

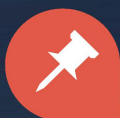
Le bulletin de l'APMEP - N° 557

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Juillet, août, septembre 2025

Estimation



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :

<https://afdm.apmep.fr>



Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufilesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est jointe la plaquette
Visages 2025-2026 de l'APMEP.

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Magali HILLAIRET, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » **numériques** : Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Audrey DUGUE, Nada DRAGOVIC, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Michel SUQUET, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Éric ASTOUL, Nicolas CLÉMENT, Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL.

Équipe T_EXnique : Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Pol LE GALL, Benoît MUTH, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Anne-Sophie SUCHARD.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

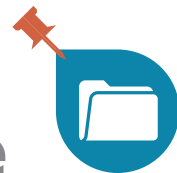
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : septembre 2025. ISSN : 2608-9297.

Impression : iLLiCO by L'ARTÉSIENNE

ZI de l'Alouette, Rue François Jacob, 62800 Liévin



Couper un gâteau entre $n + \{-1, 0, 1\}$ convives

Quand le nombre de convives est connu à plus ou moins un près, comment pré-découper intelligemment le gâteau de sorte qu'aucun ne soit lésé ? Petit tour d'horizon de ce problème de combinatoire extrémale.

Roger Mansuy

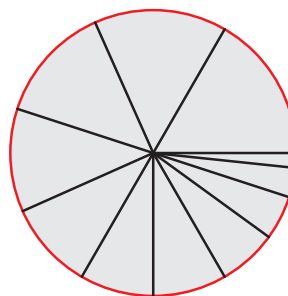
Introduction

Pour l'anniversaire de mon épouse, j'ai fait un gâteau et invité un couple de vieux amis, mais j'ai oublié de leur demander si leurs deux ados venaient : on sera donc 4, 5 ou 6 autour de la table. Je souhaite couper le gâteau avant l'arrivée des invités et que l'on puisse partager équitablement la totalité du gâteau peu importe le nombre que nous serons. Il faut donc que les parts pré-découpées puissent être réparties en quatre portions égales (d'un quart de gâteau), en cinq portions égales (d'un cinquième de gâteau) ou encore en six portions égales (d'un sixième de gâteau). Comment découper le gâteau en respectant cette contrainte ?

Une première idée consiste à couper le gâteau en soixante parts de même taille : si l'on est quatre autour de la table, chacun prend 15 parts et dispose alors donc de la proportion $\frac{15}{60} = \frac{1}{4}$ du gâteau ; si l'on est cinq, chacun prend 12 parts ; si l'on est six, chacun prend 10 parts. On dispose donc d'une « solution » au sens mathématique même si le nombre élevé de parts la rend peu envisageable en réalité.

Il existe des découpages plus « économes ». Par exemple, on peut vérifier qu'il est également possible de résoudre le problème avec seulement onze parts de tailles respectives $\frac{10}{60}$, $\frac{9}{60}$, $\frac{8}{60}$,

$\frac{7}{60}$, $\frac{6}{60}$, $\frac{5}{60}$, $\frac{5}{60}$, $\frac{4}{60}$, $\frac{3}{60}$, $\frac{2}{60}$ et $\frac{1}{60}$, c'est-à-dire comme sur le schéma suivant.



- Si l'on est 4, on se répartit les parts de la façon suivante : $\frac{10}{60} + \frac{5}{60}$, $\frac{9}{60} + \frac{6}{60}$, $\frac{8}{60} + \frac{7}{60}$, $\frac{5}{60} + \frac{4}{60} + \frac{3}{60} + \frac{2}{60} + \frac{1}{60}$.
- Si l'on est 5, on se répartit les parts de la façon suivante : $\frac{10}{60} + \frac{2}{60}$, $\frac{9}{60} + \frac{3}{60}$, $\frac{8}{60} + \frac{4}{60}$, $\frac{7}{60} + \frac{5}{60}$, $\frac{6}{60} + \frac{5}{60} + \frac{1}{60}$.
- Si l'on est 6, on se répartit les parts de la façon suivante : $\frac{10}{60}$, $\frac{9}{60} + \frac{1}{60}$, $\frac{8}{60} + \frac{2}{60}$, $\frac{7}{60} + \frac{3}{60}$, $\frac{6}{60} + \frac{4}{60}$, $\frac{5}{60} + \frac{5}{60}$.

On peut alors se demander s'il est possible de couper encore moins de parts en respectant la contrainte de partage équitable entre 4, 5 et 6 personnes. Plus généralement, on va chercher à résoudre le problème suivant :

Problème. Pour tout entier $n \geq 2$, notons u_n le nombre minimal de parts d'un découpage d'un



Couper un gâteau entre $n + \{-1, 0, 1\}$ convives

gâteau tel que l'on puisse partager équitablement le gâteau que l'on soit $n - 1$, n ou $n + 1$ convives. Que dire de u_n ?

Cette introduction a permis de montrer que $u_5 \leq 11$ mais pas de calculer u_5 .

Différentes estimations de u_n

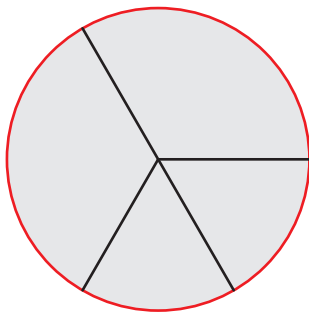
Étude pour de petites valeurs de n

Commençons par calculer u_n pour de petites valeurs de n .

Cas $n = 2$

Pour $n = 2$, c'est-à-dire la situation avec 1, 2 ou 3 convives, on vérifie immédiatement que $u_2 \geq 3$ car il faut au moins trois parts pour pouvoir servir le gâteau lorsqu'il y a trois convives. Ensuite, on remarque que s'il existait un découpage en trois parts qui satisfasse notre problème, alors ces parts seraient de taille $\frac{1}{3}$ et qu'il ne serait pas possible de les répartir équitablement entre deux convives. Ainsi, $u_2 \geq 4$.

Par ailleurs, on vérifie (relativement facilement) que le découpage en quatre parts de tailles respectives $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{6}$ satisfait notre contrainte.



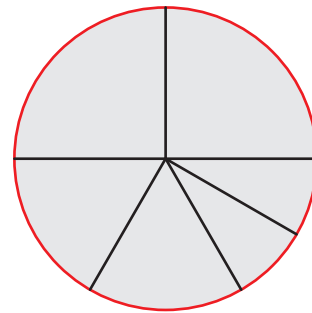
Ainsi, $u_2 \leq 4$ et, par double-inégalité, $u_2 = 4$.

Cas $n = 3$

Pour $n = 3$, c'est-à-dire la situation avec 2, 3 ou 4 convives, montrons que $u_3 = 6$ de nouveau en deux étapes : l'une de minoration, l'autre de majoration.

Démonstration :

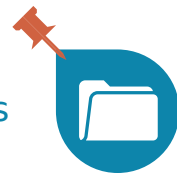
- Dans un premier temps, raisonnons par l'absurde. Remarquons que, si l'on peut trouver un découpage qui convient avec strictement moins de 6 parts, alors il existe un découpage qui convient avec 5 parts : en effet, si on a un découpage avec 4 parts, il suffit de redécouper l'une des parts en deux morceaux pour avoir un découpage qui convient en 5 parts (en attribuant les deux nouveaux morceaux toujours ensemble). Pour le raisonnement par l'absurde, on est donc ramené à étudier le seul cas d'un découpage du gâteau en 5 parts que l'on peut répartir équitablement entre 2, 3 ou 4 personnes. Pour un tel découpage, lorsque l'on partage le gâteau entre 4 personnes, l'une reçoit deux parts et les autres en ont une seule : il y a donc 3 parts de taille $\frac{1}{4}$ et 2 parts de taille inférieure (dont la somme des tailles est $\frac{1}{4}$). Mais alors, quand on partage le gâteau entre 3 personnes, aucune ne peut avoir deux parts de taille $\frac{1}{4}$ car cela excéderait la portion qui doit être reçue dans un partage équitable ($\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$); ainsi, chacun doit recevoir une part de taille $\frac{1}{4}$ mais un des trois convives ne pourra pas avoir d'autre part puisqu'il n'en reste que deux et donc se contentera d'un quart du gâteau ce qui contredit le caractère équitable du partage. On a ainsi établi que $u_3 > 5$, soit $u_3 \geq 6$.
- Dans un second temps, remarquons que le découpage suivant $\frac{3}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{1}{12}$ et $\frac{1}{12}$ (illustré ci-dessous) permet de partager le gâteau entre 2, 3 ou 4 convives. En conclusion, $u_3 \leq 6$, et puis, par double inégalité, $u_3 = 6$.



Cas $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$, etc.

Un raisonnement analogue à ceux des paragraphes précédents donne $u_4 = 9$ (un découpage admissible est $\frac{12}{60}$, $\frac{12}{60}$, $\frac{10}{60}$, $\frac{8}{60}$, $\frac{7}{60}$, $\frac{5}{60}$, $\frac{3}{60}$, $\frac{2}{60}$ et $\frac{1}{60}$) puis $u_5 = 11$ (le découpage de l'introduction est donc minimal). En s'armant de patience (voire d'un outil informatique), on peut aller plus loin et obtenir les résultats récapitulés par ce tableau :

n	2	3	4	5	6	7
u_n	4	6	9	11	13	15



Il n'y a pas de formule simple pour exprimer u_n en fonction de n , aussi va-t-on chercher à estimer cette quantité.

Minoration de u_n

Commençons par une minoration élémentaire (dont nous verrons plus loin qu'elle a le « bon » ordre de grandeur).

Proposition

Pour tout $n \geq 2$, $u_n \geq 2n$.

Démonstration : Si, lorsque l'on partage entre n convives, un convive n'obtient qu'une part, alors cette part mesure $\frac{1}{n}$; cette « grosse » part empêcherait de partager équitablement le gâteau entre $n+1$ convives car $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$.

Ainsi, dans un partage acceptable entre n convives, chacun reçoit au moins 2 parts, et donc $u_n \geq 2n$. ■

Majoration de u_n

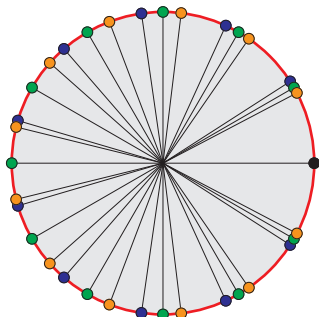
Pour obtenir une majoration, il suffit d'obtenir un découpage qui convient et pour cela on utilise simultanément plusieurs découpages réguliers.

Proposition

Pour tout $n \geq 2$, $u_n \leq 3n - 2$.

Démonstration : Construisons des polygones réguliers à $n-1$, n et $n+1$ sommets, ayant un sommet commun.

Voici l'illustration du tracé pour $n = 12$ avec le sommet commun (en noir), les sommets du 11-gone (en bleu), du 12-gone (en vert) et du 13-gone (en orange) :



Les segments reliant ces sommets au centre fournissent un découpage admissible : en effet, pour un nombre m de convives, m appartenant à $\{n-1, n, n+1\}$, on attribue à chacun la portion qui correspond aux parts comprises entre deux segments joignant le centre à deux sommets consécutifs du m -gone.

Comme il y a (au plus) $(n-1) + n + (n+1) - 2 = 3n - 2$ sommets (en tenant compte du fait que le sommet commun aux trois polygones est compté trois fois), ce découpage admissible comporte (au plus) $3n - 2$ parts, et donc $u_n \leq 3n - 2$. ■

En reprenant cet argument et en remarquant que, dans le cas n impair, les $(n-1)$ et $(n+1)$ -gones ont un autre point en commun (diamétralement opposé au point commun), on obtient la variante suivante.

Proposition

Pour tout $n \geq 2$ impair, $u_n \leq 3n - 3$.

Équivalent de u_n

On cherche maintenant à obtenir un résultat plus fin qui donne en particulier l'équivalent asymptotique $u_n \sim 2n$ (en réalité le développement $u_n = 2n + O(\sqrt{n})$ si on souhaite être plus précis).

Proposition

Pour tout $n \geq 2$, $u_n \leq 2n + 4\sqrt{n}$.

L'idée générale consiste à partager intelligemment une majorité du gâteau puis à gérer de manière plus frustre le reliquat.

Démonstration : Notons m la partie entière de $\sqrt{n}$.

Pour tous i et j entre 1 et m , taillons des parts de taille $a_{i,j} = \frac{1}{2n} + \frac{i-1}{(n-1)n} + \frac{j-1}{n(n+1)}$, puis $b_{i,j} = \frac{1}{n} - a_{i,j}$.

▷ Pour tous i et j entre 1 et m , $a_{i,j} + b_{i,j} = \frac{1}{n}$. On a ainsi une manière de faire m^2 portions (avec pour chacune deux parts de taille $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ respectivement) de taille totale $\frac{1}{n}$. Comme il en faut n pour partager le gâteau entre n convives, il suffit de couper le reste du gâteau en $n - m^2$ parts égales.

▷ Pour tout i inférieur ou égal à $m-1$ et tout j , on calcule

$$\begin{aligned} a_{i+1,j} + b_{i,j} &= \frac{1}{(n-1)n} + a_{i,j} + b_{i,j} \\ &= \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

On a ainsi une façon de faire $(m-1)m$ portions (chacune avec deux parts) de taille totale $\frac{1}{n-1}$. Il en faut $n-1$ pour partager le gâteau entre $n-1$ convives. Il suffit de (re-)couper le reste du gâteau en $(n-1) - (m-1)m$ parts égales.



Couper un gâteau entre $n + \{-1, 0, 1\}$ convives

▷ Pour tout j inférieur ou égal à $m - 1$ et tout i , on calcule

$$\begin{aligned} a_{i,j} + b_{i,j+1} &= -\frac{1}{n(n+1)} + a_{i,j+1} + b_{i,j+1} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

On a ainsi une façon de faire $(m-1)m$ portions (avec deux parts chacune) de taille $\frac{1}{n+1}$. Il en faut $n+1$ pour partager le gâteau entre $n+1$ convives. Il suffit de (re-)couper le reste du gâteau en $(n+1) - (m-1)m$ parts égales.

▷ Avec cette stratégie, on obtient au plus $2m^2 + (n-m^2) + ((n-1) - (m-1)m) + ((n+1) - (m-1)m)$ parts, soit $3n - m^2 + 2m$ après simplifications.

Il reste maintenant à faire un peu d'analyse pour estimer cette quantité : comme par définition de la partie entière, on dispose de l'encadrement $\sqrt{n} - 1 < m \leq \sqrt{n}$, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} u_n &\leq 3n - m^2 + 2m \\ &\leq 3n - (\sqrt{n} - 1)^2 + 2\sqrt{n} \\ &\leq 2n + 4\sqrt{n} - 1 \\ &\leq 2n + 4\sqrt{n}. \end{aligned}$$

Dans la preuve précédente, on a délibérément omis (pour alléger le propos) la vérification que $b_{i,j} \geq 0$ pour tous i et j .

Une variante plus « simple »

Considérons un autre problème de découpage de gâteau.

Problème. Pour tous entiers m et $n \geq 2$, notons $v_{m,n}$ le nombre minimal de parts d'une découpe d'un gâteau telle que l'on puisse se partager équitablement le gâteau que l'on soit m ou n convives. Que dire de $v_{m,n}$?

Pour ce problème, on dispose d'une formule explicite exprimant $v_{m,n}$ à partir de m , n et $m \wedge n$, le pgcd de m et n .

Théorème

Pour tous entiers m et $n \geq 2$,

$$v_{m,n} = m + n - m \wedge n.$$

Fixons m et n des entiers supérieurs ou égaux à 2 et montrons le résultat en deux étapes : une majoration et une minoration.

Majoration de $v_{m,n}$

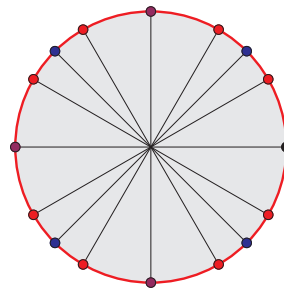
Montrons tout d'abord la majoration

$$v_{m,n} \leq m + n - m \wedge n.$$

Démonstration : Il suffit d'exhiber un découpage qui satisfait la contrainte.

Considérons un m -gone régulier et un n -gone régulier partageant un sommet ; comme ils admettent $m \wedge n$ sommets communs, la figure obtenue comporte $m + n - m \wedge n$ sommets ; cela fournit un découpage admissible à $m + n - m \wedge n$ parts.

Voici une illustration avec $m = 8$ et $n = 12$ (et donc $m \wedge n = 4$) en notant en bleu les sommets de l'octogone, en rouge les sommets du dodécagone et, donc, en violet les sommets communs aux deux :



seulement 8-gone
seulement 12-gone
8-gone et 12-gone

Minoration de $v_{m,n}$

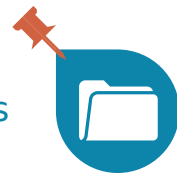
Pour la minoration $v_{m,n} \geq m + n - m \wedge n$, on associe un graphe à chaque découpage admissible :

- m sommets représentent les portions lors du découpage équitable pour m convives,
- n sommets représentent les portions lors du découpage équitable pour n convives,
- une arête joint deux sommets si une part appartient aux deux portions associées aux sommets.

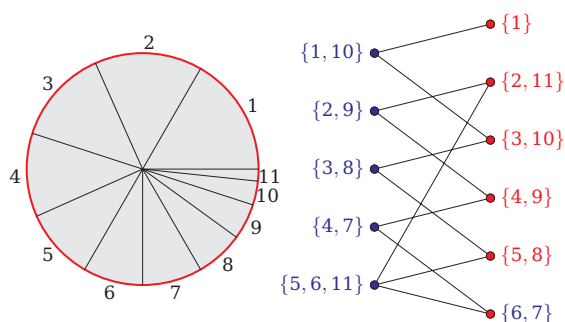
Par construction, dans ce graphe, le nombre d'arêtes est le nombre de parts du découpage.

Détaillons quelques exemples pour comprendre cette construction.

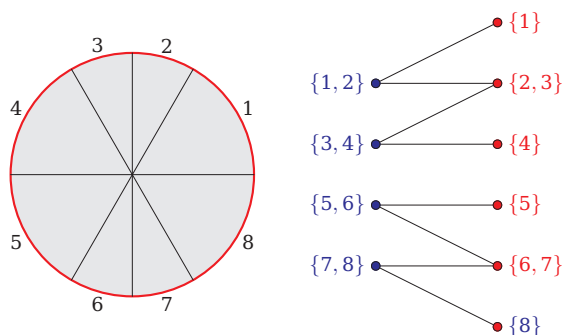
Exemple. Pour $m = 5$, $n = 6$ et le découpage en onze parts de tailles respectives $\frac{10}{60}, \frac{9}{60}, \frac{8}{60}, \frac{7}{60}, \frac{6}{60}, \frac{5}{60}, \frac{5}{60}, \frac{4}{60}, \frac{3}{60}, \frac{2}{60}$ et $\frac{1}{60}$, on sait distribuer les parts pour être équitable entre 5 convives puis distribuer les parts pour être équitable entre 6 convives.



Sur le dessin suivant, on a numéroté les parts de 1 à 11, représenté les portions dans le partage entre 5 personnes par des sommets bleus et les portions dans le partage entre 6 personnes par des sommets rouges.



Exemple. Pour $m = 4$, $n = 6$ et le découpage $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{12}$ et $\frac{1}{12}$, on obtient le graphe suivant en gardant les mêmes conventions que précédemment



Rappelons un résultat sur les graphes connexes.

Proposition

Un graphe connexe à s sommets admet au moins $s - 1$ arêtes.

Passons maintenant à la démonstration de la minoration.

Démonstration : Considérons une composante connexe du graphe associé au découpage qui comporte a sommets de la partition en m parts et b sommets de la partition en n parts. Comme chaque sommet de la partition en m parts correspond à une portion de $\frac{1}{m}$ du gâteau et que chaque sommet de la partition en n parts correspond à une portion de $\frac{1}{n}$ du gâteau, la « conservation du gâteau » dans cette composante connexe donne la relation

$$a \times \frac{1}{m} = b \times \frac{1}{n},$$

soit $an = bm$.

En notant $d = m \wedge n$, $m = dm'$ et $n = dn'$, on a $an' = bm'$. Ainsi, d'après le lemme de Gauss, n' divise b , puis

$$b \geq n' = \frac{n}{m \wedge n}.$$

Ainsi, il y a au moins $\frac{n}{m \wedge n}$ sommets (de la deuxième catégorie) dans chaque composante connexe et n sommets (de la deuxième catégorie) au total, il y a au plus $m \wedge n$ composantes connexes.

En appliquant le résultat rappelé sur les graphes connexes à chacune des composantes connexes du graphe associé à un découpage, on obtient que son nombre d'arêtes est au moins égal au nombre de sommets (qui est $m + n$) moins le nombre de composantes connexes (qui est au plus $m \wedge n$ d'après le calcul ci-dessus). Ainsi, le nombre d'arêtes est supérieur ou égal à

$$m + n - m \wedge n.$$

En conclusion, le nombre de parts d'un découpage qui satisfait la contrainte est supérieur ou égal à $m + n - m \wedge n$. ■

Relions cette démonstration à notre problème initial.

Remarque. Tautologiquement, on remarque que si un découpage du gâteau permet un partage équitable entre $n - 1$, n ou $n + 1$ convives, alors il permet aussi un partage équitable entre n et $n + 1$ convives. Par conséquent, $u_n \geq v_{n,n+1} = 2n$ et l'on retrouve une minoration de u_n qui avait été obtenue sans passer par les graphes.

En étudiant de plus près le graphe associé à un découpage en $2n$ parts construit comme précédemment à partir des répartitions entre n convives et $n + 1$ convives et en remarquant que dans ce cas il s'agit d'un arbre, on obtient d'abord des informations sur la taille des parts puis qu'un tel découpage est impossible pour $n \geq 3$ et donc que $u_n \geq 2n + 1$.

Conclusion

Comme beaucoup de problèmes de combinatoire extrême, c'est-à-dire des problèmes où l'on cherche à déterminer la taille d'un objet réalisant un minimum parmi une collection finie d'objets (ici un plus petit découpage d'un gâteau satisfaisant les conditions de partage), l'estimation précise de u_n est un problème très difficile.



Couper un gâteau entre $n + \{-1, 0, 1\}$ convives

Si, dans ce texte, on a établi que $u_n \sim 2n$, on conjecture que la quantité $u_n - 2n$ est de l'ordre de grandeur asymptotique de $\sqrt{n}$ mais les arguments pour justifier des estimations plus fines sortent du cadre élémentaire de ce court texte.

Référence

Ce texte reprend les notes d'une intervention lors des journées de l'APMEP au Havre en 2024 ; sa principale source est le fil de discussion suivant sur le forum Mathoverflow. [▶](#).

.....◆.....

Roger Mansuy est professeur de mathématiques en CPGE au lycée Saint-Louis à Paris.

roger.mansuy@ac-paris.fr

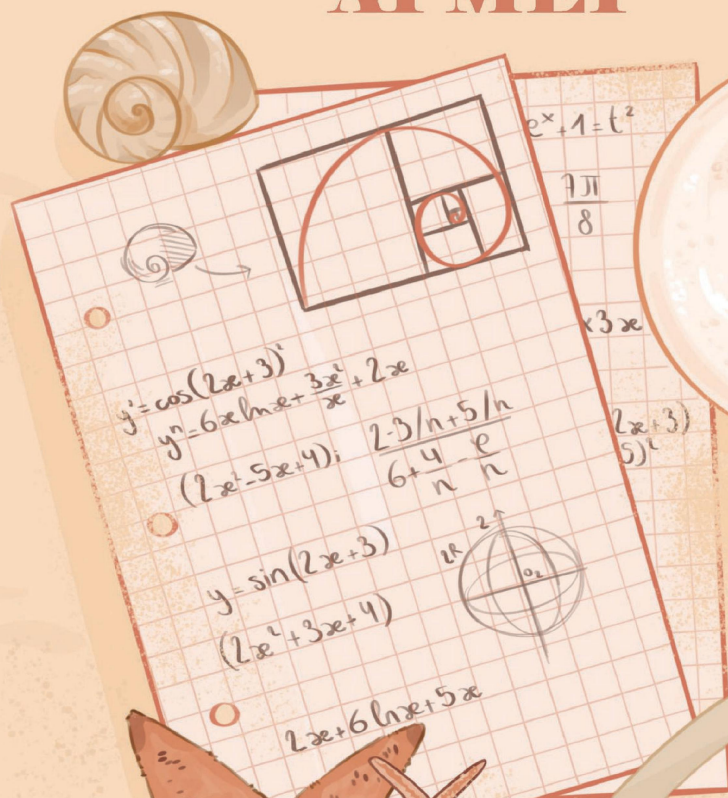
© APMEP septembre 2025



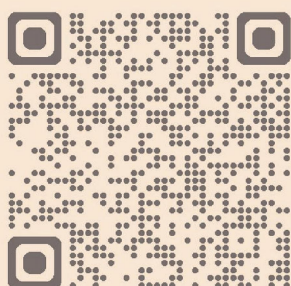
Les *mathématiques* ont toujours
la *côte* !
Journées Nationales
APMEP

Du
18 au
21
Octobre 2025

à **Toulon**



« De la maternelle
à l'université »



Sommaire du n° 557



Estimation

Éditorial

Opinions

★ Plaidoyer pour les inégalités

Serge Petit..... 3

Avec les élèves

Panglossya

Maxime Cudel..... 11

Unlock tes maths !

Denis Guicheteau 20

Quoi faire pour introduire l'algèbre ?

Sophie Bauerle..... 25

★ Des haricots à Python pour estimer en série STL

Valérie Larose..... 30

★ Modélisation et estimation du réel

Angelo Laplace..... 36

★ Estimation et grandeurs animales

Florence Soriano-Gafiuk..... 42

1 Ouvertures

★ Couper un gâteau entre $n + \{-1, 0, 1\}$ convives

Roger Mansuy 55

★ Mathématiques : usufruit et nue-propriété

Pierre Carriquiry..... 61

★ Nightingale & Riesz

François Sauvageot..... 65

★ Estimation par simulation aléatoire

Florent Malrieu..... 74

Récréations

Au fil des problèmes

Frédéric de Ligt..... 81

Des problèmes dans nos classes

Valérie Larose..... 84

Au fil du temps

Découvrir Apprenti Géomètre mobile

M.-F. Guissard, V. Henry & P. Lambrecht..... 86

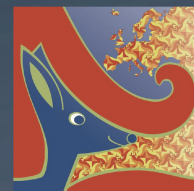
Matériaux pour une documentation..... 91

Courrier des lecteurs

Maud Sindeff..... 95



CultureMATH



APMEP
www.apmep.fr