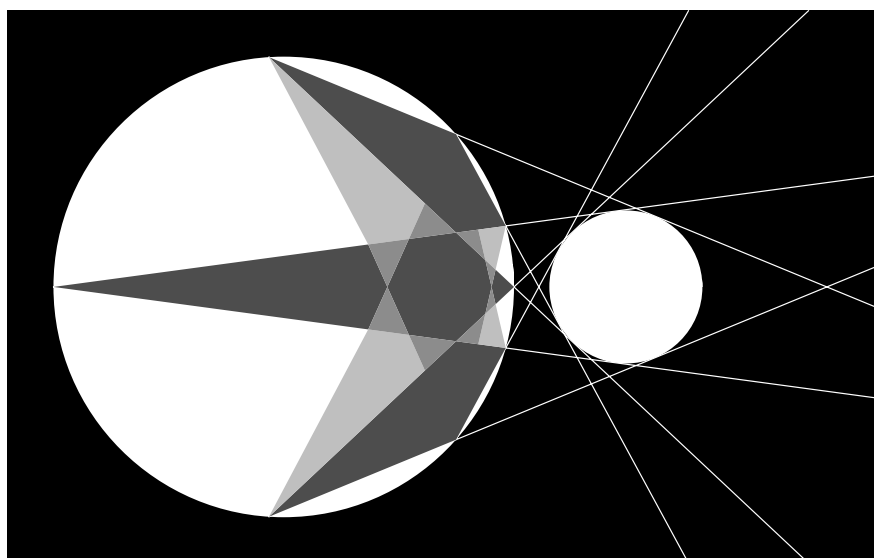


a
p
m
e
p

Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public

Aix Marseille Vert

Bulletin de la régionale APMEP d'Aix-Marseille



- Éditorial
- Souvenirs d'une présidence
- Triangles et quadrilatères inscrits
- Échos du colloque MSF
- La rubrique pédagogique
- L'agenda du prof de maths

*Magazine paraissant trois fois par an
N°3 (Octobre, Novembre, Décembre 2000)*

Éditorial

Catherine Dufossé

Pour des mathématiques ouvertes

Bonjour et bonne rentrée à tous.

Pas facile cette année qui s'ouvre ! En collège, en lycée général, en lycée professionnel, voici venir les travaux inter-disciplinaires. C'est dérangeant, et c'est agaçant parce que nous ne savons pas faire, parce que c'est contraire à notre éducation, parce que les moyens ne sont pas au rendez-vous, parce que les projets sont mal ficelés, tant dans le contenu que dans l'organisation administrative.

Alors, faut-il tempêter, refuser de jouer ce jeu ? boycotter comme certains l'ont proposé ? militer pour le statu quo ?

Pourtant ! Nous sommes bien conscients que nos disciplines sont trop cloisonnées, chacun roulant tout seul en ignorant superbement les autres, comme si la culture et la science étaient divisées en route parallèles sans aucun carrefour. C'est bien ainsi que nous avons appris à voir le monde, changeant d'univers en changeant de salle de classe et de professeur, coupant le Pascal écrivain du Pascal probabiliste (ah bon ! c'est le même ?), rencontrant les artistes de la Renaissance sans entendre parler de ses savants, découvrant la dérivée sans lien avec la vitesse, puis le centre de gravité sans lien avec le barycentre.

On nous a appris des mathématiques pures, si pures qu'elles étaient coupées de l'histoire et de tout lien avec le réel. Nous devons aujourd'hui leur rendre leur humanité et revenir sur terre. L'atterrissage n'est pas si facile ! Nous savons par oui-dire que les maths sont utiles mais on ne nous a jamais dit à quoi, et plus d'un prof de maths a peur de se salir les mains en allant voir du côté des applications.

Les mathématiques y perdraient-elles leur âme ? Je ne le crois pas : il s'agit plutôt ici de reconquête. Les mathématiques ont plusieurs visages et ce serait les appauvrir que d'ignorer leur lien avec la réalité du monde ; elles ont, après tout, été fondées d'abord par des savants aussi physiciens que mathématiciens. Bien des concepts que nous développons devant nos élèves sans référence à la physique ont été même spécifiquement fabriqués pour résoudre des problèmes de physique. Les maths pour les maths, l'art pour l'art, ça a toujours existé, certes, mais ce n'est qu'une part des mathématiques : acceptons aussi leur part d'utilité et de réalité : même si elle a été trop négligée dans l'enseignement éthéré que nous avons reçu, elle est bien un aspect fondamental de notre discipline ; n'oublions pas le *s* de notre discipline aux multiples visages.

Il ne s'agit pas de nous perdre dans des connaissances vagues et mal maîtrisées. Il me semble qu'il est seulement question d'accepter d'aller voir du côté des autres disciplines et d'y observer ce qui les relie à nous. Nous commençons d'ailleurs à savoir jouer ce jeu en section ES, et nous avons découvert qu'il est intéressant.

Premier exemple : j'ai appris en discutant avec une collègue de SES l'autre jour, ce qu'est le « seuil de pauvreté ». C'est la moitié du salaire moyen d'un pays donné. Voilà qui est intéressant : le pourcentage de la population qui vit « en dessous du seuil de pauvreté » n'est donc nullement un indicateur de position ; c'est un indicateur de dispersion de la richesse des habitants d'un pays. Cela, il est légitime que nous, matheux, nous l'expliquions à nos élèves.

Autre exemple : nos élèves de première S font en cours de physique des évaluations de vitesse instantanée sur des tracés de trajectoires donnés par des traces d'encre laissées à intervalles réguliers par un palet mobile. Pour évaluer la vitesse en t_0 , ils utilisent le quotient $\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0-\Delta t)}{2\Delta t}$. Or ils apprennent au même moment en mathématiques la définition classique de la dérivée. Il serait bien utile de leur expliquer pourquoi la formule des physiciens est plus efficace que celle des matheux sur une parabole, mais comment elle peut conduire à attribuer une dérivée à des fonctions non dérivables (voir la fonction valeur absolue en zéro). C'est bien là faire des mathématiques, et de fort belles !

Tout cela n'est référencé nulle part, et ne se rencontre que part bribe, ici ou là. Notre bulletin vert est une bonne source. C'est le moment de le feuilleter et la base de données Publimath¹ peut nous aider.

1. La base est consultable en ligne sur internet à deux adresses :
– celle de Marseille : <http://publimath.irem.univ-mrs.fr/>
– celle du miroir de Lyon : <http://publimath.univ-lyon1.fr/>

Ces sujets ne sont pas classiques et le chemin est à défricher. Allons-y sans complexe et avec modestie : nous ne deviendrons pas demain des encyclopédies ; il s'agit surtout d'accepter d'ouvrir nos yeux et nos oreilles à d'autres secteurs, et de parler métier avec nos collègues d'autres disciplines, pour pratiquer des mathématiques ouvertes.

Nous, matheux, nous avons des outils pour comprendre le monde et pour aider nos élèves à le comprendre ; il ne faut pas y renoncer. Alors, de l'air, ouvrons nos fenêtres et acceptons cette aventure même si elle semble peu confortable !

Des nouvelles de la Régionale et de son bulletin

Yvon Poitevineau

Notre régionale APMEP d'Aix-Marseille a connu cette année quelques changements, puisque la réunion du 20 Septembre a été l'occasion d'élire un nouveau bureau, dont vous pouvez lire la composition en page 2 de couverture du présent bulletin.

André Bonnet a souhaité être déchargé de la tâche de président, qu'il avait assurée depuis 1990. Pendant cette période, notre régionale a su organiser chaque année des débats, conférences, ateliers relatifs aux mathématiques et à leur enseignement, et l'événement marquant aura été celui de l'organisation des Journées Nationales de 1997.

Catherine Dufossé vient tout juste de quitter la présidence du Bureau National de l'APMEP ; elle devenait pour notre régionale une chance à saisir, et en en prenant les rênes, elle pourra mettre en œuvre les thèmes d'action qu'elle avait pu élaborer lors de la présidence nationale. Nous lui souhaitons bonne chance pour la tâche qui l'attend.

En ce qui concerne le bulletin de la régionale, nous avions initialement prévu un numéro par trimestre ; il se trouve que les mois de Juillet, Aout et Septembre, qui correspondent aux périodes de vacances et de rentrée, nous posaient quelques problèmes de réalisation et de diffusion. Nous avons donc décidé de faire paraître trois numéros par an, qui devraient sortir respectivement fin Septembre, fin Décembre et fin Mars.

Pour tenir ce nouveau cap, nous avons besoin de vous ; il nous faut vos remarques et critiques, et des articles (tous sujets ayant trait à l'enseignement des maths ; en particulier les expériences que vous réalisez dans vos classes nous intéressent).

À vos plumes ! Vous pouvez me contacter par mail, courrier ou téléphone :

Yvon Poitevineau
213 chemin du vallon de l'amandier
13 190 Allauch
tél. 04 91 68 56 58
email. ypoit@gulliver.fr

Souvenirs d'une présidence

Catherine DUFOSSÉ

Ouf! J'ai rendu mon tablier de présidente nationale de l'APMEP. Quelle aventure, mes amis! J'en suis encore tout étonnée. C'est que, ce n'est pas rien de présider l'APMEP pendant une année... Et quelle année!

J'en suis encore tout essoufflée: ce fut d'abord un travail exigeant de chaque jour, un deuxième métier à plein temps. Une vie coupée en deux entre lycée et association, une obligation de vitesse, d'efficacité, de régularité. Une à deux heures au moins tous les jours devant son courrier électronique, souvent des soirées entières, parfois très tard. J'ai fait d'énormes progrès d'organisation, et de rentabilité, y compris dans mon métier de professeur: nécessité fait loi!

Le plus difficile, ce fut l'absence de repos: cours au lycée du lundi 9 heures au Jeudi 17 heures, week-end à Paris avec bien souvent des réunions du vendredi après-midi au dimanche après-midi, paquets de copies avalés durant les trajets en TGV. Plusieurs fois, ce furent ainsi quatre week-end de suite: cinq semaines d'affilée sans un jour de repos, ça finit par peser! Il vaut mieux avoir une santé solide pour présider l'APMEP. J'ai bien résisté, merci!

Mais pourquoi courir ainsi, et quels en furent les bénéfices? Ils ont été immenses, et ils ont fait de cette année pour moi une année exceptionnelle, et extraordinairement enrichissante: apprentissages, rencontres, moments d'exception.

Apprentissages

J'aurai appris beaucoup. Des mathématiques d'abord: les journées nationales, bien sûr, les cours de statistiques de Claudine Robert, les conférences du Prix d'Alembert, mais aussi la lecture des articles pour préparer le bulletin vert, les publications régionales qui me sont parvenues, le cours de Régis Gras sur le test du Khi deux, les conférences organisées à Marseille, la journée de Colloque de Maths Sans Frontière... Militer à l'APMEP, c'est une occasion d'ouverture où la curiosité intellectuelle comme la nécessaire formation continue professionnelle trouvent à s'alimenter de façon variée et parfois inattendue: je pense à la visite du musée du CNAM à Paris, lors de la journée organisée par le ministère sur la parité hommes-femmes au mois de Février.

J'ai fait aussi mon éducation de citoyenne: j'ai découvert comment fonctionne la politique de l'éducation et la prise de décision: découverte ahurissante d'un pouvoir régalien où le Ministre a toujours raison. « Le Ministre a dit », « le Ministre souhaite que... », « le Ministre pense que... », sont dans notre pays des arguments qui l'emportent sur toute autre considération. Bien sûr, le gouvernail doit être tenu d'une main ferme, bien sûr, face aux pressions et aux souhaits contradictoires des groupes divers, il faut trancher, in fine. Mais pendant cette année un peu plus proche des sphères de décision, j'ai eu l'impression que la démocratie fonctionnait bien mal dans notre pays.

Le travail de réflexion pourtant ne manque pas: que de groupes, de commissions, de réunions! Ils font un travail admirable, ils sont composés de gens compétents et dévoués, qui font de leur mieux pour faire progresser la grande machine de l'Éducation Nationale. Ces groupes travaillent sans la moindre reconnaissance, de façon presque toujours bénévole, et souvent sans moyen décent de fonctionnement, par seul souci du bien commun. Ils font des recommandations sensées, réfléchies, argumentées, qui seraient profitables à la collectivité. Et puis... Ceux qui décident ignorent en général ce travail, ne font pas l'effort de prendre connaissance de cette réflexion. Quand ils n'ignorent pas jusqu'à leur existence, ils survolent les rapports, entre deux réunions, entre deux rendez-vous ou deux coups de téléphone. Ils ont autre chose à faire, et ça les intéresse peu. Préparer de grands rendez-vous médiatiques, inventer quelque mesure « géniale », du fond d'un bureau éloigné de toute réalité (je pense à la demi-heure hebdomadaire de lecture dans les classes de cinquième...), quelque formule qui fera choc dans les médias, (« l'Ecole est son propre recours »...) C'est beaucoup plus productif sur le plan politique que de se soucier vraiment des difficultés du terrain, et de se pencher sérieusement sur les recommandations de tel ou tel groupe.

Alors, on n'en croit pas ses yeux. On connaît la qualité du travail de réflexion mené ici et là, et on entend le plus souvent, les jours de rencontre au Ministère, des conversations de café du commerce où les phrases qui parlent vraiment d'enseignement commencent le plus souvent par « Mon fils, en sixième... », « Le prof de ma fille... », « Dans la classe de ma femme... ».

Les préjugés, les vieux poncifs, les souvenirs d'enfance ou les histoires familiales servent trop souvent de base de réflexion et de justification à des mesures qui concernent des millions de jeunes, alors que le travail sérieux de réflexion est là, à portée de main, appuyé sur l'expérience et la réalité du terrain.

Faut-il pour autant renoncer? Sûrement pas! On rencontre de temps en temps, dans un bureau une perle rare, quelqu'un qui réfléchit vraiment, qui est conscient des enjeux et des difficultés, qui se soucie de la réalité des problèmes à résoudre et prend le temps de vous écouter sérieusement, sans vous disqualifier a priori en vous collant par avance telle ou telle étiquette, sans raisonner uniquement en termes de gains politiques. Je pense à Catherine Moisan parlant des BEP, ou à une collègue enseignant à mi-temps et chargée à la DESCO de travailler sur les TPE.

Et puis, à force de dire, de répéter, d'écrire, on finit par faire admettre quelques vérités. Il y faut encore beaucoup plus de patience et de ténacité que devant une classe, et on y rencontre, en plus, des obstacles inconnus auprès des élèves : des préjugés solidement ancrés (« la dictature des maths », « l'impérialisme des maths », « les méfaits de l'abstraction », « l'immobilisme des profs » ...) et quelquefois aussi l'arrogance (L'interview de Claude Allègre dans Paris-Match peu après son éviction était un modèle du genre!).

L'APMEP n'en reste pas moins un lien tenu mais précieux entre la réalité de l'enseignement des mathématiques tel qu'il se pratique, et les bureaux où l'on décide. Elle est un témoin, et un outil de ce que devrait être une démocratie vivante, un médiateur indispensable et parfois efficace. Il est vital pour notre profession, et pour que le mot de démocratie ne soit pas un vain mot, que cette médiation demeure et se renforce. Le seul outil ici est la parole tout comme au temps de la démocratie athénienne. Nos milieux dirigeants ont d'abord besoin d'une parole vraie, qui parle de la réalité, d'une parole éloignée des langues de bois partisans, des théories dogmatiques, des visées politiciennes et des luttes de pouvoir.

Cette certitude de parler de la réalité, de traduire les difficultés qui se rencontrent partout, fait notre force et donnent dans n'importe quelle réunion, ou devant n'importe quel technocrate, si arrogant ou si puissant soit-il, une assurance et une sérénité qui m'ont étonnée moi-même. Car les questions que nous posons, les difficultés que nous soulevons, ce sont celles de tous : le facteur temps dans l'apprentissage, la nécessité de la formation continue, l'importance vitale de l'évaluation, la difficulté du travail personnel des élèves, la nécessité de prendre véritablement en considération les élèves en difficulté, la volonté de donner une formation efficace sur le long terme. La réunion inter-académique de Lyon m'a renforcée dans cette évidence : notre discours est bien au diapason des questions et des difficultés de toute la profession.

Rencontres

Je suis pleine d'admiration pour nombre de ceux qu'il m'a été donné de rencontrer. À l'intérieur de l'association comme à l'extérieur, ces années au bureau national m'ont permis d'apprécier et de nouer des relations amicales et même des amitiés solides avec beaucoup, et je suis encore éblouie de la qualité des personnes que j'ai côtoyées. Vraiment, il y a beaucoup de beau monde à l'APMEP mais aussi dans bien d'autres associations amies comme l'UPS, ou la SMF, et dans beaucoup de lieux de réflexion, et je pense en particulier à la commission Kahane.

Travailler en relation avec eux a été un privilège et sans doute la plus belle part de ce que m'ont apportées ces années au bureau national. Il est bien délicat de donner ici des exemples, bien sûr, mais permettez-moi tout de même de citer un nom car il illustre parfaitement mon propos et je suis sûre qu'il fera l'unanimité et qu'il ne peut pas faire de jaloux : celui de Michèle Artigue.

Moments d'exception

Le métier de présidente de l'APMEP vous procure des instants mémorables! Faire un discours à l'ouverture des Journées nationales, avec 600 paires d'yeux braqués sur moi fut l'un des plus inoubliables et pas des plus faciles : c'est qu'ici, je m'exprimais devant mes pairs, et ils connaissaient aussi bien que moi la réalité dont je parlais. Ce fut le moment le plus impressionnant de mon année de présidence, et je n'ai guère osé quitter mon papier des yeux, malgré la bienveillance du public.

J'ai vécu d'autres instants un peu surréalistes pour un professeur de lycée :

- Donner son avis sur un livre au jury du prix d'Alembert, au milieu d'une brillante assemblée, pour la plupart mathématiciens renommés, parmi lesquels un Alain Connes attentif et bienveillant ... Excusez du peu!

- Parler au micro dans la grande salle de l'Académie des Sciences, en réponse à une intervention de Gustave Choquet, au cours d'une séance organisée par Jean-Pierre Kahane sur le thème « mathématiques et autres disciplines ».

Dans des moments d'exception tels que ceux-là, j'avais presque besoin de me pincer pour me prouver que je ne rêvais pas! Ce sont dans mon souvenir comme des cartes postales qu'on ramène d'un voyage à l'étranger, des instants étonnants, passionnants, mais qui restent éloignés du travail de fond. L'enjeu dans ces moments-là, c'est qu'on représente toute une profession auprès de gens qui la connaissent peu :

on porte en quelque sorte sur ses épaules l'honneur des professeurs du secondaire. Alors, il faut essayer d'être bon!!

Je termine cette année avec une grande reconnaissance envers ceux qui ont construit notre association : ils l'ont dotée de statuts qui la rendent vivante, de conditions matérielles satisfaisantes et bien gérées même si elles ne sont pas luxueuses, ils lui ont bâti une réputation de sérieux et d'ouverture très méritée, ils ont mis en place des outils de communication variés et qui fonctionnent bien. Qu'ils en soient remerciés.

À nous, les professeurs de mathématiques d'aujourd'hui, ils ont transmis un outil remarquable de formation, de réflexion, de communication. Il nous reste à bien le gérer, à l'utiliser à plein. Chacun de nous peut y trouver une occasion de se former, de s'exprimer, de faire des rencontres enrichissantes, de développer hors hiérarchie une réflexion commune sur notre pratique et notre discipline. C'est une chance à ne pas laisser passer, et qui apporte une dimension supplémentaire à un métier passionnant.

Cette année m'aura permis de l'apprécier plus qu'aucune autre.

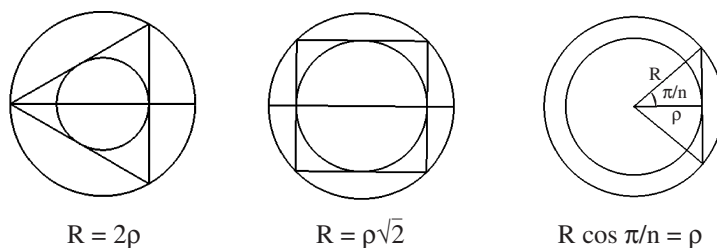
Triangles et quadrilatères inscrits dans un cercle, et circonscrits à un autre cercle

Françoise PÉCAUT

Deux cercles étant donnés dans un plan, il est impossible, en général, d'inscrire dans l'un d'eux un polygone qui soit en même temps circonscrit à l'autre, et quand, pour une situation particulière de ces cercles, un tel polygone est possible, il y en a une infinité d'autres de même ordre qui jouissent de cette singulière propriété. *Jean-Victor Poncelet*

On trouve ce texte dans le tome 1, p.364, de son ouvrage « Applications d'analyse et de géométrie », conçu pendant les quinze mois de sa captivité à Saratoff, sur la Volga (Avril 1813 — Juin 1814).

Ce théorème, d'apparence élémentaire, est difficile: d'après Marcel Berger (Géométrie, tome 4, § 16.6) toutes les démonstrations connues « sont assez cachées et longues », et c'est bien vrai. La « situation particulière » évoquée ci-dessus se traduit par une relation entre les rayons R et ρ des deux cercles et la distance d de leurs centres. On pense aussitôt au cas des cercles concentriques :



Dans la suite, on utilise l'expression « polygone *interscrit* dans $\mathcal{C}(O, R)$ et $\Gamma(\Omega, \rho)$ » pour désigner un polygone inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ de centre O , de rayon R , et circonscrit au cercle Γ de centre Ω , de rayon ρ ; $d = O\Omega$ désigne la distance des centres.

Le présent article, qui se veut une initiation au théorème de Poncelet, va comprendre quatre épisodes qui s'étaleront sur quatre numéros du bulletin.

Il débute par un énoncé des résultats dans le cas facile des triangles interscrits, énoncé qui indique le plan suivi ensuite pour les quadrilatères interscrits. Le lecteur est invité à démontrer lui-même ces résultats qui font l'objet de la section 1 ; il trouvera en annexe 11 des indications sur les solutions.

1 Triangles interscrits

a) Un cercle $\mathcal{C}(O, R)$ étant donné, on choisit trois points A, B, C de ce cercle. On construit le cercle $\Gamma(\Omega, \rho)$ inscrit dans le triangle ABC .

On trouve : $R^2 - d^2 = 2\rho R$.

b) On se donne $\mathcal{C}(O, R)$ et un point Ω intérieur à $\mathcal{C}$: $d < R$. On prend ρ tel que $R^2 - d^2 = 2\rho R$. On trace $\Gamma(\Omega, \rho)$, qui est intérieur à $\mathcal{C}$. On montre alors que, quelque soit le point A choisi sur $\mathcal{C}$, A est un sommet d'un triangle interscrit dans la paire $\mathcal{C}(O, R), \Gamma(\Omega, \rho)$.

c) On reprend a) : un cercle $\mathcal{C}(O, R)$ étant donné, on choisit trois points A, B, C de ce cercle. On construit le cercle $\Gamma(\Omega, \rho)$, exinscrit au triangle ABC , situé dans l'angle A du triangle ABC . On trouve : $d^2 - R^2 = 2\rho R$.

d) On se donne $\mathcal{C}(O, R)$ et un point Ω extérieur à $\mathcal{C}$: $d > R$. On prend ρ tel que $d^2 - R^2 = 2\rho R < \rho(R + d)$ donc $d - R < \rho$, $\Gamma(\Omega, \rho)$ coupe $\mathcal{C}(O, R)$. On montre alors que, quelque soit le point A choisi sur l'arc de $\mathcal{C}$ extérieur à Γ , A est un sommet d'un triangle interscrit dans la paire $\mathcal{C}(O, R), \Gamma(\Omega, \rho)$.

Avec a), b), c), d) on a démontré : une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un triangle interscrit dans la paire $\mathcal{C}(O, R), \Gamma(\Omega, \rho)$ est : $|R^2 - d^2| = 2\rho R$. Alors il y a une infinité de triangles interscrits dans les deux cercles.

e) On se donne $\mathcal{C}(O, R)$ et le point Ω : construction de $\Gamma(\Omega, \rho)$ (fig. 1)

Soit AD le diamètre de $\mathcal{C}$ contenant Ω . Le cercle de centre D , de rayon $D\Omega$ coupe $\mathcal{C}$ en B et C , et recoupe l'axe de symétrie de la figure en Ω' : On trouve du même coup **deux** cercles $\Gamma(\Omega, \rho)$ et $\Gamma'(\Omega', \rho')$, ρ et ρ' étant les distances de Ω et Ω' à la corde BC , l'un intérieur à $\mathcal{C}$, l'autre coupant $\mathcal{C}$, tels que les paires $(\mathcal{C}, \Gamma)$ et $(\mathcal{C}, \Gamma')$ admettent toutes deux des triangles inscrits.

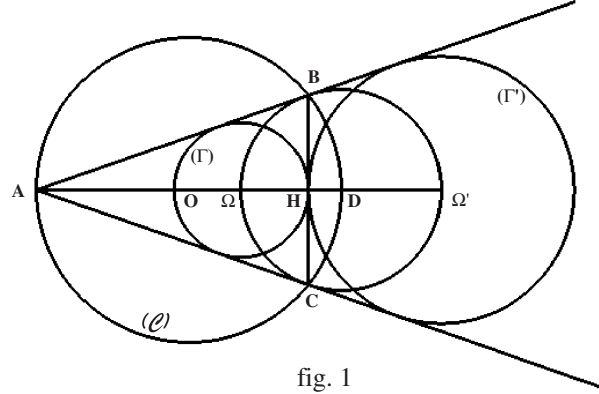
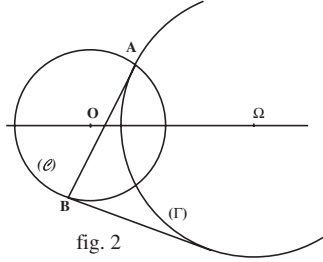


fig. 1

À une solution au problème d'interscription dans $\mathcal{C}(O, R)$, $\Gamma(\Omega, \rho)$, $O\Omega = d$, correspond une autre solution $\mathcal{C}(O, R)$, $\Gamma'(\Omega', \rho')$, $O'\Omega' = d'$ avec $d + d' = 2R$, $\rho(R + d') = \rho'(R + d)$.

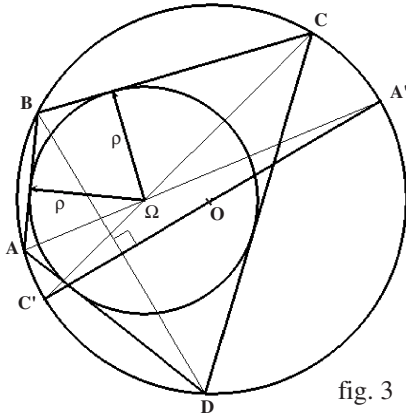


f) Triangles interscrits pliés :

Soit $(\mathcal{C}, \Gamma)$ une paire de cercles satisfaisant la condition d'interscriptibilité pour les triangles, $\mathcal{C} \cap \Gamma \neq \emptyset$. Soit A un des points d'intersection des deux cercles. La tangente en A à Γ recoupe $\mathcal{C}$ en B . Le « triangle » ABB est interscrit plié. B est le point de contact avec $\mathcal{C}$ d'une tangente commune aux deux cercles.

2 Condition que doivent satisfaire R, ρ, d pour qu'il existe un quadrilatère interscrit dans deux cercles $\mathcal{C}(O, R)$ et $\Gamma(\Omega, \rho)$

Une première difficulté se présente : comment dessiner un quadrilatère inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre ? Supposons-la résolue, au moins approximativement. $ABCD$ est un quadrilatère inscrit dans $\mathcal{C}(O, R)$, circonscrit à $\Gamma(\Omega, \rho)$. On a choisi de faire la figure dans le cas $\Gamma \subset \mathcal{C}$.



Soit A' (resp. C') le point où $A\Omega$ (resp. $C\Omega$) recoupe $\mathcal{C}$. A' et C' sont les milieux des deux arcs BD , ils appartiennent donc à la médiatrice du segment $[BD]$. On en déduit que la droite $C'A'$ passe par le centre O de $\mathcal{C}$. Alors le théorème de la médiane, appliqué au triangle $A'\Omega C'$ donne :

$$(1) \quad \Omega A'^2 + \Omega C'^2 = 2(d^2 + R^2)$$

La puissance de Ω par rapport à $\mathcal{C}(O, R)$ est : $\Omega A \cdot \Omega A' = \Omega C \cdot \Omega C' = R^2 - d^2$.

Le premier membre de (1) s'écrit donc : $(R^2 - d^2)^2 \left[\frac{1}{\Omega A^2} + \frac{1}{\Omega C^2} \right]$.

Par ailleurs, Ω est à la même distance ρ des droites AB et BC :

$$\rho = \Omega A \sin \frac{A}{2} = \Omega C \sin \frac{C}{2}$$

Mais les angles A et C du quadrilatère (convexe) inscritible $ABCD$ sont supplémentaires :

$$\rho = \Omega A \sin \frac{A}{2} = \Omega C \cos \frac{A}{2}, \text{ d'où } \frac{1}{\Omega A^2} + \frac{1}{\Omega C^2} = \frac{1}{\rho^2}.$$

Une condition nécessaire pour qu'il existe un quadrilatère interscrit dans la paire $\mathcal{C}(O, R)$, $\Gamma(\Omega, \rho)$ avec $O\Omega = d$ est donc :

$$(2) \quad 2\rho^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2$$

3 Soit une paire de cercles $\mathcal{C}(O, R)$ et $\Gamma(\Omega, \rho)$, $d = O\Omega$, telle que la relation (2) soit remplie. Permet-elle l'interscriptibilité?

Cette condition s'écrit aussi : $\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{\rho^2}$ d'où $\frac{1}{(R-d)^2} < \frac{1}{\rho^2}$.

Si $d < R$ alors $R - d > \rho$, qui implique $\Gamma \subset \mathcal{C}$.

Si $d > R$ alors $d - R > \rho$, qui implique Γ extérieur à $\mathcal{C}$.

Plaçons-nous dans le premier cas de figure, $\Gamma \subset \mathcal{C}$. Prenons A arbitraire sur $\mathcal{C}(O, R)$. Une tangente issue de A à Γ recoupe $\mathcal{C}$ en B ; l'autre tangente issue de B à Γ recoupe $\mathcal{C}$ en C ; l'autre tangente issue de C à Γ recoupe $\mathcal{C}$ en D . Comme précédemment, on introduit les points A' et C' , respectivement intersection de $A\Omega$ et de $C\Omega$ avec $\mathcal{C}$. On pose $\widehat{BA\Omega} = \varphi$, $\widehat{\Omega AD} = \psi$. $ABCD$ désignent toujours les angles du quadrilatère convexe $ABCD$. Il faut démontrer que la droite AD est tangente au cercle $\Gamma(\Omega, \rho)$. On peut le faire en prouvant que $\varphi = \frac{A}{2}$, à l'issue d'une page de calculs utilisant les mêmes ingrédients que la démonstration de la propriété directe, formules de trigonométrie en plus. C'est ennuyeux et n'apporte pas grand chose ; je tiens cette solution à la disposition des lecteurs, tout en leur demandant s'ils ne trouvent pas mieux.

J'ai fini par trouver mieux en passant en dimension 3 et en utilisant une projection conique, comme je l'exposerai dans la dernière partie de ce travail. C'est beaucoup plus élégant, mais un peu artificiel, et sort malheureusement du cadre des programmes du secondaire.

Provisoirement, supposons démontrée cette réciproque.

Fin du premier épisode. Suite au prochain numéro ...

Annexe : solutions des énoncés de la section 1

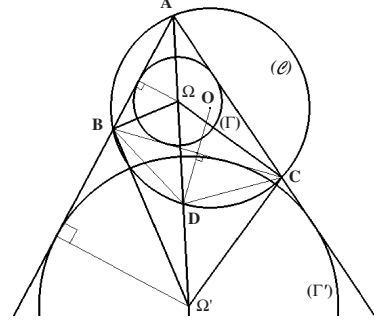
(proposées par Y. Poitevineau)

Rappelons que si $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O , de rayon R et M un point du plan, la puissance de M par rapport à $\mathcal{C}$ est le nombre : $\mathcal{P}(\mathcal{C}, M) = d^2 - R^2 = \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$ où $d = OM$ et (MPQ) n'importe quelle sécante à $\mathcal{C}$ passant par M .

Les énoncés a) et c) :

Soient donc le cercle $\mathcal{C}(O, R)$, trois points A, B, C de $\mathcal{C}$, $\Gamma(\Omega, \rho)$ et $\Gamma'(\Omega', \rho')$ les cercles inscrit et exinscrit dans l'angle A du triangle ABC (figure ci-contre).

Les bissectrices $(B\Omega)$ et $(B\Omega')$ sont perpendiculaires, de même que $(C\Omega)$ et $(C\Omega')$; donc les points Ω, B, Ω', C sont sur un cercle de diamètre $[\Omega\Omega']$; le centre D de ce cercle est le milieu de l'arc de $\mathcal{C}$ d'extrémités B et C ne contenant pas A (intersection de la bissectrice $(A\Omega\Omega')$ de l'angle en A , et de la médiatrice de $[BC]$).



On pose $O\Omega = d$ et on a alors d'une part $\mathcal{P}(\mathcal{C}, \Omega) = d^2 - R^2$, d'autre part :

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}, \Omega) = \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega D} = -\Omega A \times \Omega D = -\Omega A \times BD = -\frac{\rho}{\sin \frac{A}{2}} \times 2R \sin \frac{A}{2} = -2\rho R$$

en utilisant dans le triangle ABD la relation trigonométrique : $\frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} = 2R$.

De même on pose $O\Omega' = d'$ et on a d'une part $\mathcal{P}(\mathcal{C}, \Omega') = d'^2 - R^2$, d'autre part :

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}, \Omega') = \overrightarrow{\Omega' A} \cdot \overrightarrow{\Omega' D} = \Omega' A \times \Omega' D = \Omega' A \times BD = \frac{\rho'}{\sin \frac{A}{2}} \times 2R \sin \frac{A}{2} = 2\rho' R$$

L'énoncé b) :

Soient $\mathcal{C}(O, R)$ et Ω et supposons $R^2 - d^2 = 2\rho R$ ($d = O\Omega$). On en déduit $R > d$ donc Ω intérieur à $\mathcal{C}$, et $d^2 = R^2 - 2\rho R < (R - \rho)^2$ donc $d < |R - \rho|$: Γ intérieur à $\mathcal{C}$.

On prend un point $A \in \mathcal{C}$; la droite $(A\Omega)$ recoupe $\mathcal{C}$ en D et le cercle de centre D passant par Ω , qui est sécant à $\mathcal{C}$, coupe $\mathcal{C}$ en B et C (utiliser la figure précédente, ou mieux, en faire une soi-même). Montrons que Γ est inscrit dans le triangle ABC .

(AD) est bissectrice de l'angle A (D milieu de l'arc $\widehat{BC}$) et dans le triangle ABD on a :

$$\frac{BD}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{OD}{\sin \frac{A}{2}} = 2R$$

On a alors d'une part : $\mathcal{P}(\mathcal{C}, \Omega) = d^2 - R^2 = -2\rho R$, et d'autre part : $\mathcal{P}(\mathcal{C}, \Omega) = -\Omega A \times \Omega D = -\Omega A \times 2R \sin \frac{A}{2}$ d'où $\rho = \Omega A \sin \frac{A}{2} = d(\Omega, AB)$ et la droite (AB) est tangente à Γ ; de même la droite (AC) .

Pour prouver que (BC) est tangente à Γ , il suffit de montrer que $(B\Omega)$ est bissectrice de l'angle en B du triangle ABC ; or si Ω' est le point diamétralement opposé à Ω sur le cercle $(B\Omega C)$, on a (propriétés des angles inscrits) :

$$\widehat{\Omega BC} = \widehat{C\Omega'\Omega} = \frac{1}{2} \widehat{CD\Omega} = \frac{1}{2} \widehat{CDA} = \frac{1}{2} \widehat{CBA}$$

L'énoncé d) :

On suppose maintenant $d^2 - R^2 = 2\rho R$, donc Ω extérieur à $\mathcal{C}$ ($d > R$), et $d^2 = R^2 + 2\rho R < (R + \rho)^2$ donc $d < R + \rho$ et $\mathcal{C}$ et Γ sécants ou intérieurs.

Le cercle $\mathcal{C}$ est intérieur au cercle Γ si et seulement si $d^2 < (R - \rho)^2$, qui équivaut, compte tenu de $d^2 = R^2 + 2\rho R$, à $\rho > 4R$, ou encore à $d > 3R$. Il est impossible dans ce cas qu'il existe un triangle inscrit dans $\mathcal{C}$ et circonscrit à Γ .

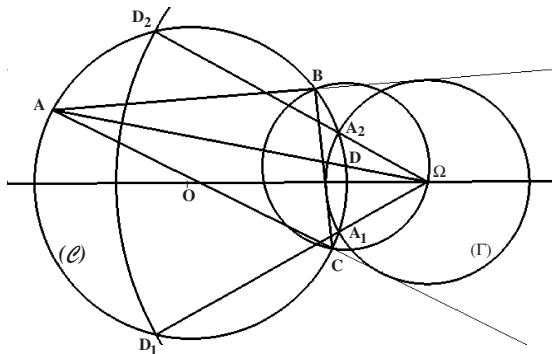
On suppose donc $d < 3R$. $\mathcal{C}$ et Γ sont sécants. On prend un point A sur l'arc de $\mathcal{C}$ extérieur à Γ . Alors $\Omega A > \rho$. La droite $(A\Omega)$ recoupe $\mathcal{C}$ en D . Le cercle de centre D passant par Ω et le cercle $\mathcal{C}$ sont sécants ; en effet $|\Omega D - R| < R$ équivaut à $\Omega D < 2R$. Cette condition, compte tenu de $d^2 - R^2 = 2\rho R = \Omega A \times \Omega D$, est : $\Omega A > \rho$.

Soient B et C les points d'intersection du cercle de centre D passant par Ω et de $\mathcal{C}$. On montre comme en b) que Γ est exinscrit dans l'angle A du triangle ABC .

L'énoncé e) :

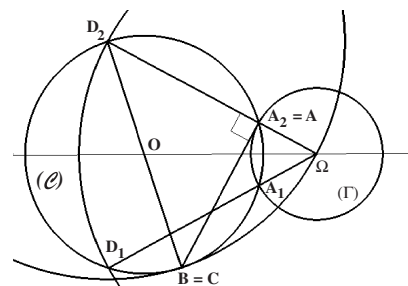
Les constructions indiquées découlent des b) et d).

Remarquons que dans le cas où Ω est extérieur à $\mathcal{C}$, une autre construction découle du d) : on trace le cercle de centre Ω , de rayon $2R$ qui coupe $\mathcal{C}$ (puisque $R < d < 3R$) en D_1 et D_2 d'où les points A_1, A_2 et le cercle Γ passant par A_1 et A_2 (voir figure ci-dessous où on a placé en plus un point A et le triangle interscrit correspondant).



L'énoncé f) :

Remarquons simplement qu'avec la construction précédente, les deux triangles interscrits pliés apparaissent comme des cas limites lorsque le sommet A du triangle interscrit est choisi à l'intersection des cercles $\mathcal{C}$ et Γ (figure ci-contre).



Remarque sur les démonstrations précédentes :

Certains d'entre nous se souviendront peut-être d'un théorème étudié dans la classe de mathématiques élémentaires : le théorème sur la différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles :

Si $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ sont deux cercles non concentriques de centres O, O' et de rayons R, R' , on a pour tout point M du plan : $\mathcal{P}(\mathcal{C}, M) - \mathcal{P}(\mathcal{C}', M) = 2OO' \cdot \vec{HM}$ où H est la projection orthogonale de M sur l'axe radical des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ (si les cercles sont sécants, cet axe radical est leur sécante commune).

Ce théorème permet de prouver la relation d'Euler de façon immédiate : si on exprime la différence des puissances de Ω par rapport au cercle $\mathcal{C}(O, R)$ et au cercle γ de centre D passant par Ω , on a :

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}, \Omega) - \mathcal{P}(\gamma, \Omega) = \mathcal{P}(\mathcal{C}, \Omega) - 0 = d^2 - R^2 = 2\vec{OD} \cdot \vec{\omega\Omega} = -2\rho R$$

où ω est la projection de Ω sur (BC) .

Les mêmes calculs permettront de prouver également les réciproques (on démontre que : $d(\Omega, BC) = \Omega\omega = \rho$).

Echos du colloque MSF

Françoise PITZALIS

Le colloque Mathématiques sans Frontières 2000 a eu lieu les 9 et 10 juin 2000 à Marseille et Aix en Provence. Le thème central était « *créativité et mathématiques* ».

Durant la matinée du 9 juin, 3 élèves, issus des 28 classes sélectionnées parmi les 424 qui ont participé cette année au rallye Mathématiques sans Frontières, concouraient pour le rallye final au lycée Thiers. Le lycée Mistral d'Avignon a pris la tête du palmarès, suivi par le collège Simone de Beauvoir de Vitrolles et le lycée Vauvenargues d'Aix en Provence. Le début d'après midi a été consacré à des ateliers, poésie et mathématiques, sculpture et mathématiques, langues et mathématiques ... , animés par d'autres élèves.

Pendant ce temps, au site IUFM de la Canebière, 300 professeurs de mathématiques de notre académie et d'autres mais aussi des suisses, hongrois, allemands, italiens, écossais et irlandais ont suivi des ateliers de formations – Nombre d'or et créativité, recherche en médecine et mathématiques, exemples de problèmes qui favorisent les essais des élèves écossais, le rôle du problème dans l'enseignement hongrois ... – entre autre.

En fin d'après midi, élèves et professeurs ont assisté à la conférence consacrée à « la créativité en mathématiques » donnée par Monsieur Jean Pierre Bourguignon, directeur de l'institut des hautes études scientifiques. Il s'en est suivi la remise des prix du Rallye final de Mathématiques sans Frontières en présence de Monsieur Michel Treuil, recteur de l'académie d'Aix-Marseille.

Le lycée Georges Duby de Luynes a accueilli le 10 juin les équipes d'organisations européennes de Mathématiques sans Frontières. Elles se sont livrées à une évaluation par secteur du rallye européen. Elles ont également fait le point sur les activités des diverses associations et ont commencé la préparation des épreuves de 2001.

Informations pédagogiques

Dans cette rubrique, nous vous proposons un certain nombre d'informations à caractère pédagogique. Certaines proviennent de notre association et on peut aussi les trouver dans nos bulletins nationaux ou sur le site de l'APMEP ; d'autres nous sont communiquées par des sources plus officielles (ministère, IPR etc.).

Si vous êtes doté d'une antenne efficace et avez connaissance d'informations pouvant intéresser nos lecteurs, vous êtes vivement invité à nous les communiquer.

Le serveur de l'APMEP

Tous les programmes de lycée, les aménagements pour l'année 2000-2001, les documents d'accompagnement, les fiches d'activités de statistiques élaborées par le GTD, les listes de TPE, la brochure de la régionale de Grenoble (voir article suivant) etc... sont sur le serveur de l'APMEP.

Allez sur la page « informations institutionnelles » (via « les rubriques du serveur ») ou dans « Commission lycées » (via « les rubriques du serveur », puis « les commissions », puis « lycées », ou via « l'association », « les structures », « les commissions », « commission lycées »). Vous trouverez ensuite, parmi d'autres, des pages spécialement consacrées aux statistiques, au TPE, aux aménagements de programmes à la rentrée.

Les statistiques en seconde

La régionale de Grenoble vient de publier un petit opuscule de 24 pages au format A4 : « Sept activités sur les statistiques en classe de seconde ».

Il a été envoyé à tous les présidents de régionales.

Pour en prendre connaissance, il faut le télécharger sur le site <http://www.ac-grenoble.fr/maths> soit dans la rubrique « Nouveautés », soit dans la rubrique « Autour des programmes », sous-rubrique « classe de seconde ». Il ne sera pas fait d'envoi papier (sauf aux adhérents de la régionale de Grenoble).

On est autorisé à reproduire ce document, à la condition expresse de conserver les références des auteurs.

Un grand merci aux Grenoblois pour leur travail.

Lu au BO

Les B.O. parus fin août apportent des précisions sur l'application de la réforme à la rentrée 2000.

Au B.O.H.S. n° 7 du 31 août, on trouve les programmes de Maths de l'option facultative en série littéraire, de maths-informatique en série littéraire et les aménagements et nouveaux programmes de maths en série scientifique. Les textes sont consultables à : <http://www.education.gouv.fr/bo/2000/hs7/default.htm>

Au B.O.H.S. n° 8 du 31 août, on trouve les aménagements et/ou les nouveaux programmes de maths en première ES et premières séries technologiques.

Les textes sont consultables à l'adresse : <http://www.education.gouv.fr/bo/2000/hs8/default.htm>

Un encart du B.O. n° 30 du 31 août précise la mise en oeuvre de la réforme des lycées à la rentrée 2000. Il est téléchargeable à partir de la page : <http://www.education.gouv.fr/bo/2000/30/default.htm> et peut être téléchargé à l'adresse : <ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2000/30/encart30.pdf>.

Au BO n° 25 du 29 juin 2000, on trouve :

- page 1215, mesures « collège des années 2000 » à privilégier à la rentrée 2000 :
 - les dispositifs d'aide personnalisée aux élèves
 - les parcours diversifiés et les travaux croisés
- page 1218, évaluation CE2 et 6ème

Adresse : <http://www.education.gouv.fr/bo/2000/25/default.htm>.

L'agenda du prof de maths

Les conférences APMEP/IPR/IREM/IUFM

Comme les années précédentes, un cycle de conférences organisées conjointement par l'APMEP, l'Inspection Régionale, l'IREM et l'IUFM se déroulera cette année dans deux lieux : l'IUFM de Marseille (Canebière), et le lycée Paul Cézanne à Aix-en-Provence.

Les thèmes des conférences ont été centrés cette année sur les liens des mathématiques avec les autres disciplines, car peu de collègues ont une culture importante sur cette question, et notre formation à des mathématiques « pures » nous a bien peu préparés aux TPE et autres travaux croisés.

Ainsi, la plupart des thèmes abordés cette année s'appelleront « maths et ... (médecine, biologie, astronomie, économie ...) ».

La régionale APMEP d'Aix-Marseille souhaite que ces rencontres ne soient pas seulement une occasion de formation, mais aussi un moment de rencontre et de discussion sur les nombreuses nouveautés de cette année scolaire. C'est pourquoi nous avons décidé d'organiser avant ces conférences des réunions de discussion sur les sujets qui nous préoccupent tous cette année. Nous souhaitons qu'elles soient avant tout un lieu d'expression et d'échanges entre pairs, échange d'informations, de documents et de réflexions.

Retenez d'ores et déjà vos mercredi après-midi aux dates suivantes :

Mercredi 25 Octobre à l'IUFM de Marseille :

- ❑ De 15h30 à 16h45, les ateliers sur le thème : « les TPE en lycée et les travaux croisés en collège ».
Discussion animée par Marie Mégard et Suzanne Guilhem pour le lycée, Gérard Coppin et Brigitte Doddy pour le collège.
- ❑ À 17 h, la conférence : « Les Mathématiques mixtes » par Yves Chevallard.
Yves Chevallard nous expliquera ce que sont « les Mathématiques mixtes » comme on l'a dit à une époque, et comment se sont tissés les liens entre mathématiques et autres disciplines.

Mercredi 15 Novembre à l'IUFM de Marseille :

- ❑ De 15h30 à 16h45, échange d'activités pour la classe sur le thème : « les statistiques : des activités avec l'ordinateur (simulations, tableurs ...) ».
Bernard Egger, Daniel Muller, Mireille Cailleaux et Gérard Coppin qui connaissent bien cette question, apporteront en particulier leurs productions.
- ❑ À 17 h, la conférence : Mathématiques et biologie par Dominique Barbolosi.

Mercredi 13 Décembre à l'IUFM de Marseille :

- ❑ De 15h30 à 16h45 discussion et échanges d'informations sur le thème : « Évolution du bac » : pour l'heure, la question est assez obscure, nous y verrons sans doute plus clair en décembre ! Nous espérons la présence de l'inspection régionale pour avoir un point de vue de spécialistes sur la question.
- ❑ À 17 h, la conférence : Mathématiques et sciences économiques et sociales, par Christine Dollo.

Nos IPR se sont de façon générale montrés intéressés par ces réunions et nous ont priés d'y accepter leur présence. Nous les y accueillerons bien volontiers ... tout en gardant notre traditionnelle liberté de parole !!

Le libellé exact du titre des conférences sera confirmé par voie d'affichage dans tous les établissements (collèges et lycées) de l'académie.