

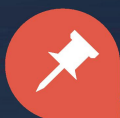
Le bulletin de l'APMEP - N° 555

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Janvier, février, mars 2025

Algébriquement vôtre



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>



Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufilesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Magali HILLAIRET, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » **numériques** : Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Audrey DUGUE, Nada DRAGOVIC, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Michel SUQUET, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Éric ASTOUL, Nicolas CLÉMENT, Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL.

Équipe T_EXnique : Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Benoît MUTH, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Anne-Sophie SUCHARD.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : mars 2025. ISSN : 2608-9297.

Impression : iLLiCO by L'ARTÉSIENNE

ZI de l'Alouette, Rue François Jacob, 62800 Liévin



Vers le calcul littéral en cycle 3

Au collège, les élèves rencontrent souvent des difficultés en algèbre. Brigitte Grugeon-Allys et Julia Pilet proposent des pistes pour mieux préparer les élèves de cycle 3 à l'introduction du calcul littéral à partir de la Cinquième.

Brigitte Grugeon-Allys & Julia Pilet

En France, le calcul littéral est abordé dans l'enseignement secondaire à partir de la classe de Cinquième et les programmes donnent des éléments plus ou moins explicites sur des conditions d'entrée dans le calcul littéral. Le développement du calcul mental et du calcul en ligne dans les programmes de mathématiques à l'école primaire et au début du collège depuis 2015 [1] ouvre de nouvelles perspectives pour accompagner les élèves à entrer dans le calcul littéral en Cinquième. De plus, la place attribuée récemment à la représentation dans la résolution de problèmes est davantage prise en compte [2]. Mais des élèves rencontrent toujours des difficultés.

Voici quelques exemples d'erreurs bien identifiées.

- *Calculer* $2 + 3 \times 4$. Les élèves qui obtiennent 20 ne prennent pas en compte les priorités opératoires.
- *Programme de calcul* « Choisis un nombre, ajoute 5, multiplie le résultat par 3, soustrais 2 » réalisé pour le nombre 4. Les élèves qui écrivent : $4 + 5 = 9 \times 3 = 27 - 2 = 25$ ne prennent en compte ni l'égalité comme relation d'équivalence, ni la structure du résultat à l'aide des parenthèses privilégiant le processus du calcul.

L'évaluation CEDRE 2019 [3] évalue ces difficultés pour plus de la moitié des élèves en fin de Troisième, ces élèves réussissant seulement des items mettant en jeu des savoirs de CM2.

Quels sont les aspects épistémologiques des savoirs attendus à l'entrée en Cinquième comme ceux d'égalité, de propriétés des opérations, de représentation de relations entre données et inconnues ?

En quoi permettent-ils de développer des concepts cruciaux pour l'entrée dans l'algèbre et de préparer les élèves à raisonner algébriquement avec et sur les expressions algébriques, les équations ou les formules ?

Nous l'illustrons à partir d'exercices issus des documents d'accompagnement et des manuels.

Nous faisons l'hypothèse que certaines difficultés d'élèves dans l'apprentissage de l'algèbre peuvent être liées à une activité mathématique peu développée à la frontière entre les domaines arithmétique et algébrique. Nous l'appelons « activité numérique-algébrique » [4] et en présentons les principales caractéristiques.



Des repères sur la transition arithmétique-algèbre

Premier point de vue : une double rupture entre l'arithmétique et l'algèbre

La transition entre l'arithmétique et l'algèbre a fait l'objet de nombreuses recherches, au plan national et international. Dans une approche cognitiviste, les travaux de Vergnaud [5] caractérisent cette transition par une double rupture entre l'arithmétique et l'algèbre ¹.

La première rupture concerne la résolution de problèmes et les raisonnements mis en jeu. Le raisonnement arithmétique en primaire consiste à déterminer les données inconnues en partant des éléments connus du contexte alors que le raisonnement algébrique du secondaire conduit à modéliser le problème à partir des données connues et inconnues pour en faire un traitement formel en vue de le résoudre.

La deuxième rupture porte sur le statut des objets et notamment celui de l'égalité. À l'école primaire, l'égalité est utilisée de façon dominante comme *annonce de résultat* dans le sens où elle sert à effectuer les calculs, souvent de gauche à droite, jusqu'à obtention d'un nombre, donc sans signe opératoire. Cela conduit d'ailleurs certains élèves à produire des écritures incorrectes vis-à-vis de l'égalité pour réaliser une succession de calculs, par exemple $5 + 4 = 9 \times 3 = 27$. Le traitement des expressions algébriques repose sur le *statut d'équivalence* de l'égalité. Contrairement aux pratiques de calcul en primaire, une expression algébrique peut conserver un signe opératoire après réduction.

Un autre point de vue : l'early algebra

Pour Kieran [6], cette transition dans le statut des objets marque une fausse continuité, dans le sens où certains des objets de l'algèbre, dont les lettres, les signes de l'égalité et des opérations, ne sont pas nouveaux mais sont utilisés avec des significations différentes en arithmétique en primaire et en algèbre dans le secondaire. Dans des travaux plus récents, notamment ceux relevant du courant *early algebra*, Kieran et al. [7] et Radford [8] considèrent que la transition peut être négociée dès l'école primaire. Des types d'exercices comme le calcul mental ou le calcul en ligne, le traitement des *patterns*, peuvent engager les élèves à développer le statut des objets nécessaire à l'activité algébrique.

Des caractéristiques de l'activité numérique-algébrique

L'activité numérique-algébrique se développe à la fois dans le calcul mis en jeu sur les expressions numériques puis algébriques et dans la résolution de plusieurs types de problèmes présents dès le primaire puis à partir de la Cinquième en algèbre.

Les notions mathématiques en jeu

L'égalité comme relation d'équivalence

L'équivalence de la relation d'égalité est au cœur de l'activité numérique-algébrique. Elle est portée par les propriétés de réflexivité, de symétrie et de transitivité de l'égalité. Dans le numérique, l'équivalence a une dimension calculatoire (avoir la même *valeur*) et une dimension structurelle [9]. Cette dernière met notamment en jeu la réflexivité pour justifier l'équivalence d'expressions numériques à partir de décompositions et de recombinaisons sans calculer la valeur des expressions, par exemple $5 + 9 + 3 = 5 + (5 + 4) + 3 = (5 + 5) + (4 + 3) = 10 + 7$. Le travail sur le sens de la structure d'une expression numérique

1. « D'une part, l'introduction d'un détournement formel dans le traitement des problèmes habituellement traités intuitivement, d'autre part, l'introduction d'objets mathématiques nouveaux comme ceux d'équation et d'inconnue, de fonction et de variable » [5, p. 189].



s'appuie sur les nombres écrits dans le système de numération décimale et leurs propriétés (parité, multiples de, etc.), sur les propriétés des opérations (commutativité, associativité de l'addition et de la multiplication, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition), mais aussi sur les techniques de décomposition, recomposition des expressions numériques.

Le calcul multiplicatif de l'expression numérique 32×25 utilise le fait que 32 est un multiple de 4 et que la recomposition multiplicative de 4 et de 25 est 100, fait numérique qui doit être un prérequis. $32 \times 25 = 8 \times 4 \times 25 = 8 \times 100$. Ces aspects étant travaillés à l'école primaire, l'équivalence peut donc être abordée dès l'école primaire. De plus, l'équivalence est mise en jeu dans les techniques de décomposition et de recomposition des expressions numériques utilisées en calcul réfléchi écrit [10] [11] pour obtenir des calculs plus économiques [12]. Par exemple, réécrire l'expression numérique 12×99 en $12 \times 100 - 12$ repose sur la décomposition de 99 en $100 - 1$, la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et celle du produit par 100.

Sens et dénotation d'une expression numérique ou algébrique

Drouhard [13] définit la notion de dénotation d'une expression en référence à la distinction établie par Frege [14] entre sens (*Sinn*) et dénotation (*Bedeutung*). Par exemple, les trois expressions numériques $57 + 16$, $57 + 3 + 13$, $60 + 13$ mettent en jeu des signes différents mais réfèrent leur dénotation à un même nombre 73. Les expressions n'ont pas le même sens puisqu'elles ne relèvent pas du même point de vue. Ceci conduit à élaborer des stratégies efficaces de réécriture pour réduire le coût des calculs et la mobilisation de propriétés opératoires (par exemple, $25 \times 32 = 25 \times 4 \times 8 = 100 \times 8 = 800$). La réécriture s'appuie sur le sens des expressions, les propriétés des opérations et des nombres et la structure du système de numération. Le statut du signe d'égalité est nécessairement une relation d'équivalence.

Le fait de pouvoir raisonner en passant d'une écriture à une autre tout en s'assurant de conserver leur dénotation peut être travaillé dès l'école primaire, en particulier lors d'un calcul mental ou en ligne [10] [11]. Il en est de même en calcul algébrique.

Caractères structural et procédural d'une expression numérique ou algébrique

Lors d'un calcul, on distingue les caractères structural et procédural des objets mathématiques, ceux-ci étant perçus soit comme des processus (procédural), soit comme des objets (structural) [15]. Ces deux caractères cohabitent lors de l'activité mathématique. Comme indiqué dans l'introduction, en ce qui concerne l'exécution du programme de calcul « Choisir un nombre, lui additionner 3 et multiplier le résultat par 5 » pour le nombre 7, au moins deux stratégies de calcul sont envisageables, l'une qui privilégie le caractère procédural, c'est-à-dire les étapes de calcul une à une, $7 + 3 = 10$ et $10 \times 5 = 50$, l'autre le caractère structural du programme de calcul prenant en compte l'enchaînement des calculs $(7 + 3) \times 5 = 10 \times 5 = 50$.

Le premier sollicite uniquement l'effectuation des opérations pas à pas. Le second nécessite d'appréhender la structure de l'expression résultat du programme de calcul, de connaître les priorités opératoires et le rôle des parenthèses pour le représenter et de mobiliser l'équivalence de l'égalité lors de la recomposition. Selon Sfard [15], dans l'apprentissage d'un concept, l'élève mobilise souvent en premier son caractère procédural avant son caractère structural, ce qui peut conduire à des erreurs comme indiqué dans l'introduction.



Ces différentes caractéristiques des notions mathématiques peuvent être utilisées dans la résolution de différents types de problèmes que l'on peut déjà rencontrer au cycle 3.

La résolution de problèmes

Problèmes de généralisation

Les situations de généralisation de motifs géométriques [16] visent à faire rentrer de jeunes élèves dans des processus de généralisation et ainsi à développer une pensée algébrique avant de rencontrer le symbolisme formel algébrique introduit au secondaire. C'est l'occasion d'utiliser des nombres non connus (inconnues, variables, etc.) dans la résolution de problèmes, de désigner ces nombres par différents moyens (codages, gestes, ...), de traiter des quantités inconnues comme si elles étaient des nombres connus [8].

Par exemple, dans le motif géométrique présenté ci-dessous (figure 1), trouver le nombre de carreaux grisés qui composent un patron d'un « grand » numéro (par exemple 99) nécessite de généraliser le *pattern*. La généralisation conduit les élèves à exprimer un programme de calcul qui donne le nombre de carreaux pour un numéro n de patron : ajouter 3 fois n carreaux au carreau central. La formulation produite par les élèves peut se présenter sous plusieurs formes, verbales, gestuelles mais aussi par des signes conventionnels ou non. Par exemple, pour le patron n° 1 : $1 + 1 + 1 + 1$ soit $1 + 3 \times 1$; pour le patron n° 2 : $1 + 2 + 2 + 2$ soit $1 + 3 \times 2$; ... ; pour le patron n° 99 : $1 + 99 + 99 + 99$ soit $1 + 3 \times 99$.

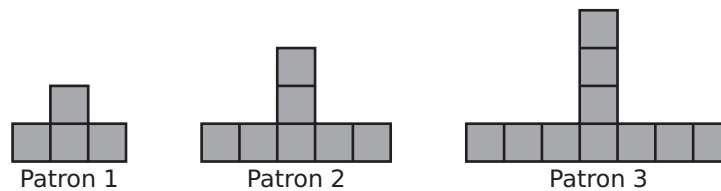


Figure 1. Un pattern géométrique.

Les problèmes arithmétiques élémentaires

Souvent à l'école primaire, la résolution de problèmes vise à rechercher la bonne opération, le statut d'égalité privilégiant l'annonce d'un résultat. Pourtant la représentation d'un problème peut engager un raisonnement portant sur la relation entre les quantités connues et inconnues et privilégier le statut d'égalité comme relation d'équivalence. La résolution des problèmes arithmétiques élémentaires, de structures additives et multiplicatives (en particulier, les problèmes de comparaison déconnectés [17]), relève d'une telle approche.

Par exemple, le problème suivant : « Julia a acheté 3 paquets de gâteaux coûtant chacun 2,50 € et un ananas. Elle a donné un billet de 20 € à la caissière qui lui a rendu 9,50 €. Combien coûte l'ananas ? » se ramène à résoudre l'égalité à trous :

$$3 \times 2,50 + ? + 9,50 = 20.$$

Vergnaud développait déjà ce point de vue dans les années 1980 : « [...] certains modes de représentation et d'écriture comme les égalités à trous utilisées dès les premières classes de l'école élémentaire ressemblent étrangement à l'algèbre. Et si l'on considère comme étant de nature algébrique la tâche qui consiste à mettre un problème en représentation, c'est-à-dire à extraire d'un problème ou d'une situation les relations pertinentes, à en fournir un modèle symbolique, puis à traiter les relations ainsi



représentées à l'aide d'une syntaxe propre au système symbolique choisi, alors l'algèbre commence, ou peut commencer, dès l'école l'élémentaire. »² [5, p. 189].

De plus, exprimer des relations entre quantités connues et inconnues repose sur des conversions entre registres de représentation sémiotique [18] qui peuvent être travaillées dès l'école primaire à l'occasion de la résolution de problèmes, notamment dans le cas de problèmes additifs avec mots inducteurs, reposant sur une non-congruence sémantique entre le registre de la langue (énoncé) et le registre des relations arithmétiques.

Nous retenons de ces travaux que la représentation et le traitement des relations entre les quantités données ou non d'un problème par un modèle symbolique, relève d'une activité numérico-algébrique. Elles peuvent être formulées par des égalités à trous, des relations exprimées par des signes non conventionnels (gestes, flèches, etc.), c'est-à-dire un système symbolique formel émergeant.

Exemples de potentialités et des limites de tâches pour favoriser l'entrée dans l'algèbre

Dans ce qui suit, nous prenons des exemples issus de documents d'accompagnement ou de manuels scolaires de cycle 3 dans lesquels des tâches de calcul mental ou de résolution de problèmes sont plus ou moins favorables à une activité numérico-algébrique. Ces exemples sont donnés sans une analyse exhaustive des ressources. Nous renvoyons à des analyses plus approfondies et structurées dans Pilet et Grugeon-Allys (2020, 2022).

Des exemples en calcul mental et en calcul en ligne

Le calcul en ligne est apparu dans les programmes scolaires du primaire de mathématiques au cycle 3 en 2015 et plusieurs documents d'accompagnement précisent ses objectifs (Ministère de l'Éducation nationale, 2016a, 2016b). Il est défini comme : « une modalité de calcul écrit ou partiellement écrit. » [22, p. 1]. Il se distingue « du calcul mental, en donnant la possibilité à chaque élève, s'il en ressent le besoin, d'écrire des étapes de calcul intermédiaires qui seraient trop lourdes à garder en mémoire » [22, p. 1]. Au-delà d'alléger la mémoire de travail, écrire les étapes intermédiaires conduit à utiliser l'égalité comme relation d'équivalence, à utiliser les propriétés des nombres et des opérations pour réécrire les calculs comme dans l'exemple suivant (figure 2).

13 × 54 = ?	
Un élève écrit : $13 \times 54 = 540 + 3 \times 54$ $= 540 + 150 + 3 \times 4 = 690 + 12$ $= 702$	L'élève utilise la distributivité. La justification complète s'écrit : $13 \times 54 = (10 + 3) \times 54 = 10 \times 54 + 3 \times 54 = 540 + 3 \times (50 + 4)$ $= 540 + 3 \times 50 + 3 \times 4 = 540 + 150 + 12 = 690 + 12 = 702$
Un autre élève écrit : $13 \times 54 = 13 \times 50 + 13 \times 4$ $= 650 + 40 + 12 = 702$	Cet élève a mémorisé le résultat du produit 13×5. Il décompose 54 pour faire apparaître 13×50 en utilisant la distributivité.

Figure 2. Extrait de Le calcul en ligne au cycle 3, [22, p. 2].

2. NDLR : c'est, semble-t-il, l'esprit de ce qui est proposé dès le CM1 dans le programme 2025 de cycle 3, actuellement en consultation.



Les documents d'accompagnement insistent sur le rôle du calcul en ligne, en articulation avec le calcul mental pour développer la signification du signe « = » comme relation d'équivalence, l'usage des parenthèses, des propriétés des opérations et des nombres, de différentes écritures d'un même nombre. On y retrouve donc les principales caractéristiques de l'activité numérique-algébrique pour ce qui concerne le calcul mental.

Toutefois, dans Pilet et Grugeon-Allys (2020, 2022), nous avons mis en avant que les potentialités offertes par les programmes et les documents d'accompagnement étaient inégalement reprises dans les manuels scolaires de cycle 3. Nous donnons ici d'autres exemples de manuels.

Le manuel *J'apprends les maths, CM2* [23] propose une page sur le calcul mental de la multiplication (figure 3) où il apparaît clairement que les propriétés d'associativité et de commutativité de la multiplication sont travaillées pour se ramener à des calculs plus faciles à effectuer mentalement.

Dans l'exercice 3, la disposition des calculs en ligne proposée par les deux élèves met bien en exergue l'égalité comme relation d'équivalence. Les séries de calculs des exercices 2 et 4 sont judicieusement choisis pour réinvestir les procédures introduites. Dans cet exemple, la place attribuée au calcul en ligne, le choix approprié des calculs et la formulation des procédures sont favorables à l'activité numérique-algébrique.

Le guide de l'enseignant du manuel *Totem CM2* [24] propose quant à lui des séries de calcul mental avec des objectifs ciblés.

Pour multiplier par 6 (figure 4), le calcul en ligne est utilisé pour donner à voir une décomposition du produit en une somme à partir de la propriété de distributivité mais sans réflexion préalable sur les nombres en jeu et leurs propriétés. Cette procédure est introduite en début d'année et sert de référence dans de nombreuses autres séances. Pourtant, dans certains cas, une autre décomposition, multiplicative, est plus pertinente. Ici, pour calculer 25×6 , il serait préférable d'utiliser les multiples connus de 25 et l'associativité et la commutativité de la multiplication ($25 \times 6 = (25 \times 2) \times 3 = 50 \times 3 = 150$).

PROCÉDURE

- Pour multiplier un nombre par ... :
- Je **décompose** la multiplication.
- Je fais séparément **les 2 multiplications**.
- Je fais **la somme** des 2 résultats.

EXEMPLE 26×6

$$26 \times 6 = 20 \times 6 + 6 \times 6$$
$$= 120 + 36$$
$$= 156$$

Sur l'ardoise, on écrit : $26 \times 6 = 120 + 36$
 $= 156$

Écrire 27×6 au tableau. Faire calculer collectivement en verbalisant les étapes de la procédure.

Travail individuel : faire calculer de la même manière : 18×6 ; 25×6 ; 13×6 ; 24×6 .

Corriger après chaque calcul.

J'ai appris

Quand on doit calculer $5 \times 18 \times 2$, par exemple, on peut calculer :
 $(5 \times 18) \times 2$ ou $(5 \times 2) \times 18$ ou $5 \times (2 \times 18)$.
Parfois un calcul est plus simple. Ici, par exemple, c'est $(5 \times 2) \times 18$.

2 Calcule.

$4 \times 18 \times 25$ $2 \times 19 \times 10$ $57 \times 2 \times 125 \times 4$ $500 \times 17 \times 2$
 $10 \times 15 \times 10$ $25 \times 9 \times 4$ $2 \times 83 \times 50$ $4 \times 37 \times 250$

3 Observe comment Mathieu calcule 32×25 ...



On sait que $4 \times 25 = 100$
et que $8 \times 4 = 32$.

Alors c'est facile :
 $32 \times 25 = 8 \times 4 \times 25$
 $= 8 \times 100$...

...et Mathilde 50×48 .



On sait que $50 \times 2 = 100$
et que $48 = 2 \times 24$.

Alors c'est facile :
 $50 \times 48 = 50 \times 2 \times 24$
 $= 100 \times 24$.

4 Calcule mentalement.

25×28 24×500 70×60 40×21
 30×40 60×20 40×25 50×16
 36×250 20×63 31×30 50×80

Figure 3. Extrait du chapitre n° 7 « Calcul mental de la multiplication » [23, p. 21].

Figure 4. Extrait du guide de l'enseignant, Totem mathématiques CM2 [24, p. 288], semaine 2B « Calcul automatisé : multiplications par 6 ».



La décomposition multiplicative apparaît sous une forme proche, bien plus tard dans l'année mais sans être hiérarchisée avec la précédente (figure 5).

Travail collectif : écrire 27×5 au tableau. Faire calculer par la PROCÉDURE connue, soit : $27 \times 5 = 100 + 35 = 135$. Rappeler la nécessité de mémoriser la somme intermédiaire ($100 + 35$). Présenter au tableau le calcul de 27×5 sous la forme $(a \times 10) : 2$, soit : $27 \times 5 = (27 \times 10) : 2$
 $= 270 : 2$
 $= 135$

Faire constater que le résultat est identique à celui trouvé par la procédure connue.
 Faire énoncer la règle suivante : « Pour multiplier par 5, je peux aussi multiplier par 10 puis diviser par 2. »
 Sur l'ardoise, on écrit toutes les étapes du calcul.

Figure 5. Extrait du guide de l'enseignant, Totem mathématiques CM2 [24, p. 362], semaine 22A « Calcul automatisé : multiplication par 5 d'un nombre inférieur à 100 ».

De plus, ce manuel propose des « recettes de calculs » (règle des zéros) s'appuyant sur des transformations gestuelles (« on écrit » « à droite » « à gauche »), qui ne permettent pas de rendre compte de l'égalité entre plusieurs écritures d'un même nombre (figure 6).

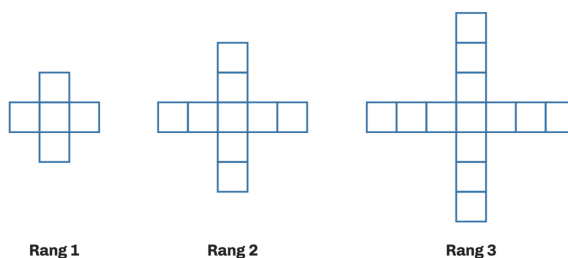
Travail collectif : écrire au tableau 70×4 . Rappeler que pour calculer le produit d'un multiple de 10 et d'un nombre à un chiffre on place d'abord un zéro à droite, et qu'ensuite on écrit le résultat du répertoire multiplicatif devant. Sur l'ardoise, on écrit : $70 \times 4 = 280$

Figure 6. Extrait du guide de l'enseignant, Totem mathématiques CM2, [24, p. 336], semaine 14C « Calcul automatisé : multiplication d'un nombre à deux chiffres par un nombre à un chiffre ».

Un exemple autour de la résolution de problèmes de généralisation

Les problèmes de généralisation ne figurent pas dans les programmes actuels³ de cycle 2 et de cycle 3. Seule l'étude des « suites organisées » au cycle 1 est mentionnée. Dans le guide *La résolution de problèmes mathématiques au collège* [25], le chapitre IV est entièrement dédié aux *patterns* et propose des problèmes de généralisation comme celui-ci (figure 7) :

Avec des petits carrés tous identiques, on construit un pattern selon le modèle évolutif ci-dessous :



- Dessiner l'élément du rang suivant et expliquer la règle.
- Déterminer le nombre de petits carrés des éléments du rang 5, du rang 10, du rang 17.
- Déterminer le nombre de petits carrés de l'élément du rang 100.
- Trouver un moyen de calculer rapidement le nombre de petits carrés d'un élément à n'importe quel rang.
- Existe-t-il un élément qui contient 532 petits carrés ? Un élément qui contient 813 petits carrés ?

Figure 7. Un problème de généralisation, dans le guide *La résolution de problèmes mathématiques au collège* [25, p. 112].

3. NDLR : programmes de 2015, consolidés en 2018. Le projet de programme de 2025, en revanche, mentionne dès le CM1, exemples à l'appui, l'étude de « suites de motifs ou de suites de nombres ».



Des exemples autour de la résolution de problèmes additifs et multiplicatifs

Le guide *La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen* [2] propose une représentation en bandes des problèmes additifs et multiplicatifs à introduire lors de leur résolution, comme dans la figure 8.

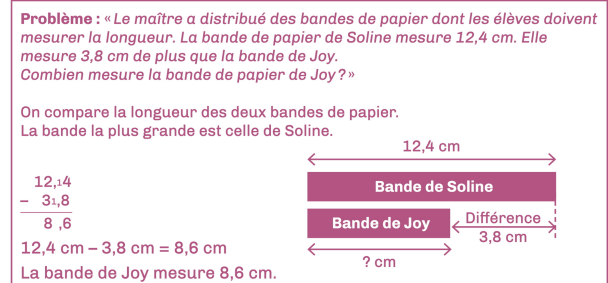


Figure 8. Un problème et sa représentation en bandes dans le guide *La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen* [2, p. 102].

Mais le guide n'exploite pas complètement l'intérêt des représentations en bandes puisqu'il suggère une solution arithmétique à partir du calcul de l'opération posée. Un autre type de résolution présentant la relation entre la mesure de la bande de Soline (12,4 cm) et celle de la bande de Joy (? cm) augmentée de 3,8 cm, conduit à l'égalité à trous : $? + 3,8 = 12,4$ que l'élève de cycle 3 sait résoudre.

Le guide pédagogique *Résoudre des problèmes au cycle 3* [26] propose un accompagnement à la résolution de problèmes additifs et multiplicatifs qui développe les liens entre l'énoncé, la relation schématisée par des bandes et la relation décrite par une égalité à trous nommée « calcul en ligne » (figure 9). La complémentarité entre calcul mental et résolution de problèmes accompagne ce travail.

Récapitulatif de la relation de l'énoncé, du schéma et du calcul en ligne

• Énoncé

Chaque semaine, Marco parcourt 288 km pour aller au travail. Solène habite plus près, elle parcourt six fois moins de distance.
Quelle distance parcourt Solène par semaine ?

• Schéma



• Calcul en ligne

$? \times 6 = 288$
 $288 : 6 = ?$

Figure 9. Extrait du guide pédagogique *Résoudre des problèmes au cycle 3*, [26, p. 61].

En conclusion, nous avons mis en évidence plusieurs aspects mathématiques à travailler dès l'école primaire pour favoriser l'entrée dans l'activité algébrique au cycle 4 : d'une part la prise en compte de l'égalité comme relation d'équivalence, des différentes écritures d'un nombre et d'une expression numérique, des caractères structural et procédural d'une expression numérique et, d'autre part, la résolution de problèmes de généralisation et de problèmes additifs et multiplicatifs. Les programmes et les documents d'accompagnement prennent davantage en compte ces différents aspects. À partir d'exemples, nous avons mis en évidence des potentialités et des limites de certaines ressources d'enseignement.

Références

- [1] Ministère de l'Éducation nationale. « Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4) ». In : *Bulletin officiel spécial* n° 10 (2015).
- [2] Ministère de l'Éducation nationale. *La résolution de problèmes mathématiques au cours moyen. Les guides fondamentaux pour enseigner*. . 2022.
- [3] L.-M. Ninnin et F. Salles. « Cedre 2008-2014-2019 Mathématiques en fin de collège : des résultats en baisse. » In : *Note d'information*, 20-34 (2020). p. 1-4.
- [4] J. Pilet et B. Grugeon-Allys. « L'activité numérique-algébrique à la transition entre l'arithmétique et l'algèbre ». In : *Éducation et didactique* n° 15(2) (2021). p. 9-26.



- [5] G. Vergnaud. « Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre ». In : *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage, 1988.
- [6] C. Kieran. « The learning of school algebra ». In : *The Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Sous la dir. de D. A. Grouws. Macmillan, 1992, p. 390-419.
- [7] C. Kieran et al. *Early algebra. Research into its nature, its learning, its teaching*. Springer, 2016.
- [8] L. Radford. « The Progressive Development of Early Embodied Algebraic Thinking ». In : *Mathematics Education Research Journal* n° 26(2) (2013). , p. 257-277.
- [9] C. Kieran et C. Martínez-Hernández. « Structure sense at early ages: The case of equivalence of numerical expressions and equalities ». In : *Algebra Structure Sense Development amongst Diverse Learners*. Sous la dir. de T. Rojano. Routledge, 2022, p. 35-66.
- [10] D. Butlen et M. Pézard. « Le rôle du calcul mental dans la connaissance des nombres, des opérations et dans la résolution de problèmes ». In : *Repères-IREM* n° 41 (2000), p. 5-24.
- [11] D. Butlen et M. Pézard. « Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté ». In : *Grand N* n° 79 (2007), p. 3-32.
- [12] C. Piolti-Lamorthé et S. Roubin. « Le calcul réfléchi : entre sens et technique ». In : *Bulletin APMEP* n° 488 (2010), p. 272-280.
- [13] J.-P. Drouhard. « Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire ». Thèse de doctorat. Paris : Université Paris 7 Denis-Diderot, 1992.
- [14] G. Frege. *Écrits logiques et philosophiques*. Trad. par C. Imbert. Éditions du Seuil, 1971.
- [15] A. Sfard. « On the dual nature of mathematics conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin ». In : *Educational Studies in Mathematics* n° 22 (1991), p. 1-36.
- [16] C. Piolti-Lamorthé, S. Roubin et J. Trgalova. « Des patterns dans les classes ! » In : *Au fil des maths* (2023).
- [17] H. Adihou A. and Squalli et al. « Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison ». In : *Actes du colloque de l'Espace Mathématique Francophone (EMF)*. Sous la dir. de L. Theis. Université d'Alger. Alger, 2015, p. 206-219.
- [18] R. Duval. « Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée ». In : *Annales de didactiques et de sciences cognitives* n° 5 (1993), p. 37-65.
- [19] J. Pilet et B. Grugeon-Allys. « Quelles potentialités du calcul en ligne dans l'enseignement primaire en France pour favoriser une entrée précoce dans l'algèbre ? » In : *Le développement de la pensée algébrique à l'école primaire et au début du secondaire. Recherches et perspectives curriculaires*. Sous la dir. de Squalli.  Livres en ligne du CRIRES, 2020.
- [20] J. Pilet et B. Grugeon-Allys. « L'activité numérique-algébrique dans des manuels scolaires français de primaire : le cas du calcul réfléchi multiplicatif ». In : *Revue Québécoise De Didactique Des Mathématiques* n° 4-33 (2022). , p. 9-26.
- [21] Ministère de l'Éducation nationale. *Le calcul aux cycles 2 et 3*.  2016.
- [22] Ministère de l'Éducation nationale. *Le calcul en ligne au cycle 3*.  2016.
- [23] R. Brissiaud et al. *J'apprends les maths, CM2*. Retz, 2017.
- [24] C. Henaff et al. *Totem mathématiques CM2*. Retz, 2019.
- [25] Ministère de l'Éducation nationale. *La résolution de problèmes mathématiques au collège. Les guides fondamentaux pour enseigner*.  2021.
- [26] C. Allard et S. Cavelier. *Résoudre des problèmes au cycle 3*. Nathan, 2020.
- [27] C. Hugot, L. Malrieu et V. Bernigole. « Développer le calcul réfléchi chez les élèves de cycle 4 ». In : *Repères-IREM* n° 129 (2022). , p. 7-28.

Brigitte Grugeon-Allys est professeure émérite en didactique des mathématiques à l'université Paris-Est-Créteil (Laboratoire de Didactique André Revuz — LDAR).

Julia Pilet est maîtresse de conférence en didactique des mathématiques à l'université Paris-Est-Créteil (Laboratoire de Didactique André Revuz — LDAR).

brigitte.grugeon-allys@u-pec.fr
julia.pilet@u-pec.fr

© APMEP mars 2025



Sommaire du n° 555



Algébriquement vôtre

Éditorial

Opinions

- ✦ Représentations en barres et entrée dans l'algèbre
Richard Cabassut 3
- ✦ Des chiffres et des lettres
S. Grau & Groupe collège de l'IREM Pays de la Loire 8
- ✦ Vers le calcul littéral en cycle 3
Brigitte Grugeon-Allys & Julia Pilet 15
- ✦ La pensée arithmético-algébrique
F. Hitt, J. C. Cortés, S. Quiroz Rivera & M. Saboya 23

Avec les élèves

- Châteaux forts, un projet coopératif
Sonia Besler & Claire Piolti-Lamorte 33
- Histoire du système métrique
Daniel Fischer & Florence Soriano-Gafiuk 39
- Les fractales, de l'infini vers l'art
Stéphane Mouez 49
- ✦ Vers l'algèbre, en douceur
Jean Toromanoff 55

1 Ouvertures

- L'odyssée du sinus, première partie
Ivan Boyer & Karim Zayana 59
- Un guide-âne pour les amateurs de son
Renaud Dehaye 66

Récréations

- Au fil des problèmes
Frédéric de Ligt 70
- Des problèmes dans nos classes
Valérie Larose 73
- ✦ Trouver X (et Y)
Sébastien Reb 75

Au fil du temps

- ✦ Du mot à la lettre : x n'est pas la chose
Marie-Line Moureau 78
- Matériaux pour une documentation 83
- ✦ Résolution d'une équation du 2^e degré par Fibonacci
Michel Sarrouy 87
- Hommage à Jacques Verdier
Daniel Vagost & Christiane Zehren 93



CultureMATH

