

Jeux d'allumettes

Alain Barnier

Je veux présenter ici quelques jeux dits « **d'allumettes** » auxquels on peut faire jouer les élèves sans mettre le feu à l'établissement. On peut les faire jouer entre eux et on peut aussi organiser des tournois. Le but est de les faire réfléchir à la stratégie gagnante qui, pour la première catégorie de jeux, dits « **jeux de Nim à un tas** », est facile à comprendre sinon à découvrir. Et qui, pour la deuxième catégorie de jeux, dits « **jeux de Nim à plusieurs tas** », est bien plus compliquée mais a le mérite de faire réfléchir à la numération binaire. J'ai fait jouer mes élèves de lycée en fin d'année, ils ont été intéressés. La théorie générale de ces jeux se fait à l'aide de celle des graphes, on parle alors de noyaux du graphe, de jeux directs et de jeux inverses, de nombres et de fonctions de Grundy, mais mon propos n'est pas là. Tous ces jeux admettent des variantes qui permettent de les compliquer à loisir. Nous n'en étudierons que quelques cas parmi les plus simples.

1 Jeux d'allumettes ou de Nim à un tas

Jeu standard : Deux joueurs et un tas de 20 allumettes (ou pions, ou cartes, ou même des bouts de papier). Chaque coup se joue en retirant 1, 2, ou 3 allumettes (ni plus, ni moins). Un joueur commence et ils jouent l'un après l'autre. Le nombre d'allumettes du tas va donc en diminuant tout au long de la partie, c'est celui qui prend la dernière allumette qui a perdu.

Recette :

- Grouper les élèves par deux.
- Leur faire découper vingt morceaux de papier.
- Expliquer les règles du jeu.
- Les faire jouer.

On fait plusieurs parties, chacun des deux joueurs commençant à tour de rôle.

Celui qui connaît la stratégie peut gagner pratiquement à coup sûr contre un adversaire qui ne la connaît pas. On devine qu'un des deux joueurs est avantagé (celui qui commence ou l'autre).

Voilà le truc : Un joueur peut contrôler d'une certaine façon le nombre d'allumettes dont diminue le paquet après que son adversaire et lui aient joué (dans cet ordre). Il peut s'arranger pour qu'après ces 2 coups le tas ait diminué de 4 allumettes exactement ($4 = 3 + 1$) :

Quand l'adversaire prend une allumette il en prendra trois.

Quand l'adversaire prend deux allumettes il en prendra deux.

Quand l'adversaire prend trois allumettes il en prendra une.

Il faut toujours laisser une allumette à l'adversaire en fin de jeu, ce qui fait que les positions gagnantes à laisser à cet adversaire sont en remontant depuis la fin de la partie : 1, 5, 9, 13, 17 (et 21). Soit les nombres de la forme : $(4K + 1)$.

Si vous laissez à votre adversaire un nombre de la forme $(4K + 1)$ vous êtes sûr de gagner si vous jouez en appliquant la règle des 4 précédentes.

Donc dans le cas d'un tas de 20 allumettes (20 n'étant pas de la forme $4K + 1$) celui qui commence prend trois allumettes et en laisse 17 ($4 \times 4 + 1$), il est sûr de gagner à condition d'appliquer la stratégie. C'est-à-dire, de veiller à ce que le tas d'allumettes diminue de 4 allumettes tous les deux coups. Tandis que celui qui joue en second est à la merci d'un adversaire qui connaît la stratégie. Si c'est l'adversaire qui commence et qu'il ne connaisse pas la stratégie, on attend, en jouant au hasard, qu'il se trompe pour pouvoir lui rendre un jeu qui nous avantage, c'est-à-dire un multiple de 4 plus 1. *Celui qui joue en premier est donc avantagé.*

Si l'on joue avec un tas de 21 allumettes c'est celui qui joue *en second* qui est avantagé ($21 = 5 \times 4 + 1$).

Variantes du jeu :

- Faire varier le nombre d'allumettes du tas de départ.

- Dire que c’est celui qui prend la dernière allumette qui a gagné. Dans ce cas les positions à laisser à l’adversaire sont : 0, 4, 8, 12, 16 ... C’est-à-dire les multiples de 4.
- Dire que c’est celui qui laisse deux allumettes à son adversaire qui gagne. Dans ce cas les positions à laisser seront : 2, 6, 10, 14 ... C’est-à-dire les multiples de 4 plus 2.
- Jouer en prenant 1, 2, 3, 4 ou 5 allumettes. Dans ce cas les positions à laisser seront : 1, 7, 13, 19 ... C’est-à-dire les nombres de la forme $(1 + 6K)$ avec $(6 = 5 + 1)$.
- Jouer à l’envers : Partir de 5 allumettes et en ajouter 1, 2, 3, ou 4 à chaque coup, c’est le premier arrivé à 35 par exemple qui gagne. Dans ce cas le principe du secret est le même, les positions à laisser à l’adversaire sont de la forme : $(36 - 5K)$ avec $(5 = 4 + 1)$.
- Une variante plus compliquée, dont je ne donnerais pas le truc est la suivante : on peut prendre un nombre d’allumettes compris entre deux nombres donnés. Ce jeu s’étudie avec la théorie générale des graphes.

Avec l’outil informatique vous pouvez faire chercher un programme pour jouer contre la machine. Il faudra indiquer à l’ordinateur au début de la partie :

- Le nombre d’allumettes de départ soit D.
- Le nombre d’allumettes d’arrivée soit A.
- Le nombre maximum d’allumettes que l’on peut prendre ou ajouter à chaque coup, soit N (un coup consistera à prendre ou ajouter entre 1 et N allumettes). On prendra si $A < D$ et on ajoutera si $A > D$.
- Celui qui commence : la machine ou le joueur.

La machine appliquant la stratégie gagnante dès qu’elle tombe sur un jeu qui l’avantage et jouant au hasard dans le cas contraire. C’est un bon exercice d’arithmétique et de programmation. Mais il demande du temps.

2 Jeux d’allumettes ou de Nim à plusieurs tas :

Jeu standard : Faire 4 tas d’allumettes comprenant respectivement 1,3, 5 et 7 allumettes. Les joueurs jouent l’un après l’autre. Un coup consiste à prendre autant d’allumettes que l’on veut mais dans un seul tas. C’est celui qui prend la dernière allumette qui a perdu.

Donc le jeu de départ se présente de la façon suivante :

```

      |
      | | | | | |
      | | | |
      | | | | |
      | | | | | |

```

Le truc est beaucoup plus compliqué et les élèves ne le découvriront certainement pas. Mais vous pouvez les faire jouer entre eux puis les faire jouer contre vous, ils perdront toujours. Cela attisera leur curiosité. Ensuite vous pouvez essayer de leur expliquer le truc. Il faut intervenir la numération binaire. De toute façon on peut jouer d’une façon intéressante sans le connaître en calculant ses coups comme dans une partie d’échecs. On devine qu’un des deux joueurs, celui qui commence ou celui qui joue en second est avantagé et que certains jeux sont gagnants tandis que d’autres sont perdants. L’explication du truc conduit à faire compter les élèves en base 2, ce qui est très formateur : 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, ...

Voilà ce truc :

On écrit les nombres d’allumettes de chacun des tas dans le système binaire. Et comme pour les tas d’allumettes, on dispose ces nombres les uns en dessous des autres en alignant les unités, les dizaines, les centaines, comme pour une addition. Voici deux exemples :

	1		1
	11		1
	101		11
	111		100

Nous appellerons « jeu pair » un jeu pour lequel l'écriture binaire donne un nombre pair de 1 dans chaque colonne. Et nous appellerons « jeu impair » un jeu pour lequel l'écriture binaire donne un nombre impair de 1 dans au moins une colonne.

Voici deux exemples de jeux pairs :

I	1		II	10
III	11		III	11
IIII	100		I	1
IIIIII	110			

Voici deux exemples de jeux impairs :

I	1		III	11
II	10		III	11
IIII	100		IIIIII	111
IIIIII	110			

On s'aperçoit facilement que si l'on donne un jeu pair à son adversaire il ne pourra nous rendre qu'un jeu impair. En effet, l'adversaire doit modifier un nombre dans un seul tas. De ce fait il sera obligé de changer au moins un 0 en 1 ou un 1 en 0 dans une des colonnes, et par conséquent le jeu qui était pair deviendra impair.

Voici deux exemples de jeux qui deviennent impairs :

I	1		II	10
III	11		III	11
IIII	100		I	1
IIIIII	110			
I	1		II	10
I	1		I	1
IIII	100		I	1
IIIIII	110			
On a enlevé deux allumettes dans le deuxième tas			On a aussi enlevé deux allumettes dans le deuxième tas	

On s'aperçoit également que quand l'adversaire nous rend un jeu impair on peut toujours lui rendre soit un jeu pair avec plusieurs tas de plus d'une allumette soit un jeu impair avec tous les tas ne comprenant qu'une seule allumette (ce qui nous met dans la position de gagner à coup sûr).

En effet, 3 cas sont à envisager :

a) Supposons d'abord que le jeu impair que nous donne l'adversaire comprenne plusieurs tas de plus d'une allumette.

Pour choisir le tas à modifier, considérons la colonne la plus à gauche de parité impair et choisissons de modifier sa parité en changeant un 1 en 0 dans un tas où il y a un 1 à cette position. Dans ce tas les 1 ou les 0 venant avant cette position restent inchangés et ceux qui viennent après cette position sont modifiés éventuellement de façon à rendre toutes les colonnes suivantes paires.

Nous voyons que cette modification correspond toujours à une diminution du nombre d'allumettes du tas dans lequel on a décidé de jouer (puisque le chiffre le plus à gauche modifiée est un 1 changé en 0).

Cette méthode est donc toujours applicable et il suffit pour jouer le coup d'enlever le nombre d'allumettes correspondant dans le tas choisis.

Notons que la façon de jouer n'est pas unique. Voici deux exemples :

1	1	1	1
11	10	11	10
1111	100	111	11
111111	110	111	11
11	10	1	1
1111	100	1	1
111111	110	111	11
		111	11
On a enlevé l'unique allumette du premier tas.		On a enlevé une allumette au deuxième tas, mais on pouvait aussi enlever tout le troisième.	

b) Supposons maintenant que le jeu impair de l'adversaire ne comprenne qu'un seul tas avec plusieurs allumettes. Alors, en prenant toutes les allumettes de ce tas ou en en laissant qu'une on peut toujours laisser à l'adversaire un jeu impair ne comprenant que des tas à une allumette. Il est facile de voir qu'un tel jeu le laisse perdant à coup sûr. Voici deux exemples :

1	1	1	1
111	11	1	1
1	1	1111	100
1	1		
		1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
On a enlevé tout le deuxième tas.		On a laissé qu'une allumette au troisième tas.	

b) Le cas où l'adversaire nous laisse lui un jeu impair avec des tas d'une seule allumette est impossible si l'on a appliqué la stratégie assez tôt à partir d'un jeu impair comprenant plusieurs tas de plusieurs allumettes. S'il se présente c'est que notre adversaire connaît la stratégie ou a beaucoup de chance et qu'il n'a pas commencé la partie. Dans ce cas on a perdu.

On peut jouer contre les élèves en appliquant le truc au tableau sans leur expliquer, cela renforce leur curiosité car ils perdent toujours.

Le jeu standard avantage le deuxième joueur car il est pair. Le premier joueur le transformant nécessairement en jeu impair et se trouvant à la merci d'un adversaire qui connaît la stratégie.

Si l'on joue en premier on rend à l'adversaire un jeu impair, mais s'il ne connaît pas la stratégie il peut très bien nous restituer un jeu impair également car un jeu impair peut être transformé en pair ou impair. A ce moment on reprend l'avantage. Dans le cas où l'on commence en premier on peut jouer au hasard en espérant que l'adversaire nous donne à un moment du jeu une configuration impaire à partir de laquelle on pourra appliquer notre stratégie.

Quelques variantes de ce jeu :

– Jouer avec la règle : celui qui prend la dernière allumette a gagné. La stratégie est exactement la même, mais à la fin, au lieu de laisser un jeu impair avec des tas d'une allumette, on laisse un jeu pair avec des tas d'une seule allumette. On est alors sûr de prendre la dernière allumette. Ce jeu avantage également le deuxième joueur.

– Jouer avec une des deux règles précédentes mais en modifiant le nombre de tas et le nombre d'allumettes dans chaque tas. Les règles de parités restent les mêmes et la stratégie s'énonce de la même façon. Ce n'est pas obligatoirement le second joueur qui est avantage.

– Un perfectionnement dont je n'indiquerai pas la stratégie consiste à considérer que dans chaque tas, les allumettes sont dans des cases situées les unes à côté des autres et que quand on prend une ou

plusieurs allumettes il faut les prendre dans des cases contiguës, le tas étant alors éventuellement divisé en deux. Avec cette règle le nombre de tas peut aller en augmentant à certains moments de la partie. Ce jeu s'étudie aussi avec la théorie des graphes.

Vous pouvez ici aussi avec l'aide de l'outil informatique chercher à faire un programme pour jouer contre la machine. Dans ce cas il faudra donner à la machine :

- Le nombre de tas et le nombre d'allumettes dans chacun d'eux.
- Si c'est celui qui prend la dernière allumette qui perd (ou qui gagne).
- Si c'est la machine ou le joueur qui commence.

La machine appliquera la stratégie gagnante chaque fois qu'elle rencontrera une configuration impaire et jouera au hasard dans le cas contraire.

Ce programme est assez compliqué à faire et on peut utiliser les instructions logiques AND, OR, XOR...etc. pour le mettre en œuvre.

Voilà, j'ai fini.

N.B : Si vous voulez en savoir plus, vous pouvez acheter le petit ouvrage : « LES JEUX DE NIM », de **Jacques Bouteloup** professeur honoraire de mathématiques spéciales qui est vendu par notre association lors de ses rassemblements ou par correspondance.

De nombreuses encyclopédies parlent des jeux de Nim. Vous pourrez y trouver aussi quelques explications.