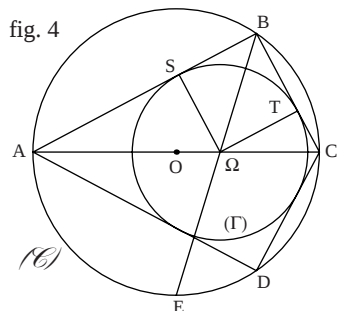


Triangles et quadrilatères inscrits dans un cercle, et circonscrits à un autre cercle (suite)

Françoise PÉCAUT

4 Une construction géométrique d'une paire $\mathcal{C}(O, R)$, $\Gamma(\Omega, \rho)$ telle que $2\rho^2(d^2 + R^2) = (R^2 - d^2)^2$. Paires associées.

Supposons le problème résolu avec $O\Omega = d < R$ et donc $\Gamma \subset \mathcal{C}$ (voir AMV n° 3 page 11, début du § 3).



Soient A et C les points d'intersection de $\mathcal{C}(O, R)$ avec la droite des centres $O\Omega$. Les tangentes issues de A et C au cercle Γ touchent celui-ci en S et T respectivement. Les droites AS et CT se coupent en B . Sous la forme $\frac{\rho^2}{(R+d)^2} + \frac{\rho^2}{(R-d)^2} = 1$, la relation à réaliser signifie que le triangle ABC est rectangle en B (car $\frac{\rho}{R+d} = \frac{BC}{2R}$ et $\frac{\rho}{R-d} = \frac{AB}{2R}$). Donc $B \in \mathcal{C}(O, R)$. Soit D le symétrique de B par rapport à la droite $(O\Omega)$.

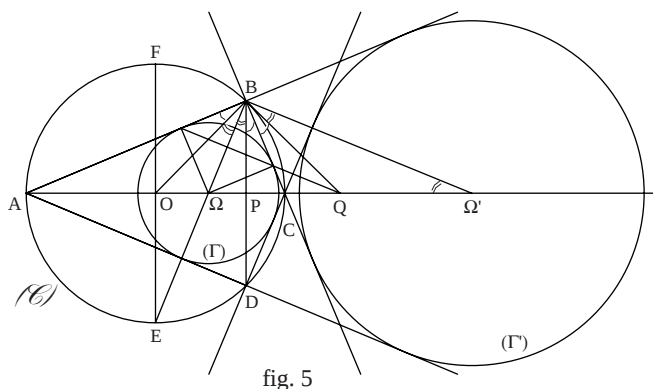
Le quadrilatère $ABCD$ est un des deux quadrilatères symétriques interscrits dans la paire $\mathcal{C}(O, R)$, $\Gamma(\Omega, \rho)$. L'autre sera utilisé au § 6. Comme il fallait s'y attendre, l'existence d'un quadrilatère interscrit équivaut à la relation :

$$f_4(R, \rho, d) \equiv 2\rho^2(d^2 + R^2) = (R^2 - d^2)^2$$

L'examen de la figure $[B\Omega, \text{diagonale du carré } BS\Omega T, \text{ donc bissectrice de l'angle en } B \text{ du quadrilatère, rencontre } \mathcal{C}(O, R) \text{ au milieu d'un des deux demi-cercles définis par le diamètre } AC]$ mène à la construction suivante : on se donne $\mathcal{C}(O, R)$ et Ω , $O\Omega = d < R$. On trace le diamètre AC de $\mathcal{C}(O, R)$ contenant Ω . La médiatrice de AC coupe $\mathcal{C}(O, R)$ en E et F , $E\Omega$ coupe $\mathcal{C}$ en B : ρ est la distance de Ω à l'une ou l'autre des droites AB et CB : le cercle Γ de centre Ω , tangent à AB et CB , fournit une solution.

E et F jouent le même rôle, ce qui suggère d'utiliser les deux à la fois.

Reprenons : on se donne $\mathcal{C}(O, R)$, et deux diamètres perpendiculaires AC et EF . On choisit un point B sur $\mathcal{C}(O, R)$. Les droites BE et BF (fig. 5) coupent la droite AC respectivement en Ω et Ω' . Soit $\Gamma(\Omega, \rho)$ le cercle de centre Ω tangent aux droites BA et BC , $\Gamma'(\Omega', \rho')$ le cercle de centre Ω' tangent aux mêmes droites. Les paires $\mathcal{C}(O, R)$, $\Gamma(\Omega, \rho)$ d'une part, $\mathcal{C}(O, R)$, $\Gamma'(\Omega', \rho')$ d'autre part, permettent d'inscrire des quadrilatères. Elles sont dites associées. Elles ont un seul quadrilatère interscrit en commun, $ABCD$.



BD coupe AC en P , la tangente à $\mathcal{C}(O, R)$ en B coupe AC en Q . Des égalités d'angles indiquées sur la figure prouvent que Q est aussi le point d'intersection des médiatrices de $B\Omega$ et $B\Omega'$. La polaire de B par rapport à $\Gamma(\Omega, \rho)$ passe par Q . La polaire de Q par rapport à $\Gamma(\Omega, \rho)$ est donc BD , qui est aussi la polaire de Q par rapport à $\mathcal{C}(O, R)$ par construction de Q . P et Q sont conjugués par rapport aux

deux cercles de la paire $\mathcal{C}(O, R)$, $\Gamma(\Omega, \rho)$: ce sont les points limites, ou points de Poncelet du faisceau de cercles définis par cette paire. Par le même raisonnement, ce sont les points de Poncelet du faisceau défini par $\mathcal{C}(O, R)$ et $\Gamma'(\Omega', \rho')$. Il s'en suit que les trois cercles $\mathcal{C}(O, R)$, $\Gamma(\Omega, \rho)$ et $\Gamma'(\Omega', \rho')$ appartiennent au même faisceau de cercles.

A et C sont les centres d'homothétie positive et négative de Γ et Γ' . On en déduit les rapports ($d = O\Omega$, $d' = O\Omega'$) :

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{R+d}{R+d'} = \frac{R-d}{d'-R} = \frac{R}{d'} = \frac{d}{R} \Rightarrow dd' = R^2 \text{ et } \frac{\rho^2}{\rho'^2} = \frac{d}{d'}$$

Nous avons démontré que si la paire $\mathcal{C}(O, R)$, $\Gamma(\Omega, \rho)$ convient pour inscrire un quadrilatère, la paire associée $\mathcal{C}(O, R)$, $\Gamma'(\Omega', \rho')$, où $dd' = R^2$, $\rho^2 d' = \rho'^2 d$ convient également. D'ailleurs on vérifie que la relation $2\rho^2(d^2 + R^2) = (R^2 - d^2)^2$ est conservée par la transformation (involutive) : $d \mapsto \frac{R^2}{d}$, $\rho \mapsto \frac{\rho R}{d}$.

Il semblerait que tout a été dit, ou presque, et qu'on puisse conclure que la relation $2\rho^2(d^2 + R^2) = (R^2 - d^2)^2$ est la condition nécessaire et suffisante d'interscriptibilité d'un quadrilatère dans deux cercles. C'est faux. Cette condition a été découverte dans le cas où l'un des cercles est contenu dans l'autre, elle a été confirmée dans le cas où le cercle « inscrit » est extérieur au cercle circonscrit. Et si les deux cercles $\mathcal{C}(O, R)$ et $\Gamma(\Omega, \rho)$ se coupaient ? Il y aurait des quadrilatères pliés (Voir triangles inscrits, AMV n° 3, § 1, f)).

5 Quadrilatères pliés. Un nouveau cas d'interscriptibilité.

Il y a quadrilatères pliés quand il y a points communs ou tangentes communes aux cercles $\mathcal{C}$ et Γ . Par exemple reprenons (fig.6) une paire $\mathcal{C}(O, R)$, $\Gamma(\Omega, \rho)$, Γ et $\mathcal{C}$ extérieurs, satisfaisant à la condition d'interscriptibilité.

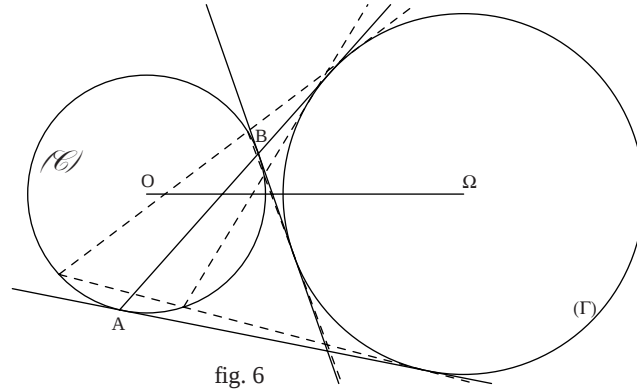


fig. 6

Choisissons comme point A sur $\mathcal{C}(O, R)$ un point de contact d'une tangente commune extérieure aux deux cercles. L'autre tangente à Γ issue de A recoupe $\mathcal{C}$ en B . B est justement point de contact d'une tangente commune intérieure. La tangente à Γ issue de B recoupe donc $\mathcal{C}$ en B . L'autre tangente issue de B fait revenir en A . En partant d'un point voisin de A sur $\mathcal{C}$, on comprend comment le quadrilatère se plie suivant le segment AB deux fois : $ABBA$.

Voici un problème à traiter, pour les amateurs : démontrer la propriété suivante : La condition pour que la droite qui joint un point de contact avec $\mathcal{C}$ d'une tangente commune extérieure, et un point de contact avec $\mathcal{C}$ d'une tangente commune intérieure, soit tangente à Γ est : $2\rho^2(d^2 + R^2) = (R^2 - d^2)^2$.

L'existence d'un quadrilatère inscrit, fût-il plié, équivaut à cette relation (en pointillés, un quadrilatère « voisin » du quadrilatère plié).

Dans le cas où les cercles se coupent, comme pour le triangle, on peut donc espérer trouver la condition d'interscriptibilité éventuelle en cherchant un quadrilatère plié interscriptible. Dans ce pliage où intervient au moins un segment parcouru deux fois, on constate que les extrémités du parcours sont : point commun aux deux cercles, qui compte pour *un* sommet du quadrilatère, ou point de contact de tangente commune

aux deux cercles, qui compte pour *deux* sommets du quadrilatère. Pour obtenir quatre sommets, il n'y a que deux façons :

- 1) Joindre par un segment, qui doit être tangent à Γ , les points de contact avec $\mathcal{C}$ des deux tangentes communes (extérieures).
- 2) Prendre les tangentes aux deux points communs à $\mathcal{C}$ et Γ , qui doivent se couper sur $\mathcal{C}$.

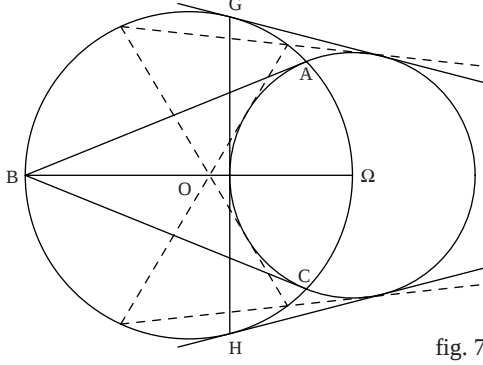


fig. 7

1) $GHHG$ interscrit, plié suivant un segment.

2) $ABCB$ interscrit, plié suivant deux segments.

1) comme 2) fournissent (fig.7) la relation $d = R$, ρ arbitraire, $0 < \rho < 2R$. On vérifie alors que tout point de l'arc de $\mathcal{C}(O, R)$ extérieur à $\Gamma(\Omega, \rho)$ est sommet d'un quadrilatère interscrit et que ce quadrilatère est dans tous les cas un contre-parallélogramme (quadrilatère croisé admettant un axe de symétrie).

On peut maintenant conclure :

Soient deux cercles $\mathcal{C}(O, R)$, $\Gamma(\Omega, \rho)$ ($d = O\Omega$). Pour qu'il existe **un** quadrilatère interscrit dans ces deux cercles, il faut et il suffit que :

$$(1) \ 2\rho^2(d^2 + R^2) = (R^2 - d^2)^2 \quad \text{ou} \quad (2) \ R = d, \rho < 2R$$

Alors, dans les deux cas, il existe **une infinité** de quadrilatères interscrits dans cette paire de cercles.

Dans le premier cas, Γ est inclus dans $\mathcal{C}$, ou extérieur à $\mathcal{C}$. On peut associer un cercle inclus Γ et un cercle extérieur Γ' par : $dd' = R^2$, $\rho^2 d' = \rho'^2 d$.

$\mathcal{C}$, Γ , Γ' appartiennent au même faisceau de cercles ; il existe un quadrilatère interscrit à la fois dans $(\mathcal{C}, \Gamma)$ et dans $(\mathcal{C}, \Gamma')$, à savoir celui dont les quatre côtés sont les tangentes communes à Γ et Γ' .

Dans le deuxième cas, tous les quadrilatères interscrits dans la paire $\mathcal{C}(O, R)$, $\Gamma(\Omega, \rho)$ admettent la droite des centres $O\Omega$ comme axe de symétrie.

Fin du deuxième épisode. Suite au prochain numéro ...