

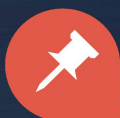
Le bulletin de l'APMEP - N° 555

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Janvier, février, mars 2025

Algébriquement vôtre



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :

<https://afdm.apmep.fr>



Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufilesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Magali HILLAIRET, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » **numériques** : Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Audrey DUGUE, Nada DRAGOVIC, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Michel SUQUET, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Éric ASTOUL, Nicolas CLÉMENT, Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL.

Équipe T_EXnique : Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Benoît MUTH, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Anne-Sophie SUCHARD.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : mars 2025. ISSN : 2608-9297.

Impression : iLLiCO by L'ARTÉSIENNE

ZI de l'Alouette, Rue François Jacob, 62800 Liévin



Du mot à la lettre : x n'est pas la chose

L'algèbre : des x , des x^2 et des y ? C'est bien plus que cela, évidemment, mais ces lettres si familières à nos yeux sont l'aboutissement d'une longue histoire d'écritures que nous conte Marie-Line Moureau. Suivons donc les traces des x et de leurs exposants !

Marie-Line Moureau

Comme le montre le sous-titre du fil rouge de ce numéro d'*Au fil des maths* (« Et si vous nous parliez de x et de y ? »), l'algèbre est bien souvent assimilée à l'utilisation de lettres. Or elle ne peut être réduite à l'utilisation d'un symbolisme, même si l'élaboration de celui-ci a indéniablement participé à son développement. Dans son *Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala* (traduit par *Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison*), le savant Al-Khwārizmī (vers 830) n'utilise ni symbole, ni abréviation, tout y est dit en mots ; pour autant, selon l'historien des sciences Ahmed Djebbar, c'est « l'acte de naissance officiel de l'algèbre en tant que discipline avec, à la fois, un nom, des objets, des outils, des algorithmes et des domaines d'application ». Al-Khwārizmī répertorie et étudie les six types de relations que l'on peut établir entre les « dirhams » (les nombres), les « biens » (les carrés) et les « choses » ou « racines du bien » (les côtés des carrés). Ainsi s'intéresse-t-il à des relations du type « un bien et des choses égalent des dirhams » ou bien « des racines égalent des biens ». Les x et x^2 ne sont apparus que des siècles plus tard, pensés, conceptualisés par des générations de mathématiciens empruntant des chemins plus ou moins fertiles. Cet article veut mettre en lumière quelques étapes du xvi^e siècle.

Des mots, rien que des mots

Les biens (en arabe *mal*), les racines (*gizr*) et les choses (*say*) ont traversé la Méditerranée. Arrivés

en Europe, ils sont traduits en langues vernaculaires ou en latin. On rencontre ainsi pour *say* : *res* ou *cosa*, abrégée en *cos* voire *co* chez les mathématiciens italiens Luca Pacioli ou Jérôme Cardan, bien que celui-ci utilise aussi *pos*, abréviation de *positio* dans son *Ars magna* de 1545. On trouve également *radix*, pour racine. Les biens sont devenus *census*. Le cens étant un impôt dû au seigneur par tout propriétaire terrien, le carré serait « le revenu obtenu après multiplication de la racine par elle-même », c'est du moins l'explication donnée par Jacques Peletier dans son traité d'algèbre de 1577 [1].

Des symboles

En 1525, Christoff Rudolff publie un livre d'algèbre dont le titre *Behend und hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeincklich die Coss genent werden*¹ est souvent simplifié en *Die Coss*, (littéralement *La Chose*). Il y présente différentes abréviations dont la plus célèbre $\sqrt{}$ pour indiquer une racine carrée. Mais Rudolff propose aussi le signe $\mathfrak{r}$ pour la racine (au sens de « chose ») et le signe $\mathfrak{c}$ pour *census*, il ajoute $\mathfrak{c}$ pour *cubus*. Il est à peu près certain pour les historiens que ces notations sont un arbitrage entre les souhaits de l'auteur d'assembler les première et dernière lettres des mots, et les signes typographiques disponibles chez l'imprimeur. Elles sont adoptées par un certain nombre de mathématiciens que l'on dira pour cela « cossistes ». Au même moment, d'autres mathématiciens optent pour les initiales des mots latins : *N*, *R*, *Q* et *C*

1. Calcul agile et gracieux grâce aux règles astucieuses de l'algèbre communément appelée la Coss.

(*numerus, radix, quadratus et cubus*). Guillaume Gosselin (1577) préfère le mot *latus* (côté) à *radix* et le *R* est donc remplacé par *L*. Ces mots « côté », « carré », « cube » montrent bien qu'il ne s'agit pas encore d'une *variable* que l'on élève à diverses puissances, mais d'objets géométriques. D'ailleurs les démonstrations des différents algorithmes se fondent le plus souvent, comme chez Al-Khwārizmī, sur des configurations géométriques, compléments et décompositions de carrés ou de cubes.

Mais l'algèbre enseigne comment manipuler les expressions algébriques et en particulier comment les multiplier entre elles, ce qui fait apparaître des exposants supérieurs à 3. Or aucun objet géométrique, donc aucun mot, ne correspond à une puissance 4, 5, 6 ou plus encore. À partir des carrés et des cubes, il s'agira donc de désigner ces puissances supérieures au-delà du monde géométrique. Notre notation actuelle $x^2 \times x^3 = x^5$ permet de rendre compte à la fois du caractère multiplicatif (produit de deux puissances d'un même nombre) et du caractère additif (somme des exposants). Comment au XVI^e siècle traduire dans l'écriture ces deux opérations mathématiques ici entremêlées ? Dans la tradition de Diophante (III^e siècle) dont les *Arithmétiques* viennent d'être redécouvertes, des mathématiciens comme Guillaume Xylander (1575) privilégient le caractère additif, pour eux *QC* (carré + cube) désigne donc la puissance 5. Mais la plupart des mathématiciens choisissent de privilégier le caractère multiplicatif, ainsi *QC* ou *2z* correspond pour eux à la puissance 6. Il est clair que ce deuxième choix ne permet pas de régler le cas des exposants premiers comme 5 et 7. Les cossistes introduisent un nouveau symbole β pour 5, qui serait les deux *s* accolés de sursolide, « au-delà du solide », traduction d'un mot déjà utilisé par les mathématiciens arabes, *b β* est le deuxième sursolide (pour puissance 7), *c β* le troisième (pour puissance 11).

Michel Stifel, qui fit connaître et prolongea l'œuvre de Rudolff, donne, dans son *Arithmetica Integra* de 1544 [2, p. 235], la liste suivante² :

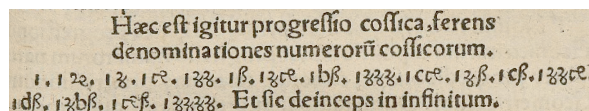


Figure 1. Les notations cossistes chez Stifel (1544).

Traduction de la phrase d'introduction : « Il s'agit donc d'une progression cossique, portant les dénominations de nombres cossiques » et de celle de conclusion : « Et ainsi de suite à l'infini. »

Stifel établit explicitement le lien entre la progression arithmétique de ce qu'il appelle les *exponens* : 0, 1, 2, etc. et la progression géométrique des nombres cossiques. Ceux-ci commencent avec 1 et les *exponens* avec 0, ce qui est une audace car 0 n'est pas encore considéré comme un nombre. Cette correspondance facilite le calcul du produit de deux nombres cossiques, puisqu'il suffit d'additionner les *exponens* puis d'aller chercher le nombre cossique correspondant dans ce tableau.

Figure 2. Les exposants chez Stifel (1544).

Mais des tableaux de ce genre, établissant la correspondance entre les rangs des termes et leurs désignations, se trouvent dans de très nombreux traités, avec ou sans exemple numérique.

Par exemple Jacques Peletier expose un tableau similaire dans son *Algèbre* de 1554 [1].

Figure 3. Les notations chez Peletier (1554).

Il a ajouté une troisième ligne donnant ce qu'il appelle la « progression double » (bâtie sur le nombre 2) et le nombre 65 536 est donc, dit-il, *censicencensicencensique*. Il ajoute que « le mot est

2. On peut noter *1c β* pour la puissance 9, là où on attendrait un *1cc β* .

rude, il suffit qu'il soit signifiant. Car c'est beaucoup d'avoir trouvé nom à choses si inusitées et si peu pratiquées ».

Ou des chiffres

Toujours au xvi^e siècle, deux mathématiciens font des choix différents, optant pour une notation chiffrée, gardant trace seulement du rang.

Raphaël Bombelli en 1572, dans *L'Algebra Parte Maggiore Dell'arimetica* [3], écrit les rangs (les valeurs) au-dessus d'un arc de cercle, tout en gardant des dénominations concrètes (les dignités), il donne dans l'extrait ci-dessous « les noms des dignités et la forme de leurs abréviations ». On voit que *tanto* et *potenza* remplacent racine et carré, tandis que chacune des puissances 5, 7 et 11 est un *relato*, numéroté selon l'ordre d'apparition : *primo relato*, *secondo relato*, *terzo relato*.

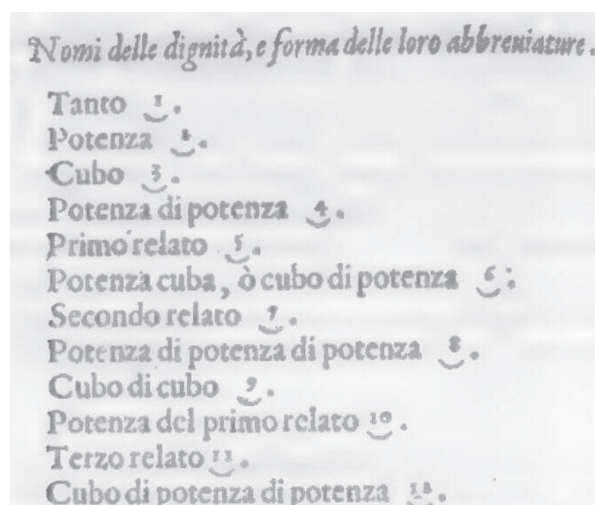


Figure 4. Les notations chez Bombelli (1572).

Ces « valeurs » sont écrites sur la même ligne que le reste du texte, mais sont placées au-dessus dans les calculs. Par exemple, page 213, pour exposer ce qui pour nous serait : « le produit de $4x$ par $6x + 8$ donne $24x^2 + 32$, il écrit :



Figure 5. Un produit en ligne chez Bombelli.

Tout est situé sur la même ligne avec, c'est à noter, l'utilisation de *p.* pour marquer l'addition, l'usage des signes $+$ et $-$ n'étant pas encore généralisé.

Mais, page suivante, Bombelli présente la multiplication de $6x + 2$ par lui-même : les exposants sont écrits au-dessus des coefficients :

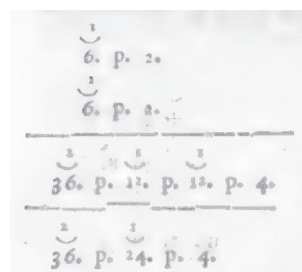


Figure 6. Un produit posé chez Bombelli.

Simon Stevin dans *l'Arithmétique* de 1585 [4] est encore plus minimaliste, il note seulement les rangs (« dénominateurs » pour lui) qu'il inscrit dans un cercle, et il abandonne toute autre notation et tout vocabulaire spécifique : il ne s'agit que des quantités prime, seconde, tierce etc.

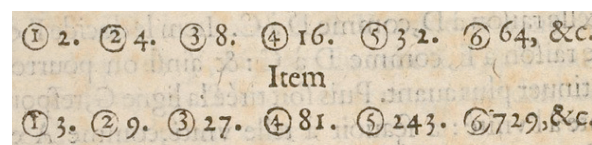


Figure 7. Notations chez Stevin (1585).

Le nombre seul, en tant que constante, est noté avec un zéro cerclé ① et il est appelé « commencement », alors que, pour Bombelli, (en reprenant sa terminologie) « un nombre n'a pas de valeur ». Stevin présente, page 280 de son *Arithmétique*, les différents types d'équations qu'il va s'attacher à résoudre et la méthode qu'il va suivre. En langage actuel, la première ligne indique que toute équation du type $ax^2 = bx + c$ sera résolue en se ramenant à une équation du type $AX = B$.

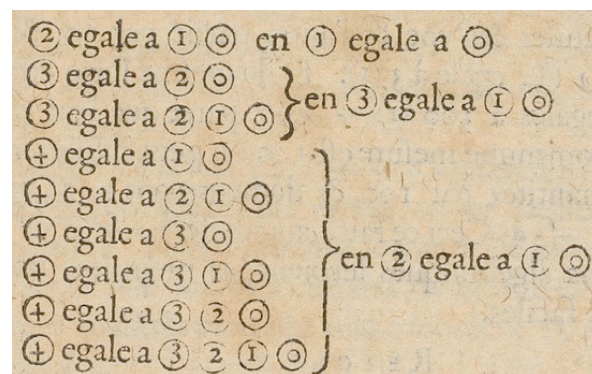


Figure 8. Les équations chez Stevin.

Stevin se félicite de son invention : « *car l'utilité des marques ①, ②, ③ et ④ est telle que l'opération qui par iceux caractères [les caractères cossistes] est obscure, laborieuse, ennuyeuse [...] sera par ces marques claire, légère, plaisante* ».

Et finalement des formules

Dans leurs traités d'algèbre, comme le faisait Al-Khwārizmī, les algébristes du xvi^e siècle répertorient, classent et traitent une par une les différentes combinaisons possibles des termes des équations. Aucun ne peut donner de formule pour exprimer une fois pour toutes les solutions, tous ne peuvent donner que les algorithmes de résolution. Et même si Stevin réduit en « ③ égale ① ② » les équations du troisième degré, il est amené à considérer trois cas pour le second membre, spécifiés sous la forme « ① + ②, -① + ② et ① - ② » et, comme ses contemporains, il propose des algorithmes différents pour chacun de ces cas, algorithmes déroulés sur un exemple à valeur générique.

Ces notations, cossistes ou non, ne permettent donc pas non plus de donner la forme générale des solutions d'un problème. Considérons par exemple le problème classique que chaque mathématicien a à cœur de résoudre à sa façon depuis au moins Diophante : « Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit ». Nous mobilisons de nos jours en général x_1 et x_2 pour les deux nombres inconnus et P et S pour les valeurs supposées connues de leur produit et de leur somme. Nous pouvons ainsi démontrer que dans tous les cas, les nombres cherchés, s'ils existent, sont les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$, et donc les exprimer comme étant égales à $\frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$. Ce symbolisme étendu aux valeurs connues, les constantes, et aux coefficients est initié par François Viète. Dans son *Introduction à l'art analytique ou nouvelle Algèbre* de 1591, il indique que « *les grandeurs données doivent être distinguées de celles que l'on cherche par un symbolisme*

uniforme et facile à lire, ce qui peut se faire en désignant les inconnues par la lettre A ou d'autres voyelles E, I, O, U, Y et les données par les lettres B, G, D ou d'autres consonnes ». Il a le grand souci de respecter l'homogénéité : on n'additionne que des grandeurs de même « espèce » (ligne avec ligne, surface avec surface), et le produit de deux grandeurs d'une certaine espèce donne une grandeur d'une espèce supérieure, par exemple le produit de deux lignes est une surface. Si une valeur inconnue est A , son carré sera noté A *quadratus*, tandis que si elle est d'emblée perçue comme un objet de dimension 2, elle sera notée A *plano*. Ainsi, pour exprimer que le produit de deux grandeurs A et E est la grandeur B , Viète écrit A in E *aequatur* B *plano*. Le calcul ne s'appliquant plus aux nombres mais aux symboles et espèces, Viète appelle cette méthode « *la Logistique spécieuse* », les commentateurs parlent de la « *Nouvelle algèbre* » de Viète.

Apparition de x

Un nouveau changement s'opère au $xvii^e$ siècle. En effet, René Descartes, en 1637, dans sa *Géométrie* [5], choisit de désigner les valeurs connues par les lettres du début de l'alphabet, et les inconnues par celles de la fin, toutes le plus souvent en minuscule, contrairement aux majuscules de Viète. Il introduit de façon systématique la notation avec les exposants en indiquant qu'il faut « *noter aa ou a^2 pour multiplier a par soi-même ; et a^3 pour le multiplier encore une fois par a, et ainsi à l'infini* ». Il n'y a plus aucune considération de grandeurs géométriques, et pas davantage de souci d'homogénéité car, dès les premières pages de sa *Géométrie*, Descartes explique comment, en choisissant un segment unité, le produit de deux lignes est encore une ligne.

À la page 373, l'équation

Figure 9. Une équation chez Descartes (1637).

où le signe ∞ (probablement un jeu d'écriture à partir du *ae* débutant le mot *aequatur*) signifie

« est égale à », nous est d'autant plus familière que le second membre est nul, ce qui est également nouveau. On notera cependant que Descartes utilise le double signe « - - » pour signifier simplement « - ».

Conclusion

Cet article est loin d'être exhaustif, tant sur les notations que pour les mathématiciens cités. Il s'attache à l'écriture et non aux concepts. Le changement épistémologique derrière le passage de la « chose » à la variable, les inventions significatives de Viète, les apports disruptifs de Descartes sont à peine effleurés.

Nos x , y , a , b , c ... si liés à l'idée d'algèbre dans l'esprit du grand public, voire pour certains enseignants, ne sont pas nés avec elle. Ils ont été construits au cours des siècles, et il ne s'agit pas simplement d'un choix typographique pour aller plus vite. Ils ne sont pas la simple transcription des *girz* et *say*, biens et choses, d'Al-Khwārizmī. Trouver un mot, l'écrire, l'abréger, faire de cette abréviation un symbole et opérer sur ces symboles comme on opère sur des nombres, c'est le long chemin parcouru. De rhétorique chez les mathématiciens arabes (tout y

est en mots), l'algèbre est devenue syncopée (certaines abréviations viennent alléger le discours), puis symbolique (tout y est écrit avec des symboles). Les concepts ont évolué, l'algèbre s'est enrichie, renouvelée.

Références

- [1] Jacques Peletier. *L'algèbre de Jaques Peletier du Mans, departie an deus livres*. Lyon : Jean de Tournes, 1554.
- [2] Michel Stifel. *Arithmetica integra, authore Michaelae Stifelio, cum praefatione Philippi Melancthonis*. Norimbergae, 1544.
- [3] Raphael Bombelli. *L'Algebra Parte Maggiore Dell'arimetica*. Bologne : Giovanni Rossi, 1572.
- [4] Simon Stevin. *L'Arithmetique*. Leyde : Christophe Plantin, 1585.
- [5] René Descartes. *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison & chercher la vérité dans les sciences. Plus La dioptrique, Les météores et La géométrie* qui sont des essais de cette méthode. Leyde : Jean Maire, 1637.



Marie-Line Moureau est membre du groupe Histoire des mathématiques de l'IREM des Pays de la Loire et fait également partie du comité de rédaction d'*Au fil des maths*.

© APMEP mars 2025

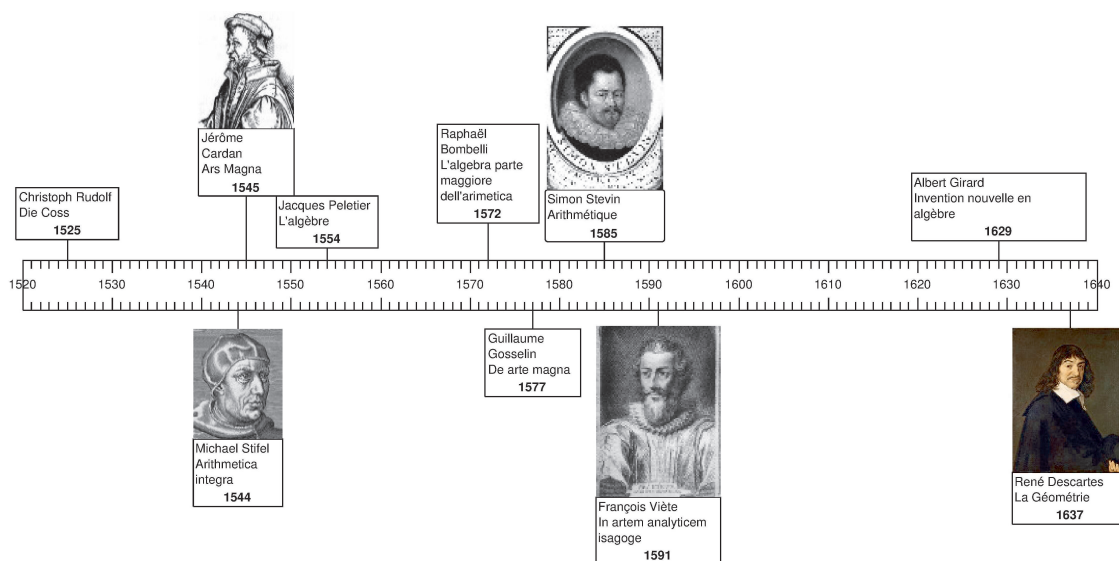
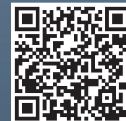


Figure 10. Petite frise chronologique.

Sommaire du n° 555



Algébriquement vôtre

Éditorial

Opinions

- ✦ Représentations en barres et entrée dans l'algèbre
Richard Cabassut 3
- ✦ Des chiffres et des lettres
S. Grau & Groupe collège de l'IREM Pays de la Loire 8
- ✦ Vers le calcul littéral en cycle 3
Brigitte Grugeon-Allys & Julia Pilet 15
- ✦ La pensée arithmético-algébrique
F. Hitt, J. C. Cortés, S. Quiroz Rivera & M. Saboya 23

Avec les élèves

- Châteaux forts, un projet coopératif
Sonia Besler & Claire Piolti-Lamorte 33
- Histoire du système métrique
Daniel Fischer & Florence Soriano-Gafiuk 39
- Les fractales, de l'infini vers l'art
Stéphane Mouez 49
- ✦ Vers l'algèbre, en douceur
Jean Toromanoff 55

1 Ouvertures

- L'odyssée du sinus, première partie
Ivan Boyer & Karim Zayana 59
- Un guide-âne pour les amateurs de son
Renaud Dehaye 66

Récréations

- Au fil des problèmes
Frédéric de Ligt 70
- Des problèmes dans nos classes
Valérie Larose 73
- ✦ Trouver X (et Y)
Sébastien Reb 75

Au fil du temps

- ✦ Du mot à la lettre : x n'est pas la chose
Marie-Line Moureau 78
- Matériaux pour une documentation 83
- ✦ Résolution d'une équation du 2^e degré par Fibonacci
Michel Sarrouy 87
- Hommage à Jacques Verdier
Daniel Vagost & Christiane Zehren 93



CultureMATH

