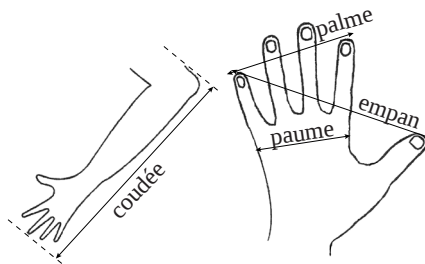


Les mesures de longueurs au Moyen Âge

André LAURENT

Notre Provence est riche en monuments de l'art médiéval, des prieurés aux cathédrales, en passant par les grandes abbayes. Comment sont nées ces merveilles d'équilibre, d'harmonie et de sérénité, si proches de la beauté pure chère à Platon ?

Pour tracer les plans de ces édifices, les architectes du Moyen Âge utilisaient uniquement la règle et le compas. On ne connaissait à l'époque ni les nombres décimaux, ni le système métrique. Les mesures utilisées, connues depuis l'antiquité, avaient des noms qui ne nous sont pas inconnus, mais dont nous avons quelque peu oublié la signification : *pouce*, *paume*, *palme*, *empan*, *pied*, *coudée*, *toise* ...



Les bâtisseurs utilisaient une « canne à mesurer » articulée ou non, sur le modèle ci-dessous :

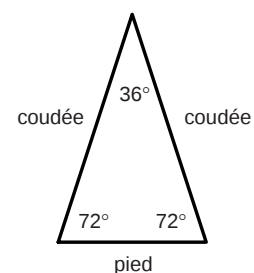
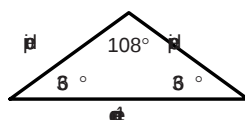
paume	palme	empan	pied	coudée
-------	-------	-------	------	--------

Ces mesures variaient légèrement d'une région à l'autre, mais restaient constantes dans leurs proportions. Il était convenu que, si l'on prenait comme unité le diamètre d'un grain d'orge, on obtenait respectivement 34 (paume), 55 (palme), 89 (empan), 144 (pied) et 233 (coudée).

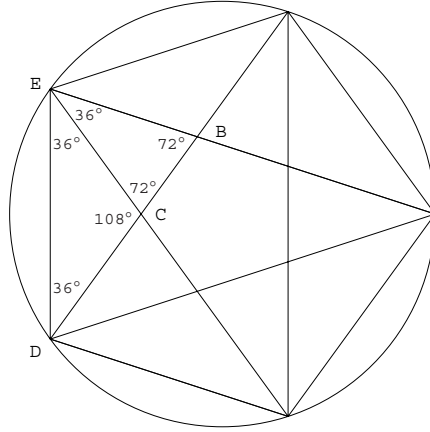
Ces nombres sont connus : ils appartiennent à la suite de Fibonacci, et les rapports $\frac{233}{144}$, $\frac{144}{89}$, $\frac{89}{55}$ et $\frac{55}{34}$ sont des valeurs approchées à 0,001 près du nombre d'or $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

On imagine le nombre de constructions géométriques issues de cette merveilleuse canne à mesurer. En voici une, qui ne manquera pas de conséquences dans les dessins des rosaces : les bâtisseurs avaient remarqué que, si l'on traçait un triangle isocèle ayant pour base l'une quelconque des mesures de la canne (sauf la plus petite), et pour côtés égaux la mesure qui la précède (exemple : coudée-pied), on obtenait invariablement un triangle ayant pour angle au sommet un angle de 108° , et deux angles égaux à 36° .

Si, au contraire, on prend pour base l'une des mesures de la canne (sauf la plus grande), et pour côtés égaux du triangle isocèle la mesure qui la suit (exemple : pied-coudée-coudée), on obtient le fameux « triangle d'or » ayant pour angle au sommet un angle de 36° , et deux angles à la base de 72° .



Ces constructions, courantes chez les maîtres d'œuvre du Moyen âge, peuvent être justifiées à partir de la figure suivante :



Les triangles ECB et DBE étant homothétiques, on a : $\frac{CB}{CE} = \frac{BE}{BD}$, soit, si l'on pose $CB = x$ et si $CD = CE = BE = 1$: $\frac{x}{1} = \frac{1}{x+1}$.
 x est donc la racine positive de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$, donc :

$$x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \varphi - 1$$

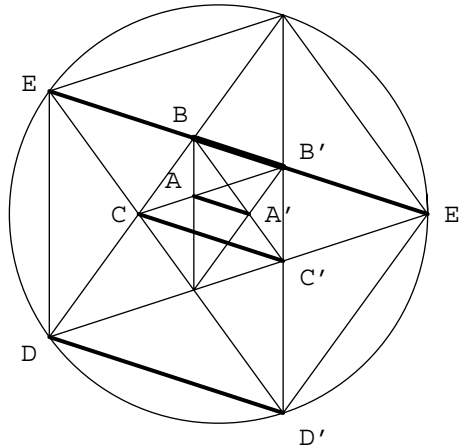
φ étant le nombre d'or, supposé connu ici.

Il en résulte que $\frac{BD}{BE} = 1 + (\varphi - 1) = \varphi$.

On a donc bien $\frac{BD}{BE} = \varphi$ (triangle d'or) et $\frac{EC}{ED} = \frac{1}{\varphi}$, ce qui explique les deux constructions exposées plus haut.

Au passage, on remarquera que $\cos(36^\circ) = \frac{\frac{1}{2}ED}{EC} = \frac{\varphi}{2}$.

Rendons un dernier hommage aux bâtisseurs du Moyen-ge, en reproduisant une figure qui leur était coutumière, et dans laquelle, si $AA' =$ paume (l'égalité ici n'ayant pas un sens rigoureux!), alors $BB' =$ palme, $CC' =$ empan, $DD' =$ pied et $EE' =$ coudée.



Bibliographie

Il est hors de question de citer ici les nombreux ouvrages sur le nombre d'or : cette bibliographie tiendrait plus de place que l'exposé ! Notons cependant la parution récente, à Marseille, de « La géométrie du nombre d'or », Robert VINCENT, Chalagam Édition, 15 Bd. André AUNE, 13006-MARSEILLE.

Par contre, au sujet de la géométrie médiévale, il existe un excellent document manuscrit (100 pages) publié par l'Association des amis de Boscodon, Abbaye de Boscodon, CROTS 05200 EMBRUN :

« Les cahiers de Boscodon » (cahier 4 : L'art des bâtisseurs romans)