

Les logarithmes : Néper, Briggs ...

André BONNET

1 Les logarithmes au début du XVII-ième siècle :

A la fin du XVIe et au début du XVIIe siècle, les mathématiciens sont confrontés aux problèmes de calculs posés par les astronomes et les navigateurs qui utilisent les astres pour se repérer. Ils cherchent donc à simplifier les calculs « astronomiques » qui, pour l'essentiel, sont des calculs trigonométriques.

En 1614, John Napier (dit Néper par les francophones) publie un ouvrage, en latin, intitulé « *Mirifici logarithmorum canonis Descriptio* », dans lequel on trouve une table de logarithmes à 8 décimales des sinus.

Signalons que le mot *logarithme* vient de la racine grecque « *logos* », qui signifie rapport et de « *arithmos* ». Le logarithme est ainsi « le nombre du rapport ».

La propriété des suites géométriques : $a^{(m+n)} = a^m a^n$, pour m et n entiers naturels, était connue d'Archimède (Syracuse -287; -212) qui la signale dans son « traité de l'arénaire ».

Cette propriété a été étendue aux entiers négatifs, en 1544 par Stifel (Nuremberg : 1486;1567), qui la donne à titre d'exemple de l'utilité des nombres négatifs.

Le principe des tables de logarithmes est d'associer deux suites (deux progressions) l'une arithmétique, l'autre géométrique.

On peut partir par exemple de l'association suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 & a^5 & a^6 \end{array}$$

Puis, pour un entier q et un nombre b tel que $b^q = a$, on peut considérer les nouvelles progressions associées suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \frac{1}{q} & \frac{2}{q} & \frac{3}{q} & \dots & 1 & \dots & 2 & \dots \\ 1 & b & b^2 & b^3 & \dots & a & \dots & a^2 & \dots \end{array}$$

Si q est une puissance de 2, on peut obtenir b à partir de a , par extractions successives de racines carrées, algorithmes parfaitement maîtrisés à l'époque. Par exemple avec $q = 2^{10} = 1024$, on obtient b par dix extractions de racines carrées et l'écart entre deux termes de la suite arithmétique est inférieur à 10^{-3} . On trouve, dans les travaux de Briggs notamment, l'utilisation de valeurs de q beaucoup plus grandes, par exemple $q = 2^{54}$ pour obtenir les logarithmes décimaux ($a = 10$) des nombres premiers inférieurs à cent avec une grande précision.

2 Logarithmes népériens, logarithmes décimaux :

La notion de logarithme décimal correspond évidemment, dans l'association précédente, au choix de $a=10$. Par contre les logarithmes calculés par Néper, dans son document de 1614, sont d'une autre nature.

Ne disposant pas de la notion de fonction, ni bien sur des concepts de continuité et de dérivabilité, Néper imagine deux mouvements « continus ». L'un uniforme, dont les positions à intervalles de temps égaux sont repérées par les termes de la progression arithmétique, l'autre astreint à occuper aux mêmes instants les positions repérées par les termes de la progression géométrique associée. Il impose de plus que la vitesse, au départ, soit la même pour les deux mouvements.

En langage moderne, on peut dire que la loi horaire du premier mouvement est : $f_1(t) = t$ et que si on note $f_2(t)$ celle du second, on doit avoir, au moins pour tout t entier, $f_2(t) = a^t$.

En fait, si on exige que la correspondance ait lieu, aussi, pour toute progression de raison b telle que $b^q = a$, et ceci quel que soit l'entier q , la loi horaire $f_2(t) = a^t$ est valable, aussi, pour tout t rationnel positif.

La continuité « intuitive » des mouvements correspond, en fait, à la continuité des fonctions et notamment à celle de f_2 , ce qui nous permet de conclure, avec nos connaissances actuelles, que la seule possibilité pour f_2 est : $f_2(t) = e^{t \ln a}$.

La vitesse à l'instant t du deuxième mouvement étant égale à $f_2'(t) = \ln a e^{t \ln a}$, la condition d'égalité des vitesses à l'origine est $f_2'(0) = 1$. Cette condition correspond à $\ln a = 1$, ou encore à la valeur de la base $a = e$.

3 La méthode de Briggs :

En 1624 Briggs publie à Londres « *l'Arithmetica logarithmica* », dans lequel il affirme que $\log_{10} 2 = 0,30102999566398$.

Le principe de la méthode de Briggs est de compter le nombre de chiffres permettant d'écrire en base 10 les puissances de 2.

Si on note $k(n)$ le nombre de chiffres nécessaires pour écrire 2^n en base dix, comme 2^n n'est jamais une puissance de dix on a : $10^{k(n)-1} < 2^n < 10^{k(n)}$.

En notant $\log$ le logarithme en base dix, on en déduit : $k(n) - 1 < n \log 2 < k(n)$ puis : $\frac{k(n) - 1}{n} < \log 2 < \frac{k(n)}{n}$.

La connaissance de $k(n)$ fournit un encadrement de $\log 2$, cet encadrement n'est intéressant que pour n assez grand.

Pour faciliter les calculs et notamment la division par n , Briggs utilise pour n une puissance de dix.

Pour avoir une grande précision il prend $n = 10^{14}$, mais il ne calcule que les quinze premiers chiffres des différents $k(p)$ dont il a besoin.

4 Les calculs faits par Briggs :

L'étude du document de 1624 ou de sa traduction de 1628, montre que Briggs calcule la valeur de 2^{10^k} à partir de la valeur de $2^{10^{k-1}}$ par trois élévations au carré et un produit.

Par exemple les premières valeurs calculées sont :

$$2^2 = 4, 2^4 = (2^2)^2, 2^8 = (2^4)^2, 2^{10} = 2^8 2^2,$$

puis il calcule 2^{100} de la manière suivante :

$$2^{20} = (2^{10})^2, 2^{40} = (2^{20})^2, 2^{80} = (2^{40})^2, 2^{100} = 2^{80} 2^{20},$$

et ainsi de suite :

$$2^{200} = (2^{100})^2, 2^{400} = (2^{200})^2, 2^{800} = (2^{400})^2, 2^{1000} = 2^{800} 2^{200} \dots$$

Ce groupement par quatre du calcul des puissances de deux est appelé quatraine.

Le texte de Briggs pas à pas :

On peut simuler, avec Maple, le travail de Briggs en recherchant, non pas la valeur exacte des puissances de deux (qui dépassent 10^{15}), mais en écrivant ces puissances sous la forme $a(n) 10^{k(n)-15}$ où $a(n)$ est un entier compris entre 10^{14} et 10^{15} .

Le carré d'un tel nombre est : $a(n)^2 10^{2k(n)-30}$ et le produit de deux tels nombres est égal à : $a(n) a(p) 10^{k(n)+k(p)-30}$.

Il est facile alors de ramener $a(n)^2$ ou $a(n) a(p)$ à la forme souhaitée en ne gardant que leur quinze premiers chiffres.

5 Simulation avec Maple du travail de Briggs:

Après deux procédures d’affichage, on donne la procédure `briggs` qui simule complètement le travail de Briggs.

```

aff:=proc(x,y,z)
local X,Y,Z;
X:=convert(x,string); Y:=convert(y,string);
Z:=convert(z,string);
printf('%-16.15s! %-16.15s! %-16.15s\\n',X,Y,Z);
end :

affquat:=proc(x,y,z,j)
local X,Y,Z,J;
X:=convert(x,string); Y:=convert(y,string);
Z:=convert(z,string); J:=convert(j,string);
printf('%-16.15s! %-16.15s! %-16.15s
%-5.8s%-2.2s\\n',X,Y,Z,'quat.',J);
end :

briggs:=proc(q)
local u,j,n,v,a,k,b,l;
a:=2; k:=0;
for j from 0 to q do
n := 10^j;
u:=a*a;k:=2*k;
if u<10^15 then a:=u; k:=0;
else while u>10^15 do u:=u/10; k:=k+1; od; a:= round(u);
fi;
aff(a,2*n,k+length(a)); b:=a; l:=k;
u:=a*a;k:=2*k;
if u<10^15 then a:=u; k:=0;
else while u>10^15 do u:=u/10; k:=k+1; od; a:= round(u);
fi;
aff(a,4*n,k+length(a));
u:=a*a;k:=2*k;
if u<10^15 then a:=u; k:=0;
else while u>10^15 do u:=u/10; k:=k+1; od; a:= round(u);
fi;
affquat(a,8*n,k+length(a),j+1);
u:=a*b; k:=k+1;
if u<10^15 then a:=u; k:=0;
else while u>10^15 do u:=u/10; k:=k+1; od; a:= round(u);
fi;
aff(a,10*n,k+length(a));
printf('%-75.60s\\n','-----
-----');
od;
end:

```

Dans l’application de la procédure `briggs`, on trouvera dans l’ordre :

colonne 1 : la puissance de 2 ou, si celle-ci dépasse 10^{15} , les quinze premiers chiffres de cette puissance

colonne 2 : l’exposant de la puissance de 2

colonne 3 : le nombre de chiffres nécessaires pour écrire cette puissance en base 10

colonne 4 : le numéro de la quatraine

Exécutons notre procédure `briggs`:

`briggs(14);`

4	! 2	! 1	
16	! 4	! 2	
256	! 8	! 3	quat.1
1024	! 10	! 4	

1048576	! 20	! 7	

1099511627776	! 40	! 13	
120892581961463	! 80	! 25	quat . 2
126765060022823	! 100	! 31	

160693804425899	! 200	! 61	
258224987808691	! 400	! 121	
666801443287986	! 800	! 241	quat . 3
107150860718627	! 1000	! 302	

114813069527426	! 2000	! 603	
131820409343096	! 4000	! 1205	
173766203193814	! 8000	! 2409	quat . 4
199506311688082	! 10000	! 3011	

398027684033821	! 20000	! 6021	
158426037257327	! 40000	! 12042	
250988092810600	! 80000	! 24083	quat . 5
999002093014688	! 100000	! 30103	

998005181847727	! 200000	! 60206	
996014342994915	! 400000	! 120412	
992044571451592	! 800000	! 240824	quat . 6
990065622932596	! 1000000	! 301030	

980229937712909	! 2000000	! 602060	
960850730788653	! 4000000	! 1204120	
923234126857089	! 8000000	! 2408240	quat . 7
904981730663556	! 10000000	! 3010300	

818991932834805	! 20000000	! 6020600	
670747786048490	! 40000000	! 12041200	
449902592488951	! 80000000	! 24082400	quat . 8
368466593809916	! 100000000	! 30103000	

135767630753882	! 200000000	! 60206000	
184328495605224	! 400000000	! 120411999	
339769942920851	! 800000000	! 240823997	quat . 9
461297601517457	! 1000000000	! 301029996	

212795477165759	! 2000000000	! 602059992	
452819151022031	! 4000000000	! 1204119983	
205045183532313	! 8000000000	! 2408239966	quat . 10
436326876702992	! 10000000000	! 3010299957	

190381143333388	! 20000000000	! 6020599914	
362449797369280	! 40000000000	! 12041199827	
131369855613032	! 80000000000	! 24082399654	quat . 11
250103433111511	! 100000000000	! 30102999567	

625517272541641	! 200000000000	! 60205999133	
391271858247934	! 400000000000	! 120411998266	
153093667056791	! 800000000000	! 240823996532	quat . 12
957627330607620	! 1000000000000	! 301029995664	

917050104326676	! 2000000000000	! 602059991328	
840980893845567	! 4000000000000	! 1204119982656	
707248863813289	! 8000000000000	! 2408239965312	quat . 13
648582644344900	! 10000000000000	! 3010299956640	

420659446545423	! 20000000000000	! 6020599913280	
176954369967902	! 40000000000000	! 12041199826560	
313128490507371	! 80000000000000	! 24082399653119	quat . 14
131720457514434	! 100000000000000	! 30102999566399	

173502789278118	! 200000000000000	! 60205999132797	
301032178872870	! 400000000000000	! 120411998265593	
906203727169476	! 800000000000000	! 240823996531185	quat . 15
157228874318131	! 1000000000000000	! 301029995663982	

Le nombre 30102999566398, qui est le dernier nombre écrit dans la troisième colonne est le nombre de chiffres nécessaires pour écrire le nombre $2^{10^{14}}$, en base 10.

On retrouve ainsi le résultat annoncé par Briggs à savoir : $\log_{10} 2 = 0$, 30102999566398.