

Triangles et quadrilatères inscrits dans un cercle, et circonscrits à un autre cercle (suite)

Françoise PÉCAUT

Le théorème de PONCELET, tel qu'énoncé par lui-même (cf. A.M.V. n° 3, *exergue*), est vrai si on y remplace le mot *cercle* par le mot *conique* :

Deux coniques étant donnés dans un plan, il est impossible, en général, d'inscrire dans l'une d'elles un polygone qui soit en même temps circonscrit à l'autre, et quand, pour une situation particulière de ces coniques, un tel polygone est possible, il y en a une infinité d'autres de même ordre qui jouissent de cette singulière propriété.

Pour démontrer le théorème dans le cas d'une paire de coniques d'un plan (W), après qu'il ait été démontré dans le cas des cercles, l'idée de PONCELET est de trouver un point S , n'appartenant pas à (W), et un plan (V), distinct de (W), tel que la projection conique de (W) sur (V) faite à partir de S envoie la paire de coniques sur une paire de cercles. C'est une idée naturelle puisque la projection conique conserve les intersections, alignements, contacts, et le degré des courbes. Nous allons la mettre en oeuvre dans le cas d'une ellipse et de son cercle orthoptique et en tirer la réciproque laissée en attente au paragraphe 3 (A.M.V. n° 3).

6 La famille des rectangles inscrits dans un cercle et circonscrits à une ellipse.

L'ensemble des points d'où l'on voit une ellipse sous un angle droit est un cercle, dit le cercle orthoptique de l'ellipse. Pour éviter des recherches au lecteur qui ne souhaiterait pas en faire, nous donnons une démonstration de ce théorème.

Considérons l'ellipse ($\mathcal{E}$) d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé. $M_0(x_0, y_0)$ est un point du plan, $y - y_0 = t(x - x_0)$ est une équation de la droite (D) de pente t passant par M_0 . L'équation aux abscisses des points d'intersection de ($\mathcal{E}$) et (D) s'écrit :

$$b^2x^2 + a^2(y_0 + t(x - x_0))^2 = a^2b^2$$

Ordonnons cette équation du second degré à l'inconnue x :

$$x^2(b^2 + a^2t^2) + 2ta^2(y_0 - tx_0)x + a^2(y_0 - tx_0)^2 - a^2b^2 = 0$$

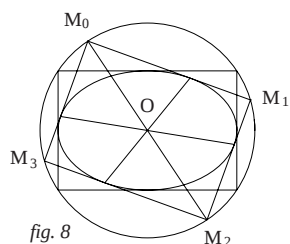
Pour que (D) soit tangente à ($\mathcal{E}$), il faut et il suffit qu'il y ait une racine double. Écrivons que le discriminant est nul. Après calculs :

$$t^2(a^2 - x_0^2) + 2tx_0y_0 + b^2 - y_0^2 = 0$$

Les deux racines t_1 et t_2 sont les pentes des deux tangentes à ($\mathcal{E}$) issues de M_0 . Les deux tangentes sont perpendiculaires si et seulement si $t_1t_2 = -1$:

$$a^2 - x_0^2 + b^2 - y_0^2 = 0 \implies x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$$

Ainsi le cercle $\mathcal{O}$ d'équation $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, qui est circonscrit au rectangle $x = \pm a$, $y = \pm b$, est l'ensemble des points du plan d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales à l'ellipse ($\mathcal{E}$) (fig.8).

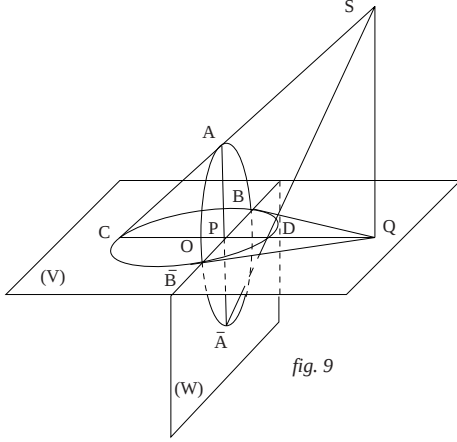


Montrons alors que tout point M_0 de $\mathcal{O}$ est un sommet d'un quadrilatère interscriptible. Soit M_2 le symétrique de M_0 par rapport à l'origine O . Les tangentes à ($\mathcal{E}$) issues de M_0 (orthogonales) et les tangentes à ($\mathcal{E}$) issues de M_2 sont les quatre côtés d'un parallélogramme $M_0M_1M_2M_3$, qui a un angle droit, donc un rectangle, ce qui prouve que M_1 et M_3 appartiennent à $\mathcal{O}$.

Avec une ellipse et son cercle orthoptique, on a un exemple d'une paire de coniques permettant l'inscription de quadrilatères, qui sont tous des rectangles.

7 Une projection conique d'un cercle sur un plan dans l'espace à trois dimensions.

Soit, dans un plan (V) dit « horizontal », le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R .



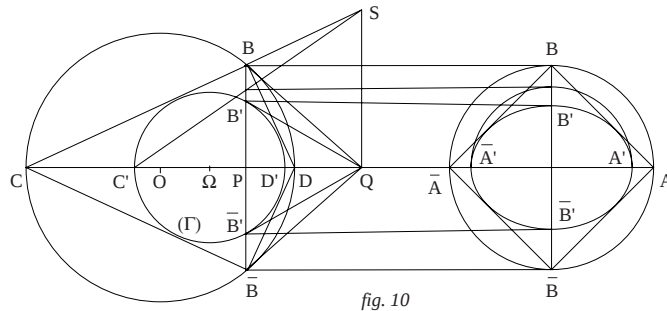
Soit Q un point de (V) strictement extérieur à $\mathcal{C}(O, R)$. Soient B et $\bar{B}$ les points de contact des tangentes à $\mathcal{C}(O, R)$ issues de Q . Soit (W) le plan perpendiculaire à (V) , coupant (V) suivant la droite $(B\bar{B})$. (W) sera dit « vertical », comme tout plan ou droite perpendiculaire à (V) . Soit S un point « au dessus » de Q , différent de Q . Étudions la figure transformée de $\mathcal{C}(O, R)$ dans la projection conique de (V) sur (W) , faite à partir de S : c'est une conique $(\mathcal{E})$, puisque c'est l'intersection d'un cône du second degré avec un plan qui ne contient pas le sommet du cône.

Cette conique est du genre ellipse puisque le plan parallèle à (W) passant par le sommet du cône ne coupe pas $\mathcal{C}(O, R)$. $(\mathcal{E})$ passe par les points B et $\bar{B}$, invariants dans la projection. En B , la tangente à $(\mathcal{E})$ est l'intersection de (W) avec le plan tangent au cône le long de la génératrice (SB) : c'est la verticale de B . De même, la tangente à $(\mathcal{E})$ en $\bar{B}$ est la verticale de $\bar{B}$. $(B\bar{B})$ est un diamètre de $(\mathcal{E})$, puisque les tangentes à $(\mathcal{E})$ en B et en $\bar{B}$ sont parallèles; c'est même un axe de $(\mathcal{E})$ puisque le diamètre $(B\bar{B})$ est perpendiculaire aux tangentes en B et $\bar{B}$. On en déduit que le centre de l'ellipse $(\mathcal{E})$ est le milieu P de $[B\bar{B}]$, et que l'autre axe de l'ellipse est porté par la verticale de P . Si C et D sont les extrémités du diamètre de $\mathcal{C}(O, R)$ porté par la droite (OQ) , (SC) et (SD) rencontrent (W) sur la verticale de P , en A et $\bar{A}$. Les quatre sommets de $(\mathcal{E})$ sont $A, \bar{A}, B$ et $\bar{B}$. On peut vérifier que P est le milieu de $[A\bar{A}]$ de la manière suivante: la division (C, D, P, Q) est harmonique. Elle se transforme par projection conique sur (W) en $(A, \bar{A}, P, \infty)$: dire que celle-ci est harmonique, c'est dire que P est le milieu de $[A\bar{A}]$. Si on choisit S au dessus de Q de manière que $PA = PB$, $(\mathcal{E})$ est un cercle.

Dans la suite, la projection conique d'un cercle, explicitée au début de ce paragraphe, sera notée $p[\mathcal{C}, Q, S]$.

8 Une projection conique d'une paire de cercles de rayons R, ρ , de distance des centres $d < R$, ces trois paramètres étant tels que $2\rho^2(d^2 + R^2) = (R^2 - d^2)^2$.

D'après ce qui a été dit au paragraphe 4 (A.M.V. n° 4) la relation qui lie R, ρ, d entraîne l'existence d'un quadrilatère interscrit $CBD\bar{B}$. Un examen plus attentif (voir fig.5) prouve que la droite $(B\bar{B})$ a même pôle Q par rapport aux deux cercles [Cette propriété a en fait été démontrée dans ce même §4 par l'auteur – NDRL]. Les considérations du paragraphe précédent s'appliquent donc à une projection conique $p[\mathcal{C}(O, R), Q, S] = p[\Gamma(\Omega, \rho), Q, S]$ ($O\Omega = d < R$) sur le plan (W) perpendiculaire au plan de la figure le long de $(B\bar{B})$. C' et D' sont les points où $(O\Omega)$ coupe (Γ) , B' et $\bar{B}'$ sont les points où la polaire de Q coupe (Γ) , P est le conjugué de Q par rapport aux deux cercles.



On choisit S de manière que la projection conique de $\mathcal{C}(O, R)$ sur (W) soit le cercle $\mathcal{O}$ de diamètre $[B\overline{B}]$ qui est représenté dans la partie droite de la figure 10. S a été représenté dans le plan des cercles $\mathcal{C}$ et Γ par rabattement autour de la charnière $(O\Omega)$. Alors la projection conique de $\Gamma(\Omega, \rho)$ sur (W) est une ellipse $(\mathcal{E})$ dont deux sommets sont B' et $\overline{B}'$. Les deux autres sommets A' et $\overline{A}'$ s'obtiennent par intersection de (SC') et (SD') avec (BB') , puis relèvement.

Le quadrilatère $CBD\overline{B}$ interscrit dans la paire $(\mathcal{C}, \Gamma)$ se projette coniquement sur (W) en $AB\overline{A}\overline{B}$ interscrit dans la paire $(\mathcal{O}, \mathcal{E})$. Or $AB\overline{A}\overline{B}$ est un carré, par construction. De chacun de ses sommets, on voit $(\mathcal{E})$ sous un angle droit. C'est à dire que le cercle orthoptique de $(\mathcal{E})$ est $(\mathcal{O})$. Alors prenons un point quelconque M_0 sur $\mathcal{C}(O, R)$. M_0 se projette sur $(\mathcal{O})$ en un point qui, comme tout point de $(\mathcal{O})$, est sommet d'un rectangle interscrit dans la paire $(\mathcal{O}, \mathcal{E})$. Le rectangle se projette sur (V) suivant un quadrilatère interscrit dans la paire $(\mathcal{C}, \Gamma)$ dont un sommet est M_0 . La réciproque laissée en attente au paragraphe 3 (A.M.V. n° 3) est démontrée.

Toute paire de deux cercles dans un plan, l'un intérieur à l'autre, permettant l'inscription de quadrilatères, est la projection conique d'une ellipse et de son cercle orthoptique.

Dans ce modèle centrosymétrique, il y a des alignements évidents : pour un quelconque rectangle interscrit (voir fig.8), les droites qui joignent deux sommets opposés, les droites qui joignent les points de contact de deux côtés opposés, passent par le centre de symétrie. Par projection conique, on en déduit le théorème :

Soit un quadrilatère interscrit dans les cercles $\mathcal{C}(O, R)$ et $\Gamma(\Omega, \rho)$, (Γ) intérieur à $(\mathcal{C})$. Alors les diagonales du quadrilatère passent par le point limite intérieur aux deux cercles du faisceau linéaire de cercles qu'ils définissent. Il en est de même des droites qui joignent les points de contact avec (Γ) de deux côtés opposés du quadrilatère.

Le lecteur pourra vérifier sur la figure 3 (A.M.V. n° 3) que les quatre droites sont concourantes.

Dans la dernière partie de ce travail, nous verrons que, quelle que soit la paire de cercles $(\mathcal{C}, \Gamma)$, (Γ) intérieur à $(\mathcal{C})$, on peut trouver un point Q ayant même polaire par rapport aux deux cercles. Alors la projection conique $p(Q, S)$ (cf. §7) envoie $(\mathcal{C})$ et (Γ) sur deux ellipses ayant les mêmes axes. Nous obtiendrons les relations métriques entre ces deux ellipses permettant d'inscrire triangles et quadrilatères. [Voir l'image de couverture du présent numéro – NDLR].

Fin du troisième épisode. Suite au prochain numéro ...