

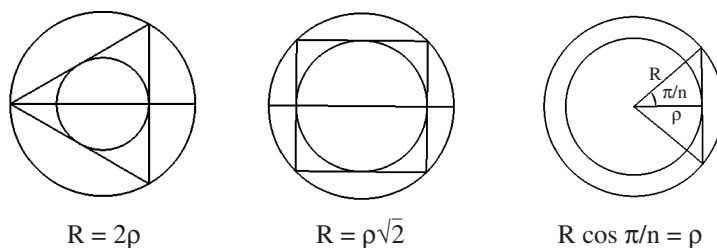
Triangles et quadrilatères inscrits dans un cercle, et circonscrits à un autre cercle

Françoise PÉCAUT

Deux cercles étant donnés dans un plan, il est impossible, en général, d'inscrire dans l'un d'eux un polygone qui soit en même temps circonscrit à l'autre, et quand, pour une situation particulière de ces cercles, un tel polygone est possible, il y en a une infinité d'autres de même ordre qui jouissent de cette singulière propriété. *Jean-Victor Poncelet*

On trouve ce texte dans le tome 1, p.364, de son ouvrage « Applications d'analyse et de géométrie », conçu pendant les quinze mois de sa captivité à Saratoff, sur la Volga (Avril 1813 — Juin 1814).

Ce théorème, d'apparence élémentaire, est difficile: d'après Marcel Berger (Géométrie, tome 4, § 16.6) toutes les démonstrations connues « sont assez cachées et longues », et c'est bien vrai. La « situation particulière » évoquée ci-dessus se traduit par une relation entre les rayons R et ρ des deux cercles et la distance d de leurs centres. On pense aussitôt au cas des cercles concentriques :



Dans la suite, on utilise l'expression « polygone *interscrit* dans $\mathcal{C}(O, R)$ et $\Gamma(\Omega, \rho)$ » pour désigner un polygone inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ de centre O , de rayon R , et circonscrit au cercle Γ de centre Ω , de rayon ρ ; $d = O\Omega$ désigne la distance des centres.

Le présent article, qui se veut une initiation au théorème de Poncelet, va comprendre quatre épisodes qui s'étaleront sur quatre numéros du bulletin.

Il débute par un énoncé des résultats dans le cas facile des triangles interscrits, énoncé qui indique le plan suivi ensuite pour les quadrilatères interscrits. Le lecteur est invité à démontrer lui-même ces résultats qui font l'objet de la section 1 ; il trouvera en annexe 11 des indications sur les solutions.

1 Triangles interscrits

a) Un cercle $\mathcal{C}(O, R)$ étant donné, on choisit trois points A, B, C de ce cercle. On construit le cercle $\Gamma(\Omega, \rho)$ inscrit dans le triangle ABC .

On trouve : $R^2 - d^2 = 2\rho R$.

b) On se donne $\mathcal{C}(O, R)$ et un point Ω intérieur à $\mathcal{C}$: $d < R$. On prend ρ tel que $R^2 - d^2 = 2\rho R$. On trace $\Gamma(\Omega, \rho)$, qui est intérieur à $\mathcal{C}$. On montre alors que, quelque soit le point A choisi sur $\mathcal{C}$, A est un sommet d'un triangle interscrit dans la paire $\mathcal{C}(O, R), \Gamma(\Omega, \rho)$.

c) On reprend a) : un cercle $\mathcal{C}(O, R)$ étant donné, on choisit trois points A, B, C de ce cercle. On construit le cercle $\Gamma(\Omega, \rho)$, exinscrit au triangle ABC , situé dans l'angle A du triangle ABC . On trouve : $d^2 - R^2 = 2\rho R$.

d) On se donne $\mathcal{C}(O, R)$ et un point Ω extérieur à $\mathcal{C}$: $d > R$. On prend ρ tel que $d^2 - R^2 = 2\rho R < \rho(R + d)$ donc $d - R < \rho$, $\Gamma(\Omega, \rho)$ coupe $\mathcal{C}(O, R)$. On montre alors que, quelque soit le point A choisi sur l'arc de $\mathcal{C}$ extérieur à Γ , A est un sommet d'un triangle interscrit dans la paire $\mathcal{C}(O, R), \Gamma(\Omega, \rho)$.

Avec a), b), c), d) on a démontré : une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un triangle interscrit dans la paire $\mathcal{C}(O, R), \Gamma(\Omega, \rho)$ est : $|R^2 - d^2| = 2\rho R$. Alors il y a une infinité de triangles interscrits dans les deux cercles.

e) On se donne $\mathcal{C}(O, R)$ et le point Ω : construction de $\Gamma(\Omega, \rho)$ (fig. 1)

Soit AD le diamètre de $\mathcal{C}$ contenant Ω . Le cercle de centre D , de rayon $D\Omega$ coupe $\mathcal{C}$ en B et C , et recoupe l'axe de symétrie de la figure en Ω' : On trouve du même coup **deux** cercles $\Gamma(\Omega, \rho)$ et $\Gamma'(\Omega', \rho')$, ρ et ρ' étant les distances de Ω et Ω' à la corde BC , l'un intérieur à $\mathcal{C}$, l'autre coupant $\mathcal{C}$, tels que les paires $(\mathcal{C}, \Gamma)$ et $(\mathcal{C}, \Gamma')$ admettent toutes deux des triangles inscrits.

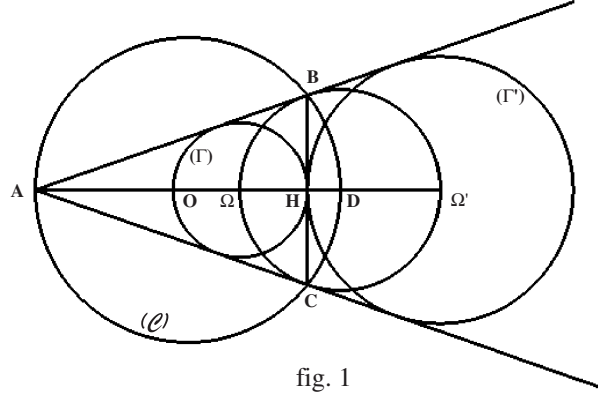


fig. 1

À une solution au problème d'interscription dans $\mathcal{C}(O, R)$, $\Gamma(\Omega, \rho)$, $O\Omega = d$, correspond une autre solution $\mathcal{C}(O, R)$, $\Gamma'(\Omega', \rho')$, $O'\Omega' = d'$ avec $d + d' = 2R$, $\rho(R + d') = \rho'(R + d)$.

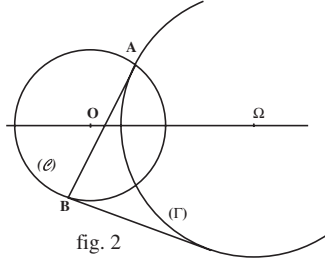


fig. 2

f) Triangles inscrits pliés :

Soit $(\mathcal{C}, \Gamma)$ une paire de cercles satisfaisant la condition d'interscriptibilité pour les triangles, $\mathcal{C} \cap \Gamma \neq \emptyset$. Soit A un des points d'intersection des deux cercles. La tangente en A à Γ recoupe $\mathcal{C}$ en B . Le « triangle » ABB est inscrit plié. B est le point de contact avec $\mathcal{C}$ d'une tangente commune aux deux cercles.

2 Condition que doivent satisfaire R, ρ, d pour qu'il existe un quadrilatère inscrit dans deux cercles $\mathcal{C}(O, R)$ et $\Gamma(\Omega, \rho)$

Une première difficulté se présente : comment dessiner un quadrilatère inscrit dans un cercle et circonscrit à un autre ? Supposons-la résolue, au moins approximativement. $ABCD$ est un quadrilatère inscrit dans $\mathcal{C}(O, R)$, circonscrit à $\Gamma(\Omega, \rho)$. On a choisi de faire la figure dans le cas $\Gamma \subset \mathcal{C}$.

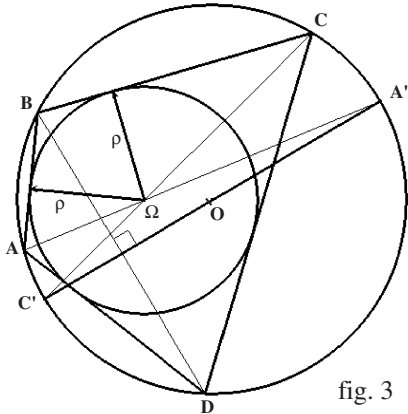


fig. 3

Soit A' (resp. C') le point où $A\Omega$ (resp. $C\Omega$) recoupe $\mathcal{C}$. A' et C' sont les milieux des deux arcs BD , ils appartiennent donc à la médiatrice du segment $[BD]$. On en déduit que la droite $C'A'$ passe par le centre O de $\mathcal{C}$. Alors le théorème de la médiane, appliqué au triangle $A'\Omega C'$ donne :

$$(1) \quad \Omega A'^2 + \Omega C'^2 = 2(d^2 + R^2)$$

La puissance de Ω par rapport à $\mathcal{C}(O, R)$ est : $\Omega A \cdot \Omega A' = \Omega C \cdot \Omega C' = R^2 - d^2$.

Le premier membre de (1) s'écrit donc : $(R^2 - d^2)^2 \left[\frac{1}{\Omega A^2} + \frac{1}{\Omega C^2} \right]$.

Par ailleurs, Ω est à la même distance ρ des droites AB et BC :

$$\rho = \Omega A \sin \frac{A}{2} = \Omega C \sin \frac{C}{2}$$

Mais les angles A et C du quadrilatère (convexe) inscriptible $ABCD$ sont supplémentaires :

$$\rho = \Omega A \sin \frac{A}{2} = \Omega C \cos \frac{A}{2}, \text{ d'où } \frac{1}{\Omega A^2} + \frac{1}{\Omega C^2} = \frac{1}{\rho^2}.$$

Une condition nécessaire pour qu'il existe un quadrilatère interscrit dans la paire $\mathcal{C}(O, R)$, $\Gamma(\Omega, \rho)$ avec $O\Omega = d$ est donc :

$$(2) \quad 2\rho^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2$$

3 Soit une paire de cercles $\mathcal{C}(O, R)$ et $\Gamma(\Omega, \rho)$, $d = O\Omega$, telle que la relation (2) soit remplie. Permet-elle l'interscriptibilité?

Cette condition s'écrit aussi : $\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{\rho^2}$ d'où $\frac{1}{(R-d)^2} < \frac{1}{\rho^2}$.

Si $d < R$ alors $R - d > \rho$, qui implique $\Gamma \subset \mathcal{C}$.

Si $d > R$ alors $d - R > \rho$, qui implique Γ extérieur à $\mathcal{C}$.

Plaçons-nous dans le premier cas de figure, $\Gamma \subset \mathcal{C}$. Prenons A arbitraire sur $\mathcal{C}(O, R)$. Une tangente issue de A à Γ recoupe $\mathcal{C}$ en B ; l'autre tangente issue de B à Γ recoupe $\mathcal{C}$ en C ; l'autre tangente issue de C à Γ recoupe $\mathcal{C}$ en D . Comme précédemment, on introduit les points A' et C' , respectivement intersection de $A\Omega$ et de $C\Omega$ avec $\mathcal{C}$. On pose $\widehat{BA\Omega} = \varphi$, $\widehat{\Omega AD} = \psi$. $ABCD$ désignent toujours les angles du quadrilatère convexe $ABCD$. Il faut démontrer que la droite AD est tangente au cercle $\Gamma(\Omega, \rho)$. On peut le faire en prouvant que $\varphi = \frac{A}{2}$, à l'issue d'une page de calculs utilisant les mêmes ingrédients que la démonstration de la propriété directe, formules de trigonométrie en plus. C'est ennuyeux et n'apporte pas grand chose ; je tiens cette solution à la disposition des lecteurs, tout en leur demandant s'ils ne trouvent pas mieux.

J'ai fini par trouver mieux en passant en dimension 3 et en utilisant une projection conique, comme je l'exposerai dans la dernière partie de ce travail. C'est beaucoup plus élégant, mais un peu artificiel, et sort malheureusement du cadre des programmes du secondaire.

Provisoirement, supposons démontrée cette réciproque.

Fin du premier épisode. Suite au prochain numéro ...

Annexe : solutions des énoncés de la section 1

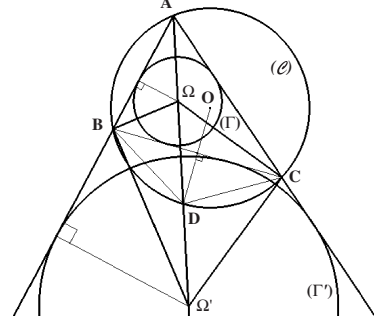
(proposées par Y. Poitevineau)

Rappelons que si $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O , de rayon R et M un point du plan, la puissance de M par rapport à $\mathcal{C}$ est le nombre : $\mathcal{P}(\mathcal{C}, M) = d^2 - R^2 = \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ}$ où $d = OM$ et (MPQ) n'importe quelle sécante à $\mathcal{C}$ passant par M .

Les énoncés a) et c) :

Soient donc le cercle $\mathcal{C}(O, R)$, trois points A, B, C de $\mathcal{C}$, $\Gamma(\Omega, \rho)$ et $\Gamma'(\Omega', \rho')$ les cercles inscrit et exinscrit dans l'angle A du triangle ABC (figure ci-contre).

Les bissectrices $(B\Omega)$ et $(B\Omega')$ sont perpendiculaires, de même que $(C\Omega)$ et $(C\Omega')$; donc les points Ω, B, Ω', C sont sur un cercle de diamètre $[\Omega\Omega']$; le centre D de ce cercle est le milieu de l'arc de $\mathcal{C}$ d'extrémités B et C ne contenant pas A (intersection de la bissectrice $(A\Omega\Omega')$ de l'angle en A , et de la médiatrice de $[BC]$).



On pose $O\Omega = d$ et on a alors d'une part $\mathcal{P}(\mathcal{C}, \Omega) = d^2 - R^2$, d'autre part :

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}, \Omega) = \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{\Omega D} = -\Omega A \times \Omega D = -\Omega A \times BD = -\frac{\rho}{\sin \frac{A}{2}} \times 2R \sin \frac{A}{2} = -2\rho R$$

en utilisant dans le triangle ABD la relation trigonométrique : $\frac{BD}{\sin \frac{A}{2}} = 2R$.

De même on pose $O\Omega' = d'$ et on a d'une part $\mathcal{P}(\mathcal{C}, \Omega') = d'^2 - R^2$, d'autre part :

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}, \Omega') = \overrightarrow{\Omega' A} \cdot \overrightarrow{\Omega' D} = \Omega' A \times \Omega' D = \Omega' A \times BD = \frac{\rho'}{\sin \frac{A}{2}} \times 2R \sin \frac{A}{2} = 2\rho' R$$

L'énoncé b) :

Soient $\mathcal{C}(O, R)$ et Ω et supposons $R^2 - d^2 = 2\rho R$ ($d = O\Omega$). On en déduit $R > d$ donc Ω intérieur à $\mathcal{C}$, et $d^2 = R^2 - 2\rho R < (R - \rho)^2$ donc $d < |R - \rho|$: Γ intérieur à $\mathcal{C}$.

On prend un point $A \in \mathcal{C}$; la droite $(A\Omega)$ recoupe $\mathcal{C}$ en D et le cercle de centre D passant par Ω , qui est sécant à $\mathcal{C}$, coupe $\mathcal{C}$ en B et C (utiliser la figure précédente, ou mieux, en faire une soi-même). Montrons que Γ est inscrit dans le triangle ABC .

(AD) est bissectrice de l'angle A (D milieu de l'arc $\widehat{BC}$) et dans le triangle ABD on a :

$$\frac{BD}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{OD}{\sin \frac{A}{2}} = 2R$$

On a alors d'une part : $\mathcal{P}(\mathcal{C}, \Omega) = d^2 - R^2 = -2\rho R$, et d'autre part : $\mathcal{P}(\mathcal{C}, \Omega) = -\Omega A \times \Omega D = -\Omega A \times 2R \sin \frac{A}{2}$ d'où $\rho = \Omega A \sin \frac{A}{2} = d(\Omega, AB)$ et la droite (AB) est tangente à Γ ; de même la droite (AC) .

Pour prouver que (BC) est tangente à Γ , il suffit de montrer que $(B\Omega)$ est bissectrice de l'angle en B du triangle ABC ; or si Ω' est le point diamétralement opposé à Ω sur le cercle $(B\Omega C)$, on a (propriétés des angles inscrits) :

$$\widehat{\Omega BC} = \widehat{C\Omega' \Omega} = \frac{1}{2} \widehat{CD\Omega} = \frac{1}{2} \widehat{CDA} = \frac{1}{2} \widehat{CBA}$$

L'énoncé d) :

On suppose maintenant $d^2 - R^2 = 2\rho R$, donc Ω extérieur à $\mathcal{C}$ ($d > R$), et $d^2 = R^2 + 2\rho R < (R + \rho)^2$ donc $d < R + \rho$ et $\mathcal{C}$ et Γ sécants ou intérieurs.

Le cercle $\mathcal{C}$ est intérieur au cercle Γ si et seulement si $d^2 < (R - \rho)^2$, qui équivaut, compte tenu de $d^2 = R^2 + 2\rho R$, à $\rho > 4R$, ou encore à $d > 3R$. Il est impossible dans ce cas qu'il existe un triangle inscrit dans $\mathcal{C}$ et circonscrit à Γ .

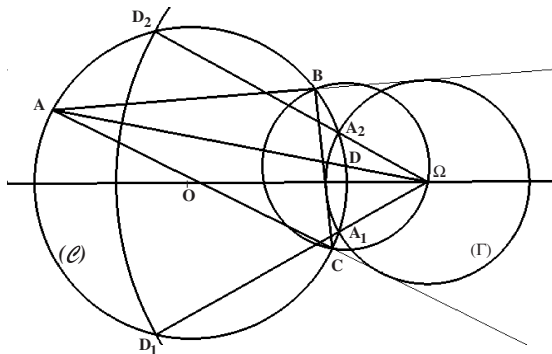
On suppose donc $d < 3R$. $\mathcal{C}$ et Γ sont sécants. On prend un point A sur l'arc de $\mathcal{C}$ extérieur à Γ . Alors $\Omega A > \rho$. La droite $(A\Omega)$ recoupe $\mathcal{C}$ en D . Le cercle de centre D passant par Ω et le cercle $\mathcal{C}$ sont sécants ; en effet $|\Omega D - R| < R$ équivaut à $\Omega D < 2R$. Cette condition, compte tenu de $d^2 - R^2 = 2\rho R = \Omega A \times \Omega D$, est : $\Omega A > \rho$.

Soient B et C les points d'intersection du cercle de centre D passant par Ω et de $\mathcal{C}$. On montre comme en b) que Γ est exinscrit dans l'angle A du triangle ABC .

L'énoncé e) :

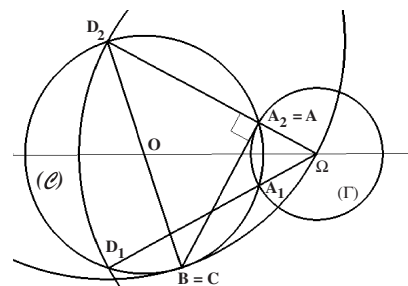
Les constructions indiquées découlent des b) et d).

Remarquons que dans le cas où Ω est extérieur à $\mathcal{C}$, une autre construction découle du d) : on trace le cercle de centre Ω , de rayon $2R$ qui coupe $\mathcal{C}$ (puisque $R < d < 3R$) en D_1 et D_2 d'où les points A_1, A_2 et le cercle Γ passant par A_1 et A_2 (voir figure ci-dessous où on a placé en plus un point A et le triangle interscrit correspondant).



L'énoncé f) :

Remarquons simplement qu'avec la construction précédente, les deux triangles interscrits pliés apparaissent comme des cas limites lorsque le sommet A du triangle interscrit est choisi à l'intersection des cercles $\mathcal{C}$ et Γ (figure ci-contre).



Remarque sur les démonstrations précédentes :

Certains d'entre nous se souviendront peut-être d'un théorème étudié dans la classe de mathématiques élémentaires : le théorème sur la différence des puissances d'un point par rapport à deux cercles :

Si $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ sont deux cercles non concentriques de centres O, O' et de rayons R, R' , on a pour tout point M du plan : $\mathcal{P}(\mathcal{C}, M) - \mathcal{P}(\mathcal{C}', M) = 2OO' \cdot \vec{HM}$ où H est la projection orthogonale de M sur l'axe radical des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ (si les cercles sont sécants, cet axe radical est leur sécante commune).

Ce théorème permet de prouver la relation d'Euler de façon immédiate : si on exprime la différence des puissances de Ω par rapport au cercle $\mathcal{C}(O, R)$ et au cercle γ de centre D passant par Ω , on a :

$$\mathcal{P}(\mathcal{C}, \Omega) - \mathcal{P}(\gamma, \Omega) = \mathcal{P}(\mathcal{C}, \Omega) - 0 = d^2 - R^2 = 2\vec{OD} \cdot \vec{\omega\Omega} = -2\rho R$$

où ω est la projection de Ω sur (BC) .

Les mêmes calculs permettront de prouver également les réciproques (on démontre que : $d(\Omega, BC) = \Omega\omega = \rho$).