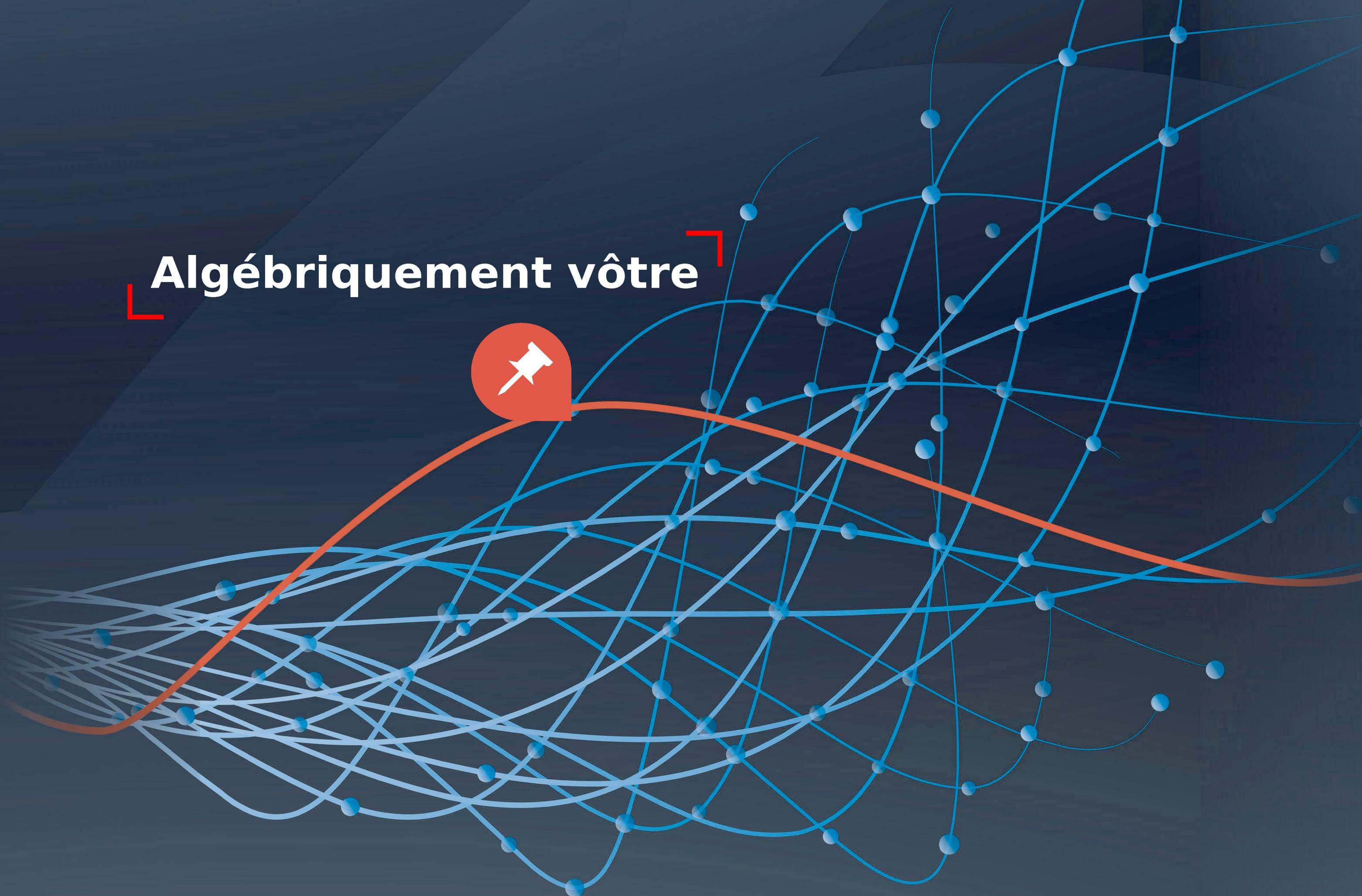
Le bulletin de l'APMEP - N° 555

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Janvier, février, mars 2025

Algébriquement vôtre



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :

https://afdm.apmep.fr

Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : mars 2025. ISSN : 2608-9297.

Impression : iLLiCO by L'ARTÉSIENNE

ZI de l'Alouette, Rue François Jacob, 62800 Liévin

Des chiffres et des lettres

Introduire l'algèbre et l'utilisation des lettres peut être périlleux au collège, aussi un groupe IREM des Pays de la Loire a réfléchi aux difficultés rencontrées et propose ici des activités permettant d'éviter certains écueils ! On vous laisse tester !

S. Grau & Groupe collège de l'IREM Pays de la Loire

Lorsqu'on interroge les élèves de lycée sur leur pire souvenir lié aux mathématiques, la réponse la plus fréquente est associée à l'entrée dans l'algèbre souvent réduite à l'introduction des équations. Si la même question est posée à des adultes, nous obtenons les mêmes réponses. L'appréhension devant le calcul algébrique semble se transmettre de génération en génération. Le groupe collège de l'IREM des Pays de la Loire [1] a proposé aux élèves de différents collèges de travailler avec des pictogrammes pour remplacer les lettres. Nous voulions, au travers de cette expérimentation, vérifier si le simple fait d'utiliser un autre moyen de désignation des nombres inconnus provoquait un apprentissage différent chez certains élèves.

D'où provient cette peur de la lettre ?

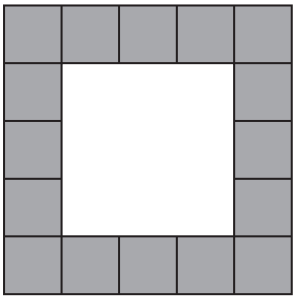
Le calcul algébrique se caractérise par le fait qu'il permet d'effectuer des opérations et des transformations d'expressions dans lesquelles interviennent des nombres non connus. Les lettres vont alors désigner ces nombres et il devient possible de résoudre des problèmes en effectuant des traitements sur ces nombres comme s'ils étaient connus (ce que Radford appelle l'analycité [2]).

L'algèbre doit alors être pensée du point de vue d'une continuité de l'arithmétique (avec ses propriétés de calcul, comme par exemple la distributivité de la multiplication sur l'addition) mais aussi du point de vue de ses ruptures avec l'arithmétique.

Une rupture vient du sens du signe égal. Les élèves peuvent utiliser le signe « = » pour assigner, désigner. L'égalité se lit alors dans le sens de lecture usuel, de gauche à droite « pour $x = 4$ ». En arithmétique, ils peuvent utiliser le signe « = » pour signifier « donne comme résultat », ce qui peut entraîner une lecture de l'égalité de la gauche vers la droite, le membre de droite indiquant le résultat. Pour éviter cette rupture, les élèves apprennent dès le primaire à utiliser l'égalité pour indiquer que deux expressions désignent la même valeur. Ils peuvent être habitués à utiliser des écritures de la forme $2+6=4+4$. Un saut doit cependant être effectué pour qu'ils comprennent le sens d'une écriture du type : $3(x+2) = 3x+6$, où le membre de droite, s'il résulte d'un traitement du membre de gauche ne peut pas être considéré comme un résultat et présente des opérations impossibles à effectuer. Cet obstacle peut expliquer que certains élèves cherchent à tout prix à effectuer un calcul pour faire disparaître le signe opératoire du membre de droite en proposant par exemple 9 ou $9x$. Lorsque j'écris $3x + 6$, j'écris un nombre, mais une opération reste visible, alors qu'en arithmétique un résultat peut toujours s'écrire sous la forme d'une écriture chiffrée.

En algèbre, une égalité prend une valeur de vérité qu'il peut s'agir de déterminer ou sur laquelle on s'appuie pour démontrer ou pour résoudre des équations. L'égalité peut ainsi être considérée comme une équivalence, elle se lit dans les deux sens. Cela suppose de veiller à ne pas enchaîner des égalités en particulier lors de la résolution de problèmes à plusieurs étapes.

Enfin, en algèbre, une expression peut être procédurale (permettre un calcul) ou structurale (montrer un agencement), l'attention aux structures devient donc essentielle. Par exemple dans l'exercice des carrés bordés, il s'agit de déterminer le nombre de carreaux pour entourer un carré, sur le modèle ci-dessous, quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré.



Écrire que le nombre de carreaux sur les bords est $n + (n - 1) + (n - 1) + (n - 2)$ montre une structure additive correspondant à une procédure consistant à déterminer le nombre de carreaux sur un côté, puis le nombre de carreaux sur les côtés adjacents, en parcourant le contour de la figure. Écrire que ce nombre est $4n - 4$ revient à utiliser une autre structure correspondant cette fois à la procédure consistant à ajouter quatre fois le nombre de carreaux sur un côté et à retirer les quatre carreaux des coins qui ont été comptés deux fois. Ainsi, ces deux expressions permettent un même calcul mais montrent des procédures différentes.

Avant les programmes scolaires de 2000, l'algèbre était introduite comme un prolongement de l'arithmétique à travers des mises en équation. Les ruptures avec l'arithmétique n'étaient pas explicitées. Les enseignants peinaient à introduire la nécessité de ces mises en équation du fait que l'arithmétique était suffisante pour résoudre les problèmes posés en classe de mathématiques au collège. Par exemple, pour résoudre le problème « *Deux menus différents ont été offerts à la cafétéria pour le déjeuner. On a servi 3 fois plus d'hamburgers que de pizzas. 212 repas ont été servis. Combien a-t-on servi d'hamburgers et de pizzas ?* », on peut se représenter la part des pizzas parmi les repas servis et comprendre que celle des hamburgers est égale à 3 fois la part des pizzas, soit 4 parts en tout. On divise alors 212 par 4 et le résultat est le nombre de pizzas servies, on multiplie ce résultat par 3 pour obtenir le nombre de repas de hamburgers servis. Exiger une solution algébrique peut alors revenir à imposer un nouveau langage qui ne se révèle pas plus efficace aux yeux d'élèves relativement à l'aise avec le calcul arithmétique[1]. Face à cette difficulté, la réflexion dans les IREM a porté sur d'autres contextes pouvant rendre nécessaire le passage par l'algèbre. Avec le problème des carrés bordés naît une nouvelle classe de problèmes (aujourd'hui on parle des problèmes de patterns) pour lesquels l'algèbre apporte les outils nécessaires à la généralisation et à la démonstration. Cette nouvelle approche met les structures et les transformations au cœur des préoccupations. La focale n'est plus portée sur la lettre censée désigner une inconnue mais bien sur les structures opératoires qui lient différents nombres entre eux. De très nombreux travaux en didactique des mathématiques vont essayer de définir ce qu'est la pensée algébrique, amenant la création en 2013 d'un « observatoire international de la pensée algébrique » (OIPA). Le courant du *Earlyalgebra*[2] étudie le

1. Voir les travaux de Bednarz.
2. Cf. p 15 à 22.

développement de cette pensée algébrique avant l'introduction de la lettre ▶. En particulier, il vise à développer la formalisation de règles, lors du travail sur des algorithmes dès la maternelle ou la résolution par des schémas en barres aux cycles 2 et 3, afin d'amener l'idée de généralisation et de calcul avec des nombres inconnus comme s'ils étaient connus.

Différents usages de la lettre en mathématiques

Les lettres ont donc un rôle crucial en algèbre mais elles interviennent aussi hors de ce cadre et les élèves les rencontrent très tôt dans leur scolarité. Voyons ensemble dans quels contextes et pour quels usages.

La lettre unité de mesure

La lettre permet de spécifier une unité. Lors de mesures de grandeurs, elle peut désigner l'unité par la lettre u, mais aussi une unité du système métrique comme m pour désigner le mètre ou L pour désigner le litre. Elle apparaît après une écriture chiffrée qui désigne le nombre d'unités. Les élèves ont ainsi pris l'habitude d'écrire $5\,u$ pour mesurer la longueur d'une bande de papier avec une bande de papier unité dont la longueur est $1\,u$. Dès ce stade, le chiffre 1 peut être oublié et il n'est pas rare de désigner la longueur de la bande unité uniquement par la lettre u. Dans ce cas, la lettre u ne désigne plus l'unité mais la longueur de la bande unité.

Certaines règles de calcul sont alors implicitement mobilisées. Par exemple on écrira que $5\,u + 2\,u = 7\,u$ dans l'idée qu'on compte le nombre d'unités « en tout ». Il n'est pas question ici de factorisation. Cependant on peut illustrer le calcul par l'expérience sensible du fait que pour mesurer une longueur avec la bande étalon, on la reporte autant que nécessaire donc $5\,u$ désigne bien $u + u + u + u + u$ et $5\,u + 2\,u$ désigne bien cinq reports de la bande étalon et encore deux, ce qui fait sept fois la bande étalon. L'écriture est cependant ambiguë car u ne désigne pas toujours une unité (la bande mesure 7 dans l'unité u) mais bien une mesure de longueur (la bande mesure 7 fois la mesure de longueur u). On comprend ici que très tôt, la lettre peut désigner des objets mathématiques de natures différentes sans que cela soit explicité aux élèves. Le discours « 5 pommes + 2 pommes font 7 pommes » n'est qu'une reprise de ce qui vient d'être dit, l'unité choisie étant la « pomme ». Le problème est que ce genre de discours n'est pas celui attendu en algèbre. Lorsque les élèves doivent réduire $5x + 2x$, la lettre x ne désigne pas une unité et l'oubli du signe de la multiplication cache la structure « somme de deux produits » qui permet la factorisation de x, x désignant un nombre ou même une mesure dans une unité choisie.

La lettre grandeur

Les élèves ont aussi rencontré la lettre pour désigner une grandeur. Ainsi dans les formules de calcul d'aires et de périmètres, la lettre L peut désigner la longueur de n'importe quel rectangle. La lettre permet donc de généraliser et le quantificateur « quelle que soit L la longueur d'un rectangle » reste implicite. On a donc une différence entre le u vu plus tôt qui désigne la longueur d'une bande unité spécifique et le L qui désigne ici la longueur de n'importe quel rectangle. Dans le cas des grandeurs, la lettre est souvent l'initiale de la grandeur désignée, avec parfois un codage implicite lié à la casse ou la police (par exemple la lettre L majuscule représente le plus grand côté du rectangle et le $\mathscr{A}$ en écriture cursive désigne une aire).

Mais, dans les formules, la lettre peut aussi être considérée comme désignant une mesure de cette grandeur (donc un nombre et une unité). Un autre implicite concerne alors les unités de mesure des grandeurs. Par exemple dans la formule $\mathscr{A} = \mathrm{L} \times \mathrm{l}$, on considère implicitement que les mesures de longueurs sont exprimées dans la même unité qui elle-même doit correspondre à l'unité dans laquelle est exprimée l'aire. On peut questionner le sens que l'élève donne à ces formules où les lettres désignent plus des objets géométriquement perçus (les longueurs des côtés d'un rectangle ici) que des mesures de grandeurs.

Par ailleurs, le statut de ces formules va évoluer au cours de la scolarité : « *Dans une formule d'aire, une lettre pourra désigner une inconnue, une variable ou un nombre généralisé selon le regard que l'on porte sur cette formule, selon l'usage que l'on veut en faire, selon la question que l'on se pose.* » [3] Ainsi, une lettre peut désigner un nombre indéterminé (lettre pouvant être remplacée par n'importe quelle valeur comme a et b dans l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$), une variable (comme x dans $f(x) = 2x+3$), une inconnue (dans une équation) ou un paramètre (par exemple a pour désigner le coefficient directeur dans l'équation de la droite $y = ax$). Seul le contexte permet parfois de l'interpréter.

La lettre comme étiquette

On retrouve encore la notion d'unité lorsque l'élève découvre le système de numération décimal de position.

On décompose $253 = 2\times100+5\times10+3\times1$ qui peut alors s'écrire $2c+5d+3u$ où les lettres u, d et c désignent respectivement les unités, dizaines et centaines d'unités simples. Reportées dans des tableaux, les lettres servent alors à désigner le rang dans l'écriture du nombre. Elles seront utilisées en particulier pour généraliser les algorithmes de calcul posé.

D'autres lettres sont encore utilisées pour désigner des nombres qui ont un statut particulier. Par exemple les lettres q et r seront utilisées pour désigner le quotient et le reste dans la division euclidienne. Elles sont utiles du fait que la division euclidienne ne renvoie pas un seul résultat mais deux, organisés dans une expression dont la structure est la somme de deux termes dont un est un produit. Le dividende est alors égal à la somme du produit du diviseur par le quotient et du reste. C'est une première rencontre avec un nombre écrit sous la forme d'une expression dont la structure doit être reconnue pour pouvoir l'interpréter. La lettre est donc utilisée pour indiquer la place du nombre dans l'expression dont la structure est de la forme $\circ\times\circ+\circ$.

Les lettres étiquettes ont ainsi comme fonction d'attribuer un sens à la place qu'elles occupent dans un ensemble plus vaste de signes (expression, tableau, ensemble, etc.).

Les lettres servent aussi d'étiquette en géométrie, elles servent à désigner des points, des segments, des droites, des polygones…

Expérimentations

État des lieux

Nous avons proposé les douze égalités ci-dessous à des élèves de Cinquième en leur demandant de justifier si ces égalités étaient toujours vraies, parfois vraies ou jamais vraies.

$x-8{,}2 = 10$	$a+a+a = 3a$
$12+y = 4$	$4z+3 = 7z$
$3x = 2$	$4x+2x = 6x$
$3x+8 = 3x+12$	$2b+6 = 2(b+3)$
$a = 3$	$9n = 0$
$y^2 = y\times2$	$2\times k\times3k = 6k^2$

Pour l'égalité $y^2 = y\times2$, certains élèves répondent que l'égalité est parfois vraie et ils le justifient avec un exemple pour lequel elle est vraie ($2^2 = 2\times2$) et un autre pour lequel elle est fausse ($1^2 \neq 1\times2$) ; quand d'autres répondent qu'elle est fausse parce que $y^2 = y\times y$ alors que $2y = y+y$. Les premiers raisonnent en termes d'inconnues « existe-t-il un nombre y tel que l'égalité est vraie (respectivement fausse) ? » quand les seconds raisonnent en termes de nombres généralisés : « a-t-on, pour tout nombre y, $y^2 = 2y$? »

Travailler la valeur de vérité des égalités avec les élèves permet de lever les implicites et de mettre en évidence des paradoxes qui rendent nécessaire d'aller jusqu'à la preuve.

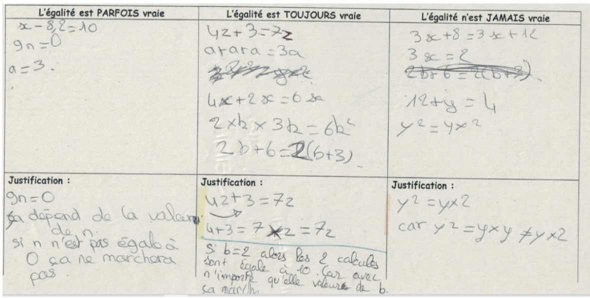


Figure 1. *Production d'un élève en fin de Cinquième.*

Cette activité permet par ailleurs de préciser les quantificateurs. Dans l'exemple (fig. 1), l'élève écrit que $9n = 0$ est parfois vraie parce que « *ça dépend de la valeur de n. Si n n'est pas égal à 0, ça ne marchera pas* ». L'utilisation des mots « dépend de », « n'importe » et les structures « si … alors … » sont autant de marqueurs d'un raisonnement qui tient compte des quantificateurs, de la nécessité d'une démonstration dans le cas général pour attester qu'une égalité est vraie, ou d'un seul contrexemple comme condition suffisante pour dire qu'elle n'est pas toujours vraie.

La même consigne a été donnée à des élèves de Sixième en proposant des étiquettes sur lesquelles figuraient des expressions utilisant des pictogrammes à la place des lettres (fig. 2).

<table>
<tr><td colspan="2">côté + côté + côté + côté = 4 × côté</td></tr>
<tr><td>☺ + ☺ + ☺ = 3 618</td><td>♢ + ♡ = ♡ + ♢</td></tr>
<tr><td>diamètre = 2 × rayon</td><td>☺ + ☺ = ☺ × ☺</td></tr>
<tr><td colspan="2">périmètre d'un carré = périmètre d'un triangle équilatéral</td></tr>
<tr><td>5 cts = 0,5 €</td><td>$0{,}23 = \dfrac{230}{1\,000}$</td></tr>
<tr><td>3 h 10 min = 310 min</td><td>☺ + ☺ = 7</td></tr>
</table>

Figure 2. *Extrait de la liste des étiquettes à classer en Sixième.*

On voit dans les productions qu'un même pictogramme est implicitement interprété comme remplaçant une même valeur (voir fig. 3). Ceci atteste qu'un certain usage du signe pour désigner un nombre inconnu est déjà installé.

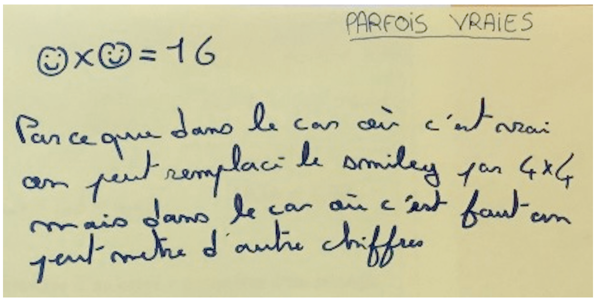


Figure 3. *Production d'un élève de Sixième.*

Il est alors possible de mettre en évidence certaines propriétés des opérations, toujours en utilisant des pictogrammes (par exemple on pourra amener les élèves à formuler la commutativité de la multiplication comme justification du fait qu'une égalité est toujours vraie).

Des pistes pour penser l'entrée dans l'algèbre

Les nombreux travaux réalisés ces dernières années montrent que les élèves peuvent très précocement développer une pensée algébrique [4] et qu'ils fréquentent très tôt dans leur scolarité des écritures algébriques. Par contre, cet usage de la lettre n'est que très peu explicité et reste encore trop souvent une simple désignation. Outre l'expérimentation sur les valeurs de vérité des égalités, nous avons essayé de penser une progressivité autour d'un rituel : « les nombres en boîte ». L'idée initiale était d'avoir une vraie boîte dans laquelle l'enseignant cache un nombre écrit sur une feuille. Les élèves doivent trouver ce nombre à partir d'indices donnés sous formes d'égalités. La boîte dessinée dans les égalités figure la boîte réelle posée sur le bureau et la validation se fait par ouverture de la boîte et contrôle du nombre écrit sur le papier.

Sauras-tu retrouver le (ou les) nombre(s) que le professeur a caché(s) dans les différents solides ? Voici un indice pour t'y aider :

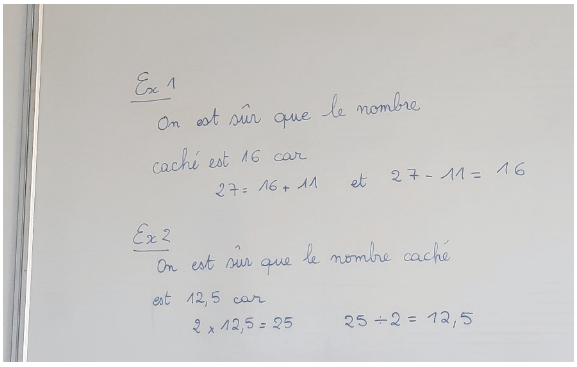


Figure 4. *Nombre en boîte (phase 1).*

Les premières situations sont relativement simples mais chaque réponse est justifiée collectivement au tableau (fig. 4). Très vite les indices peuvent se complexifier, amenant à étudier des cas où il n'y a pas de solution, et d'autres ou potentiellement il pourrait y en avoir une infinité (fig. 5 et fig. 6).

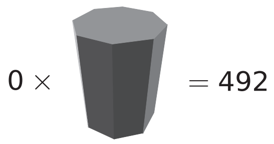


Figure 5. *Nombres en boîte (phase 7).*

Le bilan permet d'écrire : « Aujourd'hui il n'y a rien dans la boîte. Quand on multiplie par 0, on obtient toujours 0, l'égalité n'est jamais vraie. »

Ces rituels attestent d'une secondarisation [5] : si le contrôle par ouverture de la boîte est indispensable au début, les élèves disent que ce n'est plus nécessaire ensuite car *« on en est sûr »*. Dans le cas où il existe une infinité de solutions, l'enseignant doit expliquer qu'il n'a pas pu cacher une infinité de nombres mais cela ne gêne pas les élèves qui raisonnent déjà sur une situation abstraite et non plus sur la boîte matérielle.

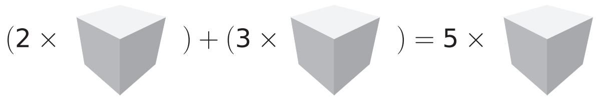


Figure 6. *Nombres en boîte (phase 8).*

Les réponses proposées par les élèves ont été : 0 ; 1 ; 2 ; 5 ; 9 ; *« plein »* ; *« tous les nombres »* ; *« les multiples de* 5 *»* ; *« il y en a à l'infini ! »*. Les élèves cherchent à expliquer *« c'est parce que* 2 *fois le cube plus* 3 *fois le cube, on peut faire* 2 + 3 *et ça fait* 5 *fois le cube »* et à conclure : *« On aurait pu mettre un seul papier avec le signe de l'infini. »*

Dans la suite de l'expérimentation, il a été demandé aux élèves de donner leur réponse par écrit. Dans ces productions, on remarque que le nombre inconnu est remplacé par un symbole (triangle pour désigner la boîte pyramidale par exemple, ou un carré pour la boîte cubique), mais aussi un point d'interrogation ou des points de suspension. La justification s'appuie sur des faits numériques et des opérations. Les élèves prennent l'habitude de tester des valeurs (comme 1, 2 ou 0) et s'appuient sur le résultat pour faire des hypothèses. Il n'est pas toujours simple pour les élèves de formaliser une conclusion. Les traces montrent cependant des raisonnements intéressants comme par exemple le cas de l'équation $x + x = x$ (fig. 7) pour laquelle un élève fait le calcul pour 1 et conclut que si $1 + 1 = 2$ cela ne peut pas être 1 et *« donc c'est* $0 : 0 + 0 = 0$ ». Il serait intéressant de profiter de ces situations pour introduire des raisonnements algébriques du genre « ajouter 1 à un nombre entier revient à prendre le nombre entier qui suit ».

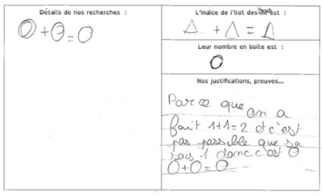


Figure 7. *Production individuelle – nombres en boîte (phase 10).*

Une autre expérimentation en cours vise un travail explicite des structures. Les élèves sont amenés à écrire les structures des expressions numériques avant de chercher à les calculer en écrivant successivement les structures obtenues à chaque étape de calcul, sans faire apparaître les nombres. L'objectif est d'amener les élèves à ne pas s'intéresser aux nombres mais bien aux relations entre ces nombres. Dans ces écritures de structures, les nombres sont tous remplacés par un point. L'important est de formaliser à chaque étape la propriété permettant d'effectuer le traitement. L'enjeu est d'amener les élèves à développer un discours sur les traitements effectués et une représentation schématisée des structures leur permettant d'assurer un contrôle au cours du traitement (fig. 8).

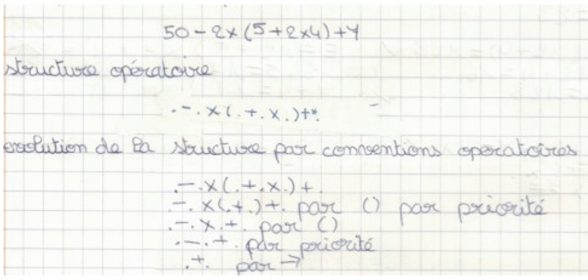


Figure 8. *Traitement par structures opératoires en Cinquième.*

Conclusion

Le développement de la pensée algébrique chez les élèves peut s'effectuer relativement tôt dans la scolarité au travers d'activités de généralisation amenant un travail sur les structures des expressions, qu'elles soient numériques ou algébriques. Une formalisation explicite du rôle de la lettre et des propriétés des différentes opérations vise à faire de l'algèbre un outil pour démontrer rendu nécessaire du fait que les phénomènes observés sont généralisés. Les quantificateurs sont exprimés en langage naturel par des expressions comme « toujours », « n'importe quel », « tous » alors qu'un contrexemple peut suffire à attester qu'une affirmation n'est pas toujours vraie. Notre groupe IREM continue d'expérimenter, nous cherchons comment mesurer l'effet de ces enseignements sur les apprentissages des élèves au collège. Le fait que les élèves adhèrent, participent et prennent plaisir à faire ces activités est déjà un résultat encourageant qui montre que ces activités ont modifié le regard que portent les élèves sur l'activité algébrique.

Références

[1] A. Arneault et al. « La lettre au collège : expérimentations par le groupe Collège de l'IREM des Pays de Loire ». In : *Actes du XXIXᵉ colloque CORFEM, Nantes* (2023).

[2] I. Demonty, A. Fagnant et J. Vlassis. « Le développement de la pensée algébrique : Quelles différences entre les raisonnements mis en place par les élèves avant et après l'introduction de l'algèbre ? » In : *Actes du colloque EMF 2015* (2015). , p. 265-280.

[3] S. Tremblay, E. Polotskaia et V. Passaro. « Réflexion autour du rôle du symbolisme littéral dans le développement de la pensée algébrique au primaire. » In : *Revue québécoise de didactique des mathématiques* nº 2 (2021). , p. 78-109.

[4] C. Piolti-Lamorthe et S. Roubin. « Vers la pensée algébrique ». In : *Les Cahiers Pédagogiques* nº 573 (décembre 2021). .

[5] M. Jaubert et M. Rebière. « Pratiques de reformulation et construction de savoirs ». In : *ASTER : Recherches en didactique des sciences expérimentales* nº 33 (2001). , p. 81-110.

Le groupe collège de l'IREM des Pays de la Loire est composé de professeurs de collège de l'académie (Anne Arneault, Thierry Baron, Badri Belhaj, François Guérineau, Franck Bernard, Christian Judas, Vincent Le Glaunec et Céline Sauvètre) et de Sylvie Grau, maîtresse de conférences en didactique des mathématiques. Il travaille depuis septembre 2020 la question de l'introduction du calcul littéral au collège.

sylvie.grau@univ-nantes.fr

Sommaire du nº 555

Algébriquement vôtre