	208	100	32	12	1	0
3	26	117,1	234,1	273,1	204,8	102,4	34,1	7,3	0,9	0,01

La deuxième ligne correspond aux effectifs obtenus sur l'échantillon et la troisième aux probabilités théoriques multipliées par 1000.

Autre problème : les deux dernières classes ont des effectifs théoriques trop petits (inférieurs à 5). Leur poids relatif par rapport à l'ensemble étant faible, on appliquera le test sur les 7 premières colonnes (c'est-à-dire sur un effectif total de 999).

On obtient alors comme résultat environ : 0,42. Dans 58 % des cas on obtient des échantillons « aussi bons voire meilleurs » c'est-à-dire plus conforme à une loi binomiale, mais en tenant compte de la fluctuation d'échantillonnage, au seuil de confiance de 95 %, notre échantillon ne permet pas de rejeter l'hypothèse selon laquelle on peut ajuster la distribution obtenue à chaque questionnaire par une loi binomiale.

En définitive, on obtient pour nos deux tests une « confirmation » indirecte de la valeur de la distribution uniforme des nombres pseudo-aléatoires fournis par Excel.

Après la loi binomiale, la loi normale est assez simple à tester. Pour simuler une loi normale, on utilise la méthode dite de Box-Muller : si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires uniformes sur $]0; 1]$, alors la variable $Y = \sqrt{-2 \ln X_1} \cos(2\pi X_2)$ suit une loi normale centrée réduite.

On suppose que le générateur d'Excel correspond bien à une loi uniforme sur $]0; 1]$. On place par exemple 5000 nombres par la fonction ALEA () sur les colonnes A et B. Ces deux colonnes correspondront aux variables X_1 et X_2 . On construit la variable Y sur la colonne C.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	0,8314938	0,31193083	-0,23047266	-10	0		0			
2	0,96758474	0,86107526	0,16497046	-3	12	12	0,0013	6,7498		
3	0,60065278	0,24017475	0,062304	-2,7	22	10	0,0035	10,586		
4	0,05930925	0,68744417	-0,91040479	-2,4	45	23	0,0082	23,653		
5	0,7380014	0,12308807	0,55777107	-2,1	90	45	0,0179	48,334		
6	0,93545164	0,28189865	-0,07272764	-1,8	171	81	0,0359	90,33		
7	0,6081676	0,02532574	0,98470135	-1,5	323	152	0,0668	154,38		0,4307809
8	0,15272506	0,12416219	1,37800649	-1,2	562	239	0,1151	241,31		
9	0,05957818	0,32867747	-1,12685822	-0,9	890	328	0,1841	344,95		
10	0,38707475	0,67242116	-0,64531127	-0,6	1314	424	0,2743	450,96		
11	0,56939818	0,27086608	-0,13874198	-0,3	1846	532	0,3821	539,18		
12	0,7169604	0,47941738	-0,80895054	0	2472	626	0,5	589,56		
13	0,59582328	0,79172239	0,26372862	0,3	3086	614	0,6179	589,56		
14	0,77341858	0,9552372	0,68868002	0,6	3659	573	0,7257	539,18		
15	0,52655934	0,65060198	-0,56540818	0,9	4109	450	0,8159	450,96		
16	0,76502373	0,50935905	-0,73064816	1,2	4418	309	0,8849	344,95		
17	0,47525855	0,72554258	-0,18670753	1,5	4670	252	0,9332	241,31		
18	0,98179797	0,44916647	-0,18198128	1,8	4827	157	0,9641	154,38		
19	0,44846112	0,547986	-1,20931145	2,1	4908	81	0,9821	90,33		
20	0,11917848	0,6631949	-1,07001624	2,4	4956	48	0,9918	48,334		
21	0,60999573	0,97942245	0,98598737	2,7	4980	24	0,9965	23,653		
22	0,76765185	0,32017093	-0,31033737	3	4989	9	0,9987	10,585		
23	0,74779808	0,33627495	-0,3933333	10	5000	11	1	6,7498		

La plupart des valeurs de la colonne C sont comprises entre -3 et 3 . Dans la colonne D on fait apparaître les nombres de -3 à 3 écrites de $0,3$ en $0,3$ et deux valeurs extrêmes très différentes (-10 et 10). La colonne E comptabilise le nombre de valeurs de la colonne C inférieure à la cellule D correspondante (Par exemple ici, il y a 45 valeurs de C inférieures à $-2,4$). Pour cela on utilise encore la fonction « NB.SI ». En E1, on écrit la formule : = NB.SI (C\$1 : C\$2000; < & D1). Puis l'on recopie la formule jusqu'à D23. La colonne F contient le nombre de valeurs de C comprises entre deux valeurs consécutives de D. Par exemple le 23 en F4 signifie qu'il y a 23 valeurs de C comprises entre $-2,7(D3)$ et $-2,4(D4)$. Si l'on appelle Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, on écrit en colonne G la probabilité $p(Z < t)$ avec $t = D1 \dots D23$ (= LOI.NORMALE.STANDARD (D1)). Puis en colonne H, les effectifs théoriques pour 5000 essais d'obtenir Z entre t_1 et t_2 avec $t_1 = D1 \dots D22$ et $t_2 = D2 \dots D23$. Par exemple en H1, on trouve la formule = 5000 * (G2 - G1).

On applique alors le test du Khi-deux aux colonnes F et H. On trouve 0,43 environ. Là encore, compte tenu de la fluctuation d'échantillonnage, on ne peut pas mettre en question que la variable Y suit bien une loi normale centrée réduite. Et donc indirectement on doit admettre que le générateur aléatoire d'Excel suit bien une loi uniforme. Ce dernier test est un peu différent des précédents puisqu'il ne prend pas une décimale particulière, mais le nombre pseudo-aléatoire dans son entier. Il existe d'autres tests qui s'intéressent à un certain nombre de décimales particulières ou à l'écart entre deux décimales identiques ...

Dans le prochain article, nous verrons comment « réagit » le nombre π face à ces différents tests.

À suivre ...

Triangles et quadrilatères inscrits dans un cercle et circonscrits à un autre cercle (suite)

Auteur : **F. PECAUT**

9 - Demi-axes de l'ellipse image du cercle $C(O,R)$ dans la projection conique notée $p(C,Q,S)$ (cf. AMV n°5, §7).

Pour la commodité du lecteur, la fig.9 est reproduite ci-dessous. Rappelons que les données sont : $C(O, R)$ dans le plan (V) dit horizontal, $Q \in (V)$ extérieur à $C(O, R)$ et $S \neq Q$ sur la verticale de Q , soit :

$OQ = q > R$, $QS = s$.

$B\bar{B}$ est la polaire de Q par rapport à $C(O, R)$, P est le milieu de $B\bar{B}$, $OP = p$, $pq = R^2$.

CD est le diamètre de $C(O, R)$ passant par Q .

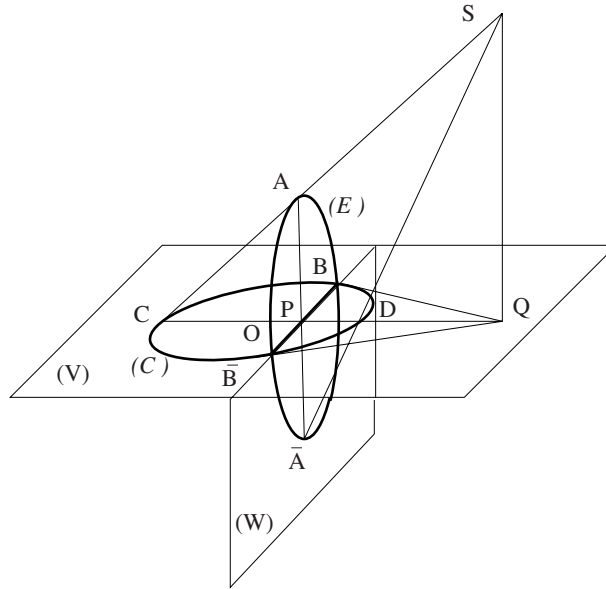


fig. 9 : projection conique de cercle $C(O,R)$ sur l'ellipse $E(a,b)$.

La projection conique de $C(O, R)$ sur (W) , plan vertical de $B\bar{B}$, est l'ellipse $\mathcal{E}(a, b)$, de centre P , dont les longueurs des demi-axes sont $PA = P\bar{A} = a$, $PB = P\bar{B} = b$.

Les triangles homothétiques CPA et CQS d'une part, $DP\bar{A}$ et DQS d'autre part, permettent d'écrire :

$$\frac{a}{s} = \frac{p + R}{q + R} = \frac{R - p}{q - R} = \frac{R}{q} = \frac{p}{R} \quad (1)$$

Les triangles rectangles QBP et QOB sont semblables :

$$\frac{b}{QB} = \frac{R}{q} \quad (2)$$

De (1) et (2), on tire $\frac{a}{b} = \frac{QS}{QB}$, rapport de la cote de S à la distance tangentielle de Q à $C(O, R)$.

On peut donc choisir Q et S pour obtenir n'importe quel rapport $\frac{a}{b}$ pour \mathcal{E} . En particulier :

Pour que $\mathcal{E}(a, b)$, image de $C(O, R)$ dans $p(C, Q, S)$, soit un cercle, il faut et il suffit que $QB = QS$, ou encore que QS soit vu de B sous un angle de 45° .

La question se pose de savoir si on peut trouver une même projection conique, fonctionnant comme ci-dessus, pour deux cercles à la fois ; la réponse est oui si les deux cercles sont intérieurs.

10 - Trouver un point qui ait même polaire par rapport à deux cercles.

Donnons nous, dans un plan (V) , deux cercles distincts $C(O, R)$, $\Gamma(\Omega, \rho)$. On peut supposer $R > \rho$. Sur l'axe de symétrie des deux cercles, cherchons deux points P et Q conjugués harmoniques par rapport aux deux cercles.

Définissons P et Q par leurs abscisses p et q , $p < q$, par rapport à l'origine O . La droite $(O\Omega)$ est orientée de manière que $\overline{O\Omega} = d > 0$. Alors :

$$pq = R^2 ; (p - d)(q - d) = \rho^2 \quad (3)$$

Le système (3) est équivalent au système $pq = R^2$, $p + q = \frac{R^2 + d^2 - \rho^2}{d}$. Donc p et q sont racines de l'équation du second degré :

$$dx^2 - (R^2 + d^2 - \rho^2)x + R^2d = 0 \quad (4)$$

On vérifie que le discriminant est :

$$\Delta = (R + d + \rho)(R + d - \rho)(R - d + \rho)(R - d - \rho)$$

Il est strictement positif quand $d < R - \rho$ ou $d > R + \rho$, c'est à dire quand (C) et (Γ) ne se coupent pas. Les deux racines sont alors positives. Mais pour que Q soit extérieur aux deux cercles, il faut que $(\Gamma) \subset (C)$. On en conclut que pour $d < R - \rho$, et dans ce cas seulement, les projections coniques $p(C, Q, S)$ et $p(\Gamma, Q, S)$ sont les mêmes. Enonçons :

Soient deux cercles $C(O, R)$ et $\Gamma(\Omega, \rho)$ dans un plan (V) , $(\Gamma) \subset (C)$.

Soit (P, Q) l'unique couple de points de la droite $(O\Omega)$ conjugués harmoniques par rapport aux deux cercles, Q extérieur aux deux cercles. Alors la projection conique faite d'un point S arbitraire de la droite perpendiculaire à (V) en Q , sur le plan (W) perpendiculaire à $(O\Omega)$ en P , envoie la paire de cercles $C(O, R)$, $\Gamma(\Omega, \rho)$ sur une paire d'ellipses de (W) , $\mathcal{E}(a, b)$ et $\mathcal{E}(a', b')$ respectivement, centrées en P et de mêmes directions principales.

Dans la suite, des ellipses de même centre et de mêmes directions principales seront dites co-axiales.

11 - Relations métriques entre les paramètres R, ρ, d qui définissent la paire de cercles $(C), (\Gamma), (\Gamma \subset C)$ d'une part, les longueurs des demi-axes des ellipses co-axiales obtenues par projection conique d'autre part.

A la relation (1) du §9, qui concerne la correspondance $C(O, R)$, $\mathcal{E}(a, b)$, il faut ajouter (5), relative à $\Gamma(\Omega, \rho)$ et $\mathcal{E}(a', b')$. On déduit (5) de (1) en y remplaçant R par ρ , p par $p - d$, q par $q - d$. Il vient :

$$\frac{a}{s} = \frac{R}{q} = \frac{p}{R} \quad (1) \quad ; \quad \frac{a'}{s} = \frac{\rho}{q - d} = \frac{p - d}{\rho} \quad (5)$$

D'autre part b^2 est l'opposé de la puissance $\mathcal{P}(C, P)$ et b'^2 l'opposé de la puissance $\mathcal{P}(\Gamma, P)$. Rappelons que le rapport des puissances d'un point M d'un cercle C d'un faisceau linéaire de cercles par rapport à deux autres cercles du même faisceau est le rapport des distances algébriques du centre de C aux centres des deux autres cercles. Appliquons à $M = P$, et aux deux cercles $C(O, R)$ et $\Gamma(\Omega, \rho)$, car P est un des deux cercles de rayon nul du faisceau défini par (C) et (Γ) . Il vient :

$$\frac{\mathcal{P}(\Gamma, P)}{\mathcal{P}(C, P)} = \frac{\overline{P\Omega}}{\overline{PO}} = \frac{p - d}{p}$$

Avec $\mathcal{P}(\Gamma, P) = -b'^2$ et $\mathcal{P}(C, P) = -b^2$, on obtient :

$$\frac{b'^2}{b^2} = \frac{p - d}{p} \quad (6)$$

(1), (5) et (6) invitent à poser $\alpha = \frac{a'}{a}$, $\beta = \frac{b'}{b}$.
 (1) et (5) entraînent $\alpha = \frac{R}{\rho} \frac{p-d}{p} = \frac{p}{R} \frac{q}{q-d}$ et (6) s'écrit $\frac{p-d}{p} = \beta^2$.
 On en tire $\frac{R}{\rho}$, $\frac{p}{d}$, $\frac{q}{d}$ en fonction de α et β :

$$\frac{R}{\rho} = \frac{\alpha}{\beta^2} ; \quad \frac{p}{d} = \frac{1}{1-\beta^2} ; \quad \frac{q}{d} = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2}$$

Le produit des deux dernières égalités, avec $pq = R^2$, donne :

$$d^2 \alpha^2 = R^2 (1 - \beta^2) (\alpha^2 - \beta^2)$$

De ces calculs on déduit finalement l'expression des paramètres $\frac{p}{R}$ et $\frac{d}{R}$, qui caractérisent la figure formée par la paire de cercles $C(O, R)$, $\Gamma(\Omega, \rho)$ à une similitude près, en fonction des rapports $\alpha = \frac{a'}{a}$ et $\beta = \frac{b'}{b}$ des longueurs des demi-axes des ellipses $\mathcal{E}(a, b)$, $\mathcal{E}(a', b')$, soit :

$$\frac{\rho}{R} = \frac{\beta^2}{\alpha} ; \quad \frac{d^2}{R^2} = \frac{(1 - \beta^2) (\alpha^2 - \beta^2)}{\alpha^2} \quad (7)$$

A la relation $f_n(R, \rho, d) = 0$, homogène en R, ρ, d , qui caractérise l'interscription d'un polygone à n côtés dans la paire de cercles (C, Γ) , $(\Gamma) \subset (C)$, correspond, par les formules (7), la relation permettant l'interscription d'un polygone à n côtés dans deux ellipses co-axiales $\mathcal{E}(a, b)$ et $\mathcal{E}(a', b')$, $\mathcal{E}(a', b') \subset \mathcal{E}(a, b)$. C'est une relation algébrique liant $\alpha = \frac{a'}{a}$ et $\beta = \frac{b'}{b}$.

Pour réaliser une interscription dans deux ellipses co-axiales, on peut toujours choisir arbitrairement l'une des ellipses : on a encore la liberté de choisir α ou β , l'autre étant déterminé par la relation d'interscription. Dans les derniers paragraphes, nous traiterons des cas $n = 3$ et $n = 4$.

12 - Quadrilatères interscrits dans deux ellipses co-axiales.

a) La relation d'interscription d'un quadrilatère dans deux cercles $C(O, R)$, $\Gamma(\Omega, \rho)$, $d = O\Omega$, dans le cas $(\Gamma) \subset (C)$ (cf. A.M.V. n°4, conclusion du §5) est : $2\rho^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2$, $d < R$. Transformons à l'aide des formules (7) :

$$\begin{aligned} 2\beta^4 [\alpha^2 + (1 - \beta^2) (\alpha^2 - \beta^2)] &= [\alpha^2 - (1 - \beta^2) (\alpha^2 - \beta^2)]^2 \\ 2[2\alpha^2 - \beta^2 (\alpha^2 + 1) + \beta^4] &= (1 + \alpha^2 - \beta^2)^2 \\ \beta^4 &= (\alpha^2 - 1)^2 \Leftrightarrow \{\beta^2 = \alpha^2 - 1 \text{ ou } \beta^2 = 1 - \alpha^2\} \quad (8) \end{aligned}$$

Dans le cas $(\Gamma) \subset (C)$, α et β sont inférieurs à 1 car $\mathcal{E}(a', b') \subset \mathcal{E}(a, b)$.

Pour qu'on puisse interscrire un quadrilatère dans deux ellipses co-axiales, $\mathcal{E}(a', b') \subset \mathcal{E}(a, b)$, il faut et il suffit que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, soit $a^2 b'^2 + a'^2 b^2 = a^2 b^2$.

Quand cette condition est remplie, les quadrilatères interscrits sont tous des parallélogrammes.

Cette dernière affirmation se déduit de la remarque faite à la fin du §8 (cf. A.M.V. n°5) : les diagonales d'un quadrilatère interscrit dans deux cercles intérieurs passent par le point limite intérieur du faisceau défini par les deux cercles. Dans la projection conique, ce point limite devient le centre commun des ellipses, et les quadrilatères interscrits sont des parallélogrammes parceque les diagonales se coupent en leur milieu.

b) Cas particuliers d'interscription de quadrilatères dans deux ellipses co-axiales $\mathcal{E}(a', b') \subset \mathcal{E}(a, b)$.

◊ **L'une des ellipses est un cercle :**

Si c'est la "grande", $a = b = r$, la condition d'interscription est : $a'^2 + b'^2 = r^2$, c'est le cas d'une ellipse et de son cercle orthoptique, les quadrilatères interscrits sont tous des **rectangles** (cf. A.M.V. n°5, §6).

Si c'est la "petite", $a' = b' = r$, la condition d'interscription est : $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{r^2}$. Les quadrilatères interscrits

sont tous des **losanges**, parceque les deux segments de tangentes issues d'un point à un cercle sont égaux (voir figure 10).

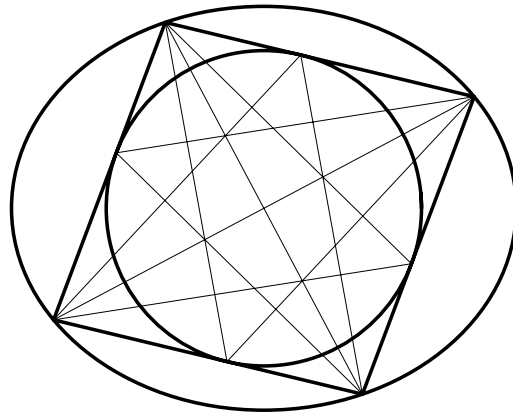


fig.10 : ellipse et cercle; les quadrilatères inscrits sont tous des losanges.

Le cas où l'une des ellipses est un cercle donne une méthode d'interscription dans deux ellipses concentriques qui ne sont plus co-axiales : on transforme l'une des ellipses en cercle par affinité (projection cylindrique). La transformée de l'autre dans la même affinité est une ellipse, qui a toujours le même centre. Puisqu'on sait interscrire dans les figures transformées, on sait interscrire dans les figures initiales.

◇ **Les deux ellipses sont homofocales** (voir figure 11) :

$$a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2 \Leftrightarrow a^2 (1 - \alpha^2) = b^2 (1 - \beta^2)$$

Pour des ellipses homofocales, la condition $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ implique $a\beta = b\alpha$, c'est à dire $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a'}{b'}$. Le lecteur pourra vérifier que $\frac{a^2}{b^2} = \frac{a'}{b'}$ est une condition suffisante pour l'interscription de quadrilatères dans deux ellipses homofocales, pourvu que ce ne soit pas deux cercles concentriques ($\alpha \neq \beta$).

Dans la pratique, on peut se donner $\mathcal{E}(a', b')$, de foyers F et F' , de centre O . On construit le point B sur la médiatrice de $[FF']$ tel que le rapport $\frac{a}{b}$ de ses distances à F et à O soit $\sqrt{\frac{a'}{b'}}$. Ayant B , on obtient A sur la droite FF' par $OA = BF$.

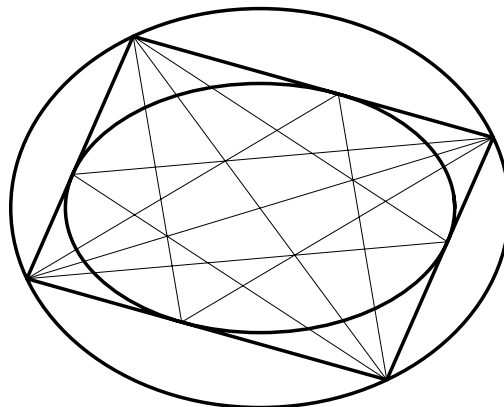


fig.11 : ellipses homofocales; les parallélogrammes inscrits ont même périmètre (billard-4)

◇ L'interscription de quadrilatères dans deux ellipses homofocales jouit d'une propriété remarquable, vraie pour des polygones d'un nombre quelconque de côtés, qui sera démontrée au début du cinquième et dernier épisode, à savoir que tous les polygones inscrits ont même périmètre (figure 11).

Fin du quatrième épisode et suite (et fin) au prochain numéro.

Le cube moyen

Catherine DUFOSSÉ

Une activité pour les élèves de seconde, ou comment marier le chapitre de statistiques avec un travail sur les fonctions.

On pourrait vouloir définir le « Français moyen ». Il aurait pour taille la taille moyenne, pour poids le poids moyen, pour salaire le salaire moyen, et ainsi de suite.

Nous allons juger du bien-fondé de cette entreprise en essayant de définir un « objet moyen » beaucoup plus simple : un « cube moyen ».

1°- Soit une série de 10 cubes. Choisissez vous-mêmes les arêtes de ces dix cubes, en complétant la deuxième ligne du tableau suivant :

Cube n° :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Arête :										
Volume :										

Calculez les volumes de ces cubes et reportez les dans la troisième ligne du tableau.

2°- Calculez alors :

$$\begin{cases} \text{a) la moyenne des arêtes : } A_m = ? \\ \text{b) la moyenne des volumes : } V_m = ? \end{cases}$$

3°- Que vous inspirent ces résultats? Peut-on parler sans plus de précision d'un « cube moyen » qui résumerait cette série de 10 cubes?

4°- Avançons un peu plus loin : peut on comparer la moyenne des volumes des cubes et le volume du cube ayant pour arête la moyenne des arêtes? Pour la série ci-dessus (première ligne) quel est le plus grand :

$$\begin{cases} \text{a) le cube de la moyenne des arêtes?} \\ \text{ou} \\ \text{b) la moyenne des cubes des arêtes?} \end{cases}$$

5°- Examinons les choses de façon plus générale mais pour deux cubes seulement : tracez sur papier quadrillé la représentation graphique de la fonction cube définie sur les réels positifs par $x \mapsto x^3$.

Placez deux valeurs a et b sur l'axe des abscisses, puis, sur le même axe, leur moyenne : $\frac{a+b}{2}$.

Placez alors sur l'axe des ordonnées :

le cube de a ,

le cube de b ,

la moyenne de ces deux cubes,

puis le cube de la moyenne de a et b .

quel est le plus grand : le cube de la moyenne ou la moyenne des cubes? Ce résultat vous semble-t-il dépendre des valeurs de a et de b ou est-il général?

6°- Parmi les fonctions que vous connaissez, et en utilisant le même type d'arguments graphiques, pouvez-vous citer deux fonctions autres que la fonction cube telles que, pour l'une, la moyenne des images de deux nombres soit plus grande que l'image de leur moyenne, alors que pour l'autre, la moyenne des images est plus petite que l'image de la moyenne?

7°- Reprenons les choses algébriquement. La moyenne des cubes moins le cube de la moyenne, c'est :

$$\frac{a^3 + b^3}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 = ?$$

C'est un peu difficile à factoriser, alors, développez cette expression, puis comparez-la à l'expression suivante, après l'avoir, elle aussi, mise sous forme développée :

$$\frac{3}{8}(a+b)(a-b)^2$$

Alors, qui est le plus grand : la moyenne des cubes ou le cube de la moyenne ?

8°- Si vous avez encore du courage, vous pouvez examiner ce que donne un calcul algébrique analogue pour les deux fonctions que vous avez citées à la question 6.

Lu pour vous

Cette rubrique se propose de commenter un livre qui a particulièrement plu à l'un d'entre nous.

Si, au cours de vos lectures, vous avez remarqué un ouvrage particulièrement intéressant, faites-nous le savoir en nous envoyant un petit commentaire suivi éventuellement d'un court extrait significatif, afin de le publier dans ces colonnes.

Nous ouvrons le feu avec un ouvrage qui nous a été signalé par Catherine Dufossé :

Proofs from THE BOOK
par **Martin Aigner** et **Günter M. Ziegler**
Editions Springer (www.springer.de)

Une traduction française va bientôt sortir, toujours aux éditions Springer, sous le titre :

Raisonnements divins
traduit de l'anglais par **Jean-Marie Morvan**

Ce livre a été écrit en hommage au mathématicien **Paul Erdős**, et présente un choix d'une trentaine de ce qu'il considérait comme ses plus belles démonstrations. D'après lui, "THE BOOK" serait le livre détenu par Dieu, où sont écrites les mathématiques ...

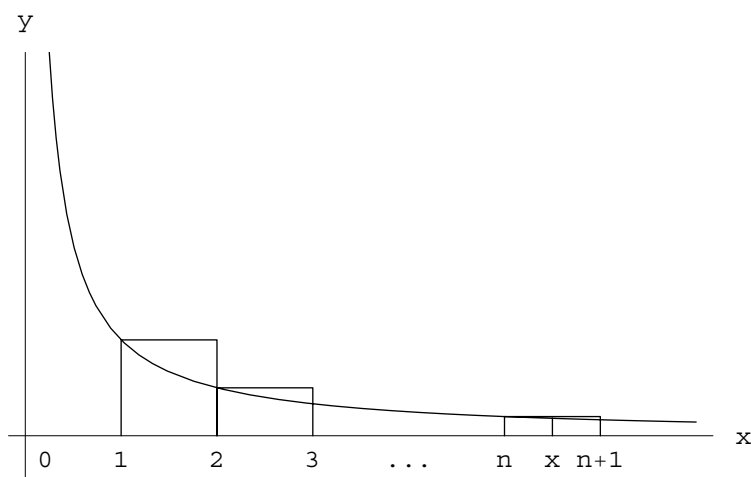
Catherine Dufossé nous raconte ci-dessous un extrait du premier chapitre.

Il s'agit de la quatrième des six démonstrations de ce chapitre pour prouver qu'il existe une infinité de nombres premiers.

En fait, on va montrer plus précisément que, pour tout réel positif x , le nombre de nombres premiers inférieurs à x est plus grand que $\ln(x) - 1$.

La figure ci-dessous qui représente la courbe de la fonction $\frac{1}{x}$, montre clairement que si n est la partie entière de x , on a :

$$\ln(x) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$



Cette somme est elle-même inférieure à la somme des inverses des nombres entiers dont les seuls diviseurs premiers sont les nombres premiers inférieurs à x (puisque $1, 2, \dots, n$ sont parmi ces nombres). Appelons p_1, p_2, \dots, p_k ces nombres premiers inférieurs à x .

Remarquons que cette dernière somme comporte une infinité de termes, mais elle peut s'écrire:

$$\prod_{i=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \dots + \frac{1}{p_i^m} + \dots \right) = \prod_{i=1}^k \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}} = \prod_{i=1}^k \frac{p_i}{p_i - 1}$$

les sommes étant des séries géométriques convergentes.

On a donc à ce stade :

$$\ln(x) \leq \prod_{i=1}^k \frac{p_i}{p_i - 1}$$

ce qui prouve déjà qu'il y a une infinité de nombres premiers (sinon, le produit des $\frac{p_i}{p_i-1}$ pour $1 \leq i \leq k$ serait majoré par le produit de tous les $\frac{p_i}{p_i-1}$, et la fonction $\ln(x)$ serait elle aussi majorée).

Continuons notre chemin ; écrivons $\frac{p_i}{p_i-1} = 1 + \frac{1}{p_i-1}$; comme le i -ième nombre premier p_i est supérieur à $i + 1$ (on a égalité seulement pour $i = 1$ et $i = 2$), $p_i - 1 \geq i$ et $1 + \frac{1}{p_i-1} \leq 1 + \frac{1}{i} = \frac{i+1}{i}$. Finalement :

$$\ln(x) \leq \prod_{i=1}^k \frac{p_i}{p_i - 1} \leq \prod_{i=1}^k \frac{i + 1}{i} = k + 1$$

ce qui prouve bien notre assertion.

L'agenda du prof de maths

Si vous avez connaissance près de chez vous (même un peu plus loin . . .) de manifestations à caractère pédagogique ou/et scientifique dignes d'intérêt, n'hésitez pas à nous le faire savoir en contactant la rédaction du bulletin (e-mail : ypoit@gulliver.fr).

Les conférences APMEP/IPR/IREM/IUFM

Voici le programme des conférences de ce premier trimestre, organisé par la « famille mathématique » de l'académie (APMEP/ IREM / Inspection Régionale / IUFM) sur le thème : « Des nouveautés, pourquoi et pourquoi faire? ».

- ☐ Mercredi 10 octobre 2001, 17H à l'IUFM Canebière-Marseille, Amphi Noailles :
P.ARNOUX (Université Aix-Marseille II) : Les graphes, pourquoi et pourquoi faire?
- ☐ Mercredi 14 novembre 2001, 17H à l'IUFM Canebière-Marseille, Amphi Noailles :
Y.CHEVALLARD (IUFM d'Aix-Marseille) : Les TPE, pourquoi et pourquoi faire?
- ☐ Mercredi 12 décembre 2001, 14H30 au Lycée international de Luynes :
MICHEL HENRY (Univ. et IREM de Franche-Comté) : Les lois continues, pourquoi et pourquoi faire?
La conférence sera suivie d'une présentation des brochures de l'APMEP, et d'un pot de fin d'année.
L'adresse du lycée de Luynes : 200 rue Georges Duby, 13080, Luynes.

L'APMEP organisera des réunions pour accompagner ces conférences, comme l'année dernière.

En voici le calendrier :

- ☐ Mercredi 10 octobre 2001, de 15H à 16h30, à l'IUFM Canebière-Marseille :
Première lecture du nouveau programme de ES : l'intervention des graphes.
- ☐ Mercredi 14 novembre 2001, de 15H à 16h30, à l'IUFM Canebière-Marseille :
TPE, an 2 : état des lieux et intervention des mathématiques.

Les Journées Nationales A.P.M.E.P. à Lille sur le thème : « Mathématiques au carrefour de l'Europe »

Ces journées ont lieu les lundi 29, mardi 30, mercredi 31 Octobre 2001.

N'oubliez pas de vous inscrire ; il reste de nombreuses places.

Vous trouverez tous les renseignements pour cela dans le BGV n° 98 de juin 2001 ou bien sur le site internet de la régionale de Lille : www2.ac-lille.fr/apmep.

Stages de formation proposés au PAF pour 2001/2002

Les inscriptions pour des stages de formation proposés au PAF 2001-2002 seront enregistrées du lundi 17 septembre au dimanche 30 septembre.

Les inscriptions se font :

- soit par minitel : 3614 code EDUCAM
- soit par internet : gaia.ac-aix-marseille.fr

Pour l'inscription, il est conseillé de connaître son NUMEN ainsi que les identifiants des dispositifs choisis. Toutes les informations sur les offres de formation se trouvent dans le livret et le cederom. Les établissements et les services sont en possession de ces documents depuis le 3 septembre et ont à les mettre à disposition des personnels.

Les dispositifs proposés en mathématiques se trouvent en page 25 du PAF. Les formations proposées par l'IUFM sont identifiées par deux lettres suivies de deux chiffres qui précèdent l'intitulé (par exemple MA08-Enseigner les mathématiques en seconde)

La Fête de la Science

Dans le cadre de la Fête de la Science, une après-midi est organisée le vendredi 19 octobre à l'intention des scolaires, au CMI (Centre de Mathématiques et d'Informatique) sur le technopôle de Château-Gombert (Marseille).

Au programme : une conférence de G.Godefroy sur l'histoire des nombres, une rencontre entre les élèves et des chercheurs du CMI, un film, et un accueil au Cybercafé.

Si vous êtes intéressé et désirez amener des élèves, contactez JACQUELINE DETRAZ (mail : Jacqueline.Detraz@cmi.univ-mrs.fr).

L'association « Échange et diffusion des savoirs »

Cette association organise depuis deux saisons à l'Hôtel du département des Bouches-du-Rhône des conférences de haut niveau ouvertes au public et libres d'accès, poursuivant un objectif à la fois simple, nécessaire et ambitieux : populariser et démocratiser l'accès aux savoirs sans jamais céder sur la qualité intellectuelle des interventions.

La saison qui vient propose deux cycles de conférences aux thèmes ancrés dans les préoccupations contemporaines. L'un s'intéresse aux « figures du temps », le second cycle de conférences portera sur les « figures de la science ».

Pour tous renseignements, s'adresser à : Cécile Arnold, chargée de communication. Echange et Diffusion des savoirs, 16 rue Beauvau 13001 Marseille. Téléphone : 04 96 11 24 50 ; Télécopie : 04 96 11 24 51 ; email : cecile.arnold@des-savoirs.org

Voici le cycle : « Figures de la science » (conférences en libre accès) :

- ☐ Jeudi 31 janvier 2002 :
JEAN-PIERRE LUMINET : « Figures du ciel : de l'harmonie des sphères à l'Univers chiffonné »
- ☐ Jeudi 28 février 2002 :
ALAIN PROCHIANTZ : « Les métamorphoses de la machine-esprit »
- ☐ Jeudi 18 avril 2002 :
MICHAEL SINGLETON : « Vive la différence ! »
- ☐ Jeudi 25 avril 2002 :
AHMED DJEBBAR : « Les sciences arabes et leur circulation autour de la Méditerranée (IXe-XVe siècles) »
- ☐ Jeudi 16 mai 2002 :
MICHEL GOURINAT : « La conception nietzschéenne de la science »
- ☐ Jeudi 23 mai 2002 :
GIORGIO ISRAEL : « Le mysticisme de la Kabbale et le rationalisme scientifique »

L'association Andromède présente à l'Observatoire de Marseille :
Les distances dans l'univers

Programme pour les élèves :

Visites scolaires sur rendez-vous tous les jours de la semaine, à 9h et 10h30, 14h et 15h30 précises.

Programme pour le grand public :

Après-midi « la tête dans les étoiles » :

Visite des instruments, séances de planétarium, observation du soleil, visite de l'exposition les mercredis et samedis de 14h à 17h30.

Soirées-conférences à 20h30 :

- ❑ **Vendredi 5 Octobre :** « La télédétection : regarder la planète Terre » par BERNARD SIMON, Ingénieur de Recherche, responsable du service de télédétection et sciences de l'image au CERGE.
- ❑ **Vendredi 12 Octobre :** « Mesurer les distances dans le système solaire » par MICHEL MARCELLIN, Chargé de Recherche au Laboratoire d'Astrophysique de Marseille.
- ❑ **Vendredi 19 Octobre :** « Distances des galaxies et âge de l'Univers » par LUCIENNE GOUGUENHEIM, Professeur Emérite de l'Université de Paris XI.
- ❑ **Samedi 20 Octobre :** « Les télescopes géants du futur » par MARC FERRARI, Astronome au Laboratoire d'Astrophysique de Marseille.
- ❑ **Vendredi 23 Novembre :** « L'arpentage de la Galaxie avec le satellite GAIA » par FRANÇOIS MIGNARD, Directeur de Recherche à l'Observatoire de la Côte d'Azur.
- ❑ **Vendredi 14 Décembre :** « De la Terre au Cosmos : les artistes explorateurs de l'Espace » par ROGER MALINA, Directeur du Laboratoire d'Astrophysique de Marseille.