

La quadrature de l'hyperbole

André BONNET

A partir du travail de Grégoire de Saint Vincent
publié dans « l'Opus Geometricum » (1647)

1 L'hyperbole au XVII^e siècle :

Depuis Apollonius (fin III^e siècle av. J.-C. – début II^e siècle av. J.-C.) et jusqu'au début du XVII^e siècle, l'hyperbole était considérée par les anciens comme une conique, c'est-à-dire une section d'un cône par un plan

En 1637, *Descartes* publie son livre « *La Géométrie* » dans lequel on peut voir l'émergence des représentations « cartésiennes ».

Dix ans plus tôt, *Grégoire de Saint Vincent*, jésuite belge (1584-1667), avait déjà défini les « abscisses » d'une hyperbole équilatère comme les morceaux d'une de ses asymptotes, limités par des parallèles à l'autre asymptote. Le mot « abscisses », vient du latin « abscindere » (qui signifie « couper ») et semble devoir lui être attribué.

Il avait remarqué que, pour tous les points de l'hyperbole, le produit de l'abscisse par « l'ordonné » (il parle de parallèle) est constant et que cette propriété est caractéristique de l'hyperbole.

On peut considérer que *Grégoire de Saint Vincent* est passé, ainsi, de la définition géométrique de l'hyperbole à notre vision moderne, comme graphe de la fonction $h(x)$ satisfaisant la relation fonctionnelle : $x h(x) = y h(y)$ (= constante, par exemple le nombre 1).

2 Les aires des rectangles « inscrits » dans l'hyperbole :

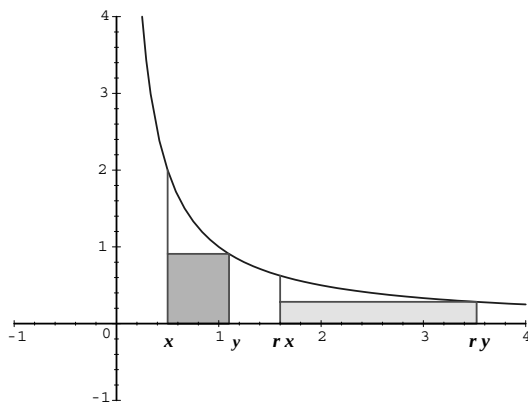


figure 1

Un calcul, très simple, montre que deux rectangles construits sur les bases $[x, y]$ et $[rx, ry]$ (avec r réel strictement positif) ont la même aire (cf figure 1). En effet :

- l'aire du premier est : $(y - x) \frac{1}{y}$
- l'aire du second est : $(ry - rx) \frac{1}{ry}$

Il est clair que, dans cette deuxième expression, le facteur r se simplifie. Si x_1, x_2, x_3 sont trois abscisses en progression géométrique, les aires des deux rectangles construits sur $[x_1, x_2]$, et sur $[x_2, x_3]$ sont les mêmes.

3 Les aires des portions de plan sous l'hyperbole :

La propriété des rectangles « inscrits dans l'hyperbole » s'étend aux aires des portions de plan situées sous l'hyperbole (cf figure 2) :

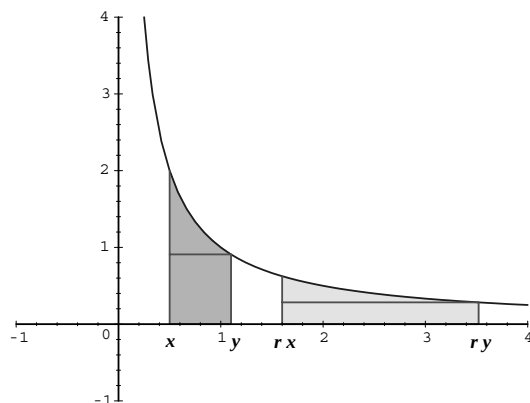


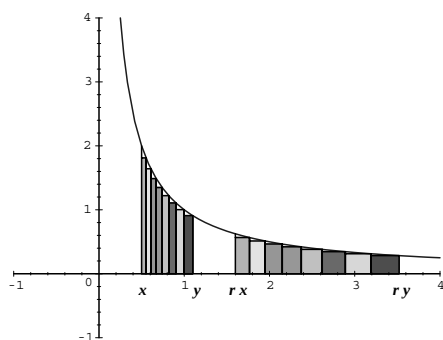
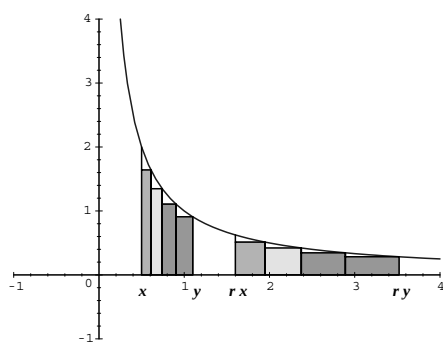
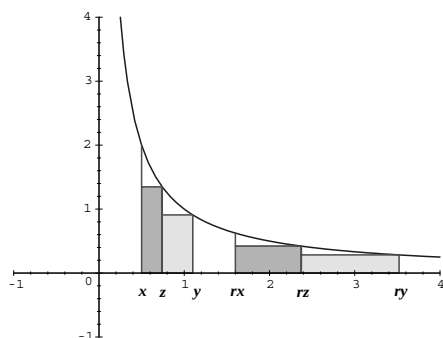
figure 2

On démontre que les deux portions de plan ayant pour bases $[x, y]$ et $[rx, ry]$ et situées sous l'hyperbole ont la même aire.

Le procédé utilisé par *Grégoire de Saint Vincent* est d'insérer dans l'intervalle $[x, y]$ la moyenne géométrique $z = \sqrt{xy}$ de x et de y .

La moyenne géométrique de rx et de ry étant rz , les quatre rectangles de base $[x, z]$, $[z, y]$, $[rx, rz]$, $[rz, ry]$ ont tous la même aire.

Et ainsi de suite ...



Conclusion :

Les figures ci-dessus montrent que, si on note A_x^y l'aire de la portion du plan ayant pour base $[x, y]$ et située sous l'hyperbole, on a la relation suivante : $A_{rx}^{ry} = A_x^y$ et ceci pour tout x , tout y et tout r réel strictement positif.

4 La quadrature de l'hyperbole :

Avec les notations précédentes, pour $x > 1$ on pose $\mathcal{L}(x) = A_1^x$. La valeur de $\mathcal{L}(x)$ est l'aire de la portion du plan ayant pour base $[1, x]$ et située sous l'hyperbole.

En langage moderne, on peut dire que *Grégoire de Saint Vincent* a publié, en 1647, la démonstration de la propriété fonctionnelle suivante : $\mathcal{L}(xy) = \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y)$.

En effet :

$$\mathcal{L}(xy) = A_1^{xy} = A_1^x + A_x^{xy} = A_1^x + A_1^y = \mathcal{L}(x) + \mathcal{L}(y)$$

Conclusion : *On reconnaît bien, dans cette fonction, une fonction logarithme.*