

Le bulletin de l'APMEP - N° 554

# AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Octobre, novembre, décembre 2024

**Mathématiques en histoire(s)**



# APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

# ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

*Au fil des maths*, c'est aussi une revue numérique augmentée :

<https://afdm.apmep.fr>



Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à [aufildesmaths@apmep.fr](mailto:aufildesmaths@apmep.fr)

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN [mcgenin@wanadoo.fr](mailto:mcgenin@wanadoo.fr)

## ÉQUIPE DE RÉDACTION

**Directrice de publication** : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

**Responsable coordinatrice de l'équipe** : Cécile KERBOUL.

**Rédacteurs** : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Thomas VILLEMONTÉIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Nada DRAGOVIC, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Agnès VEYRON.

**Illustrateurs** : Éric ASTOUL, Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL, Olivier LONGUET.

**Équipe TeXnique** : Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Benoît MUTH, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Anne-Sophie SUCHARD.

**Maquette** : Olivier REBOUX.

**Correspondant Publimath** : François PÉTIARD.

**Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.**

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : décembre 2024. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau



# Leibniz, du génie à l'homme, de l'homme au génie

*À partir de différentes tranches de vie de Leibniz, l'article montre combien la dimension humaine est présente dans la construction des mathématiques. Plus précisément, il s'intéresse à une querelle, tenace et acerbe, entre Newton et Leibniz, ouvrant ainsi la voie à des échanges avec les élèves sur des questions relevant de l'éducation morale et civique.*

**Florence Soriano-Gafiuk & Manuella Freyermuth**

## Introduction

La littérature scientifique révèle tout l'intérêt de l'intégration de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement des disciplines scolaires [1]. Elle montre notamment l'importance de faire comprendre aux élèves que les mathématiques ne se présentent pas comme un produit abouti, mais qu'elles ont au contraire été construites au fil des siècles, ne cessant encore de s'enrichir, chaque jour passant, par une centaine de milliers de mathématiciens dans le monde. L'histoire des mathématiques offre par ailleurs une « approche pluridisciplinaire fructueuse » [1, §26], mais aussi et surtout elle offre aux enseignants « un terrain où les mathématiques cessent de jouer le rôle de monstre froid qui normalise, juge et condamne pour être rétablies dans leur statut d'activité culturelle indissociable des autres pratiques humaines » [1, §2]. L'objectif de cet article est de rappeler que si les mathématiques ne sont effectivement pas un « monstre froid », les mathématiciens ne sont, quant à eux, pas des êtres dénués de sensibilité, d'émotions et de sentiments, mais bien de véritables personnes qui, comme tout un chacun, sont confrontées aux aléas de la vie. Pour illustrer ceci, nous avons opté pour le récit de tranches de vie du philosophe et mathématicien allemand, Gottfried Wilhelm Leibniz. Ce choix est doublement motivé : Leibniz est souvent

dépeint dans la littérature comme un « génie universel », mais est aussi plus tristement connu pour sa « longue et âpre querelle » avec le physicien et mathématicien anglais, Isaac Newton [2, p. 67]. Cette approche pédagogique par l'humain ouvre ainsi la porte à des débats en classe sur l'importance d'éviter au mieux les conflits tant les dégâts peuvent parfois dépasser tout ce qu'il aurait été possible d'imaginer.

Les textes et activités proposés s'adressent à des élèves de CM1-CM2-Sixième-Cinquième. Les apports historiques se présentent sous des formes simplifiées et ne visent aucune exhaustivité. L'ensemble a par ailleurs été testé dans la classe de Cinquième section biculturelle allemand de Manuella Freyermuth, au collège Jean-Jacques Kieffer de Bitche (57). Le groupe était très hétérogène.

## Biographie simplifiée de Leibniz

La séance débute par la lecture de la biographie simplifiée de Leibniz qui a été composée à partir des différentes références bibliographiques mentionnées à la fin de cet article, ainsi que des archives de la *Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek*.



## Jeunesse

Gottfried Wilhelm Leibniz est né le 1<sup>er</sup> juillet 1646 à Leipzig, une ville de l'Est de l'Allemagne. Son père, qui est juriste et professeur de philosophie, l'abreuve très vite de nombreux récits. Le jeune Leibniz est en effet un enfant précoce. À l'âge de 4 ans, il sait déjà lire. À 7 ans, il est scolarisé à la *Nikolaischule* de Leipzig, mais passe aussi beaucoup de temps dans l'importante bibliothèque de son père, où il apprend en autodidacte.

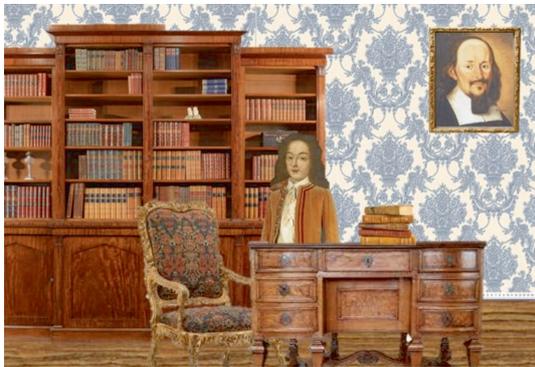


Figure 1. Le jeune Leibniz dans la grande bibliothèque de son père (montage photographique).

## Carrière professionnelle

Après des études de droit, Leibniz s'intéresse aux affaires publiques. C'est ainsi qu'à 26 ans, il est envoyé à Paris<sup>1</sup> par le baron de Boynebourg, pour une mission diplomatique auprès du roi de France Louis XIV. Leibniz profite de son séjour à Paris pour rencontrer les grands savants de l'époque. C'est durant cette période qu'il approfondit sa connaissance des mathématiques et de la physique sous l'égide du scientifique néerlandais Christian Huygens.

De retour en Allemagne, Leibniz devient bibliothécaire et conseiller de la maison de Hanovre, une dynastie royale allemande ; il occupera durant 40 ans cette fonction. Leibniz voyage beaucoup et fréquente les plus grands esprits de l'époque. Il entretient avec eux de très longues correspondances, sans cesser pour autant de poursuivre les travaux mathématiques qu'il avait commencés à

Paris. À 38 ans, il publie son premier article portant sur ce qu'on appelle encore aujourd'hui le *calcul infinitésimal*.



Figure 2. Sur le mur du bureau est accroché le portrait de la princesse Sophie de Hanovre, correspondante et amie proche de Leibniz (montage photographique).

## Extrait d'une correspondance

Leibniz compte plus d'un millier de correspondants. L'un des destinataires de ses missives est le chercheur suisse David Bernoulli. Comme les mathématiciens ont souvent l'habitude d'utiliser la lettre  $x$  dans leurs calculs algébriques, Leibniz adresse, le 29 juillet 1698, une lettre à Bernoulli, dans laquelle il écrit : « *Je n'aime pas  $x$  comme symbole de multiplication, car celui-ci peut être confondu avec la lettre  $x$  ; ... Souvent je place seulement un point entre les deux facteurs.* »

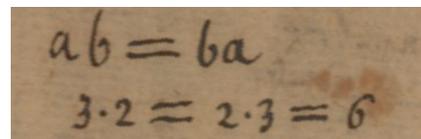
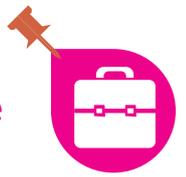


Figure 3. Manuscrit digitalisé par la Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek, Niedersächsische Landesbibliothek, à Hanovre.

À l'époque, les mathématiciens utilisent déjà la croix  $\times$  qui avait été introduite soixante ans plus tôt par le mathématicien anglais William Oughtred. Aussi, à part quelques proches de Leibniz, personne ne retiendra la proposition du mathématicien allemand.

1. Leibniz maîtrisait le français, langue dans laquelle il composait la plupart de ses écrits philosophiques. En fait, il était polyglotte : certains disent qu'il connaissait une douzaine de langues.



### Une guerre des ego

Isaac Newton est un physicien et astronome de l'époque. Il est anglais et de trois ans l'aîné de Leibniz. Il est connu pour sa théorie de la gravité qu'il aurait, selon la légende, inventée après avoir observé une pomme tomber de son arbre. Newton s'intéresse également aux mathématiques et travaille lui aussi sur le *calcul infinitésimal* (qu'il appelle cependant *calcul des fluxions*). Déjà agacé par les critiques de Leibniz sur sa théorie de la gravité, Newton décide de revendiquer la paternité du calcul infinitésimal, accusant Leibniz de plagiat.



Figure 4. Leibniz et Newton se querellent pour la paternité du calcul infinitésimal.

Ce dernier se fâche ; voici vingt ans qu'il a inventé le calcul infinitésimal et que ses travaux sont diffusés et développés par ses amis et collègues L'Hôpital et Bernoulli. Leibniz accuse à son tour Newton d'être un imposteur. C'est ainsi que commence une querelle qui ne cessera d'aller *crescendo*.

### Fin de vie

En 1714, Leibniz perd ses protecteurs : la princesse Sophie décède et le prince-électeur de Hanovre devient roi d'Angleterre. En raison de sa mauvaise réputation en Angleterre, consécutive à son conflit avec Newton, Leibniz se voit refuser le droit de suivre le roi à Londres. Il se retrouve ainsi seul, sans famille — il ne s'est jamais marié — et sans ami. Il est moqué par la cour de France (à cause de son style démodé) et a perdu toute crédibilité à la Royal Society de Londres. Au

crépuscule de sa vie, Leibniz se retrouve dans le dénuement le plus complet et décède en 1716. Sa maison est immédiatement confisquée et son immense patrimoine littéraire, composé d'environ 100 000 pages manuscrites dont 15 000 lettres adressées à plus de mille correspondants, est immédiatement classé dans les archives secrètes de la bibliothèque électorale de Hanovre — les fonctionnaires de la cour du roi d'Angleterre craignant que les écrits de Leibniz deviennent publics.

### Post mortem

La dispute entre Newton et Leibniz a été tellement envenimée qu'il sera durant plus de cent-cinquante ans impossible de saisir la vérité. Finalement, il est établi que Newton et Leibniz ont développé leurs travaux de façon plus ou moins indépendante. Ce sont cependant les notations de Leibniz qui ont eu la préférence des mathématiciens et qui sont aujourd'hui encore utilisées.

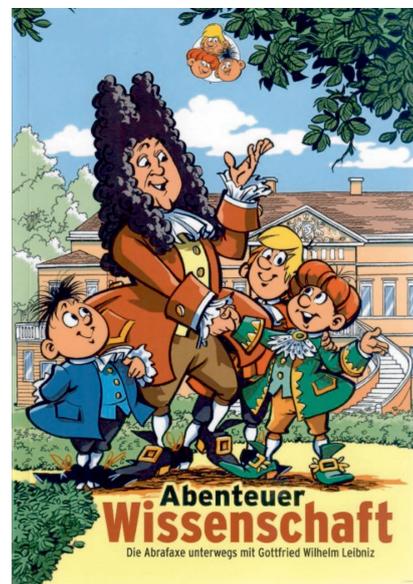


Figure 5. Première de couverture de la bande dessinée [3]<sup>2</sup>.

À partir du milieu du XIX<sup>e</sup> siècle sont publiés nombre d'ouvrages scientifiques de diffusion du patrimoine littéraire de Leibniz. C'est ainsi que le mathématicien allemand se retrouvera peu à peu réhabilité. Sa statue sera érigée devant l'université de Leipzig et un nouveau tombeau

2. Dans le cadre européen commun de référence pour les langues, le niveau linguistique en allemand nécessaire à la compréhension de cette bande dessinée est, pour les bulles, plutôt B1, et pour les encadrés, plutôt B1+.



sera édifié. Leibniz est devenu un personnage incontournable du patrimoine culturel de l'Allemagne : de nombreux établissements scolaires portent son nom, tous les écoliers utilisent le point comme symbole de multiplication et des livres de littérature de jeunesse racontant la vie du mathématicien sont régulièrement publiés.

Quant à Newton, s'il a été enterré avec tous les honneurs de sa patrie en 1726, force est de constater que le conflit avec Leibniz aura eu, durant plus d'un siècle, des conséquences tragiques pour les mathématiques britanniques. Les travaux de Leibniz ouvraient en effet la voie vers de nouvelles mathématiques, essentielles pour le développement industriel des sociétés.

### Quelques activités avec Leibniz

*L'histoire finit-elle bien ?* était la première question posée. Certains élèves sont restés sur l'idée que Leibniz avait été réhabilité, considérant ainsi que l'histoire finissait bien. D'autres élèves en revanche, confrontés à la tristesse des derniers jours de vie du mathématicien allemand, ont estimé que l'histoire finissait mal. À l'écoute des arguments des uns et des autres, les élèves ont finalement douté, comprenant qu'il était difficile de répondre par oui ou par non à une telle question et qu'ils avaient ainsi tous un peu raison. Cette première étape constitue déjà un premier pas vers l'écoute de l'autre, mais aussi vers l'acceptation et le respect de la diversité des opinions.

Les pages suivantes proposent six activités accompagnées de leurs fiches de préparation. Tous ces exercices ont été traités en classe entière. Durant la séance, l'enseignant s'est positionné comme un animateur de débat qui apportait au fil des échanges des éléments d'informations permettant aux élèves d'aller plus en profondeur dans leurs réflexions. Le déroulement de la séance s'est avérée fluide, même si le début des échanges a été assez dirigé, nombre d'élèves ayant hésité à s'exprimer. L'enthousiasme a cependant pris le dessus

au fur et à mesure que la classe s'est appropriée la biographie de Leibniz.

#### Activité 1

*Dans la cour du Musée d'histoire naturelle de l'Université d'Oxford, sont érigées les statues de Newton et de Leibniz.*

*Décrivez et expliquez ce que vous voyez sur ces deux photographies.*

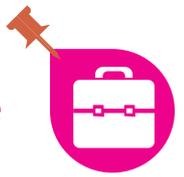


Figure 6. Dans une cour de l'université d'Oxford.

#### Fiche de préparation 1

Les élèves ont facilement identifié les deux personnages : Newton regarde une pomme tombée au sol, Leibniz tient une lettre dans les mains (en référence à ses multiples correspondances).

Les noms des deux mathématiciens sont par ailleurs inscrits sur les socles des deux statues — il suffit, pour le voir, de zoomer les images en ligne sur la toile. Si les directions opposées des regards des deux scientifiques font écho à l'inimitié existante entre les deux hommes, leur présence sur des piédestaux identiques, dans la cour de la même université, de surcroît un établissement prestigieux, rappelle qu'il s'agit de deux illustres mathématiciens, tous les deux inventeurs du calcul infinitésimal (donc sur un pied d'égalité). Enfin, le fait qu'Oxford soit une ville britannique témoigne de la réhabilitation totale de Leibniz, y compris dans le pays natal de Newton. Interrogés, les élèves n'ont pas rencontré de difficultés lors du traitement de cette activité.



**Activité 2**

Les trois vignettes de la page suivante sont extraites de la bande dessinée [3, p. 138]. Elles illustrent une scène dont les protagonistes sont Leibniz, Newton et deux enfants. Remplissez les six bulles en imaginant les paroles des différents personnages.



© MOSAIK-Die Abrafaxe.



© MOSAIK-Die Abrafaxe.



© MOSAIK-Die Abrafaxe.

Figure 7. Extraits de la bande dessinée Die Abrafaxe unterwegs mit Gottfried Wilhelm Leibniz.

**Fiche de préparation 2**

La première étape consiste à identifier les différents personnages, ce que les élèves ont facilement fait, Leibniz étant reconnaissable à sa perruque longue, sombre et bouclée. La dernière vignette propose aux élèves de chercher une porte de sortie au différend des deux scientifiques : échanger dans le calme, s'écouter, partager l'invention... Cette dernière option est d'autant plus pertinente que les deux scientifiques n'ont pas abordé la question de la même façon, Newton raisonnant en physicien et Leibniz en mathématicien. Il est enfin à noter que, lors du traitement de cette activité, plusieurs collégiens ont choisi pour dernière réplique : « Stop, on dirait des enfants ! », « Vous êtes pires que des maternelles ! »... — ce qui laisse supposer que les élèves ont reconnu une scène qui faisait écho à des situations vécues (en tant qu'acteurs ou témoins).

**Activité 3**

Lisez le texte rédigé de la main de Leibniz, puis commentez. « On publia un livre contre moi en 1711, sous le titre de Commerce Épistolique, où l'on inséra des vieux papiers, et des anciennes lettres, mais en partie tronquées, et on supprima celles qui pouvoient faire contre M. Newton. Et ce qui est le pis, on y ajouta des remarques pleines de faussetez malignes, pour donner un mauvais sens à ce qui n'en avoit point. Mais la Société royale [à Londres] n'a point voulu prononcer là-dessus, comme j'ai appris par un extrait de ses registres : et plusieurs personnes de mérite en Angleterre (même des membres de la Société royale) n'ont point voulu prendre aucune part à ce qui s'est fait contre moi. » [5, p. 493].

**Fiche de préparation 3**

Sur la forme, il est possible d'observer que ces lignes ont été rédigées en ancien français, lorsque l'orthographe n'était pas la même et que les terminaisons en *-ait* et *-aient* de l'imparfait étaient des *-oit* et *-oient*.





## Leibniz, du génie à l'homme, de l'homme au génie

Sur le fond, il est intéressant de noter que les propos ont été écrits postérieurement à 1711 : Leibniz était donc arrivé à la fin de sa vie et sa querelle avec Newton était à son comble. Déjà pour cette raison, la qualification *querelle mortelle* parfois trouvée dans la littérature prend tout son sens. Le texte rappelle ensuite qu'il ne s'agit pas d'une simple dispute entre deux hommes, mais d'une véritable guerre entre deux clans, les disciples des deux mathématiciens n'ayant cessé d'envenimer la situation, quitte d'ailleurs à faire fi des règles de déontologie et d'intégrité scientifique les plus élémentaires — tous les coups étaient permis !

L'attention des élèves n'a pas été portée sur le titre du livre « *Commerce Épistolaire* ». Quelques informations peuvent néanmoins être données. À cette époque, était appelé « commerce de lettres » une correspondance écrite de lettres. Normalement, l'adjectif qui se rapporte à une telle correspondance est "épistolaire". Toutefois, au XVIII<sup>e</sup> siècle, les deux mots « épistolaire » et « épistolique » cohabitaient ; « épistolique » pouvait cependant renvoyer à quelque chose de vulgaire ou à du charabia adressé à des initiés, et ainsi revêtir une connotation plus péjorative que « épistolaire ».

Au final, les enseignants pourront, si cela est jugé opportun, comparer cette affaire à des situations de classe, lorsqu'une dispute entre deux élèves leaders vient dégrader l'ambiance générale de la classe, chaque leader pouvant compter sur plusieurs camarades suiveurs. L'objectif est alors d'amener les élèves à comprendre qu'en cas de conflit, l'intérêt général n'est pas de suivre et alimenter les querelles, mais au contraire d'écouter les différents partis et tenter des médiations.

### Activité 4

Décrivez l'image ci-dessous. Selon vous, à quelle période de sa vie est arrivé Leibniz ? Expliquez.

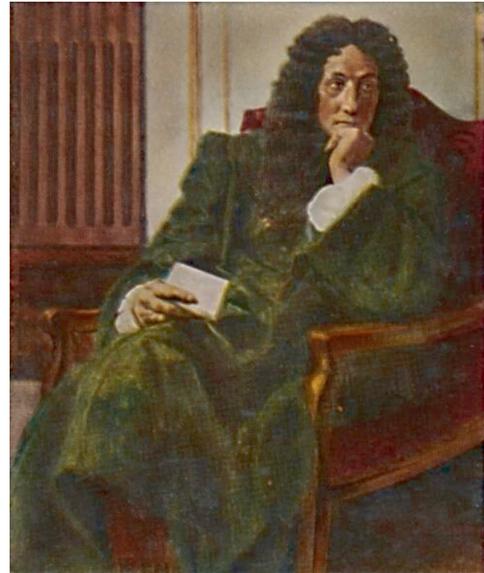
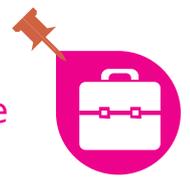


Figure 8. Portrait de Leibniz peint en 1934 par C. Meyer (artiste inconnu).

### Fiche de préparation 4

Il ne s'agit pas d'une photographie instantanée de Leibniz, mais d'une représentation du mathématicien allemand par un peintre contemporain (donc un portrait *post-mortem*). Des adaptations peuvent donc avoir été faites par l'artiste peintre.

La pose et l'expression du visage de Leibniz reflètent une forme de tristesse, voire d'abandon. Le mathématicien repose sa tête sur l'une de ses mains (un peu comme le Penseur modelé par Rodin à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle). Son regard est fixe et pensif, comme s'il était perdu dans ses pensées. Sa posture peut également trahir la lassitude et la mélancolie causées par les moqueries et la perte de crédibilité dont il est l'objet en Europe. Son visage porte une expression de fatigue et de déception, accentuée par les ombres autour de ses yeux. Sur ce tableau, Leibniz est par ailleurs représenté seul ; il semble être en rupture avec une vie de mondanités et de voyages. Sa tenue en robe de chambre peut conforter dans cette idée, même si la robe de chambre était au temps des



lumières un vêtement en vogue, un habit de l'intimité qui combinait élégance et confort [6]. La couleur verte interroge aussi. Dans le vêtement du XVIII<sup>e</sup> siècle, elle n'est certes pas très fréquente, mais l'est toutefois davantage en Allemagne [7, p. 169]. Elle pourrait aussi être interprétée comme un clin d'œil à l'habit vert des membres de l'Académie des sciences de l'Institut de France, puisque Leibniz a été nommé académicien en 1675, puis associé étranger en 1699. Une réserve doit cependant être formulée sur cette hypothèse, le costume des académiciens datant du XIX<sup>e</sup> siècle (et non du siècle des Lumières), cela même si le peintre allemand Joseph Melling avait lui aussi représenté en 1776 le scientifique Philippe Frédéric de Dietrich en robe de chambre verte dont la texture semble comparable à celle portée par Leibniz sur la toile de C. Meyer. L'attention des élèves peut ensuite être portée sur la lettre que tient Leibniz dans sa main, sans doute en rappel aux multiples correspondances du mathématicien allemand. Dans les échanges avec la classe, peut être suggérée l'éventualité que Leibniz soit affecté ou absorbé par le contenu de ce qu'il vient de lire — aucun élément ne peut cependant confirmer cette nouvelle hypothèse. L'arrière-plan austère ajoute enfin à l'atmosphère générale de tristesse et de solitude. En résumé, cette représentation expose non seulement le penseur qu'était Leibniz, mais aussi l'homme touché par les critiques et les épreuves.

### Activité 5

La figure ci-dessous propose une cartographie des plus grands mathématiciens européens, nés au cours du XVIII<sup>e</sup> siècle et dont les travaux ont contribué au développement du calcul différentiel. Décrivez ce que vous voyez et commentez.



Figure 9. Cartographie de mathématiciens du XVIII<sup>e</sup> siècle.

### Fiche de préparation 5

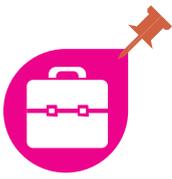
Comme Leibniz est décédé en 1716 et Newton en 1726, les médaillons correspondent aux portraits de six mathématiciens scientifiquement actifs après les décès des deux hommes. La carte laisse ensuite apparaître une répartition géographique uniquement localisée sur le continent : Gauss est allemand, Euler est suisse, Laplace, Cauchy et Fourier sont français, Lagrange est italien naturalisé français. Aucun mathématicien britannique n'apparaît. Comme cela est formulé à la fin de la biographie simplifiée, le conflit Leibniz/Newton aura eu, durant plus d'un siècle, des conséquences tragiques pour les mathématiques britanniques : « *Newton [...] n'a pas fait de disciples* », alors qu'« *au contact de Leibniz, on voit naître une nouvelle génération puissante de mathématiciens habiles en Allemagne et en France* » [5, p. 495]. En Grande-Bretagne, De Morgan (1806-1871) a été le premier mathématicien à le reconnaître : « *C'était en Grande-Bretagne le tempérament de l'époque [...] de prendre pour acquis que Newton était la perfection humaine* » [8, p. 474].

## Des mathématiques avec Leibniz

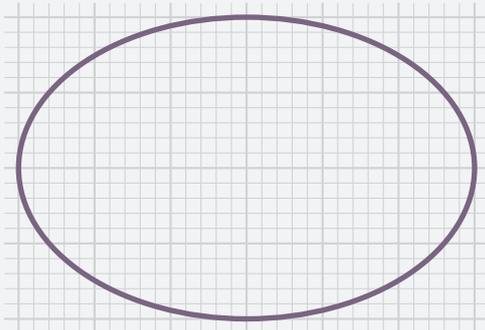
### Activité 6

Le texte ci-dessous est une interprétation en français d'un extrait de l'ouvrage allemand *Leibniz für Kinder* [Leibniz pour les enfants] [9, p. 79].

*Il est simple de calculer l'aire d'un rectangle : il suffit de multiplier la longueur par la largeur (par exemple, de mesure 3 et 2 mètres de long) pour obtenir l'aire du rectangle (c'est-à-dire 6 m<sup>2</sup>). Mais que se passe-t-il lorsque les surfaces sont ondulées ou arrondies ? Comment calculer la quantité d'eau contenue dans un lac ? Quelle quantité de sable faut-il pour aménager un chemin incurvé ? Combien de pots de peinture pour rafraîchir le dôme de l'église ? Il n'est possible de répondre à ces questions que si l'on est en mesure de calculer les aires des surfaces limitées par des courbes. C'est pour tout cela que Leibniz a inventé son calcul infinitésimal.*



1. Lisez attentivement le texte précédent et trouvez de nouvelles questions que les auteurs de Leibniz für Kinder auraient pu formuler.
2. L'objectif de cette question est de déterminer un encadrement de l'aire d'une ellipse dont les grand axe et petit axe mesurent 6 et 4 centimètres, en recourant à un quadrillage dont les grandes mailles sont des carrés de longueur de côté 1 cm.



- (a) Quel est le nombre de grandes mailles entièrement contenues dans l'ellipse? Quel est le plus petit nombre de grandes mailles nécessaires pour recouvrir l'ellipse? En déduire un encadrement de l'aire de l'ellipse.
- (b) Reprenez la question 2 (a) en considérant cette fois-ci les petites mailles.

3. Comparez les résultats obtenus en 2 (a) et en 2 (b) Comment procéderiez-vous pour améliorer l'encadrement de l'aire de l'ellipse ci-dessus représentée?
4. Le terme « infinitésimal » provient du mot latin « infinitum » qui signifie « infini » en français. Expliquez le choix de cette dénomination.
5. Le calcul infinitésimal consiste à effectuer des sommes infinies. Leibniz a choisi de désigner ces sommes par le symbole  $\int$ , un dérivé de la lettre S, la première lettre du mot Somme (ou Summe en allemand). Par exemple, avec le calcul infinitésimal, la valeur exacte de l'aire de l'ellipse précédente est :

$$A = 4 \int_0^3 \frac{2}{3} \sqrt{3^2 - x^2} dx = \frac{8}{3} \int_0^3 \sqrt{3^2 - x^2} dx$$

$$A = 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos^2(t)} \cdot \sin(t) dt = 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt$$

$$A = 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2t)) dt = 6 \left[ t - \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A = 6\pi \text{ cm}^2$$

À l'aide de la calculatrice, comparez la valeur exacte ainsi calculée avec les encadrements obtenus en 2 (a) et en 2 (b).

### Fiche de préparation 6

La question 1 n'a posé aucune difficulté. Pour la question 2 (a), les élèves ont obtenu l'encadrement :  $8 \text{ cm}^2 \leq A \leq 24 \text{ cm}^2$ , chaque grande maille ayant une aire de  $1 \text{ cm}^2$ . Ils ont alors noté que, pour des raisons de symétrie, il suffisait de travailler avec un quart de l'ellipse et de multiplier ensuite par 4 les nombres de mailles comptées.

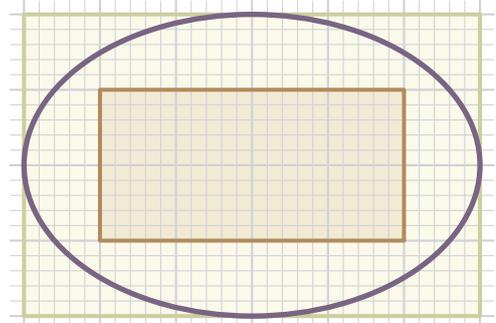


Figure 10. Découpage en grandes mailles.

Pour la question 2 (b), les petites mailles ayant chacune une aire égale à  $0,04 \text{ cm}^2$  ( $0,2^2 = 0,04$ ), il leur a semblé, aux erreurs de lecture près, que le nouvel encadrement était :

$$4 \cdot 105 \cdot 0,04 \text{ cm}^2 \leq A \leq 4 \cdot 127 \cdot 0,04 \text{ cm}^2$$

où le point  $\cdot$  désigne le symbole choisi par Leibniz comme signe de multiplication, soit :

$$16,8 \text{ cm}^2 \leq A \leq 20,32 \text{ cm}^2.$$

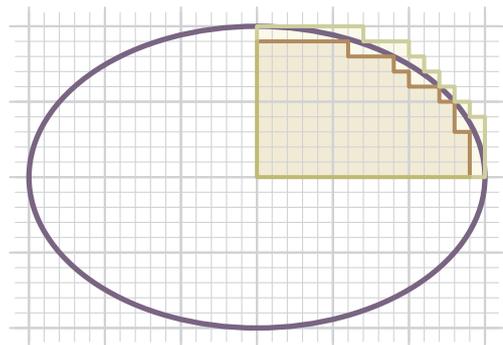


Figure 11. Découpage en petites mailles.



Déjà à ce niveau, il est intéressant de faire noter aux élèves qu'il s'agit à chaque fois d'effectuer des sommes dont le nombre de termes est d'autant plus grand que les mailles sont petites. Cette remarque aide à comprendre la suite. Même si l'inégalité obtenue en 2 (b) est plus satisfaisante que celle obtenue en 2 (a), l'encadrement de l'aire de l'ellipse mérite d'être amélioré. Pour ce faire, un élève propose de travailler avec des mailles encore plus fines, tout en concevant que le comptage des mailles va devenir de plus en plus difficile. Les élèves sont ainsi entraînés à s'approprier l'idée que la répétition du processus une infinité de fois (question 3) aboutira à un encadrement d'amplitude infiniment petite, soit finalement à une valeur exacte de l'aire de l'ellipse. La question 4 permet de synthétiser ce qui vient d'être dit. Plus les mailles sont petites et plus le nombre de termes des additions posées est grand. Autrement dit, lorsque les mailles sont infiniment petites, les sommes ont un nombre infiniment grand de termes — on parle de sommes infinies. Enfin, pour la question 5, le calcul infinitésimal donne bien une valeur exacte de l'aire de l'ellipse :  $A = 6\pi \text{ cm}^2$ , soit  $A \approx 18,8 \text{ cm}^2$  à 0,1 près par défaut — ce résultat est compatible avec les intervalles obtenus en 2 (a) et 2 (b). Quant aux formules intégrales, elles ont été présentées telles quelles et ont suscité la curiosité des élèves, voire leur admiration. L'enseignant pourra accompagner cette découverte en expliquant que le calcul intégral est au programme de mathématiques de Terminale et, qu'à la sortie du baccalauréat, selon leurs choix d'études, certains élèves de la classe seront en mesure d'effectuer de tels calculs.

Les questions de cette sixième activité ont presque toutes été traitées avec la classe entière, dans une interactivité élèves-professeur. Le tracé des surfaces polygonales à l'intérieur et à l'extérieur de l'ellipse a été effectué par un élève envoyé au tableau, puis par toute la classe organisée en petits groupes. Les comptages des grandes et petites mailles ont également été conduits par les élèves placés en autonomie. Afin d'achever cette séquence en évitant d'affecter l'enthousiasme de

la classe et ainsi de manquer les objectifs initialement visés, il est préférable d'accompagner au mieux la classe et de lever les potentielles difficultés. Cela dit, lors de l'expérimentation conduite dans le collège de Bitche, la résolution de l'exercice s'est révélée fluide.

La séquence (qui a duré au total 3 heures) s'est achevée par une collation récréative autour des célèbres biscuits allemands Leibniz-Kekse (encore appelés Choco Leibniz) produits par une entreprise alimentaire basée à Hanovre, ville dans laquelle Leibniz a passé la grande majorité de sa vie.

## Conclusion

Ce travail a ému les élèves qui ont, à l'occasion d'autres séances mathématiques, ressenti le besoin de parler une nouvelle fois de Leibniz avec leur professeure. La particularité de cette histoire est en effet son caractère très humain, peut-être même trop humain. De ce fait, la biographie de Leibniz se révèle être un formidable support pour développer chez les élèves l'empathie, et même la maîtrise de soi — il a en effet fallu tempérer quelques invectives à l'encontre de Newton (« *Il a juste regardé une pomme tomber!* », explique une élève) et rappeler que Newton est une figure emblématique des sciences et en particulier de la mécanique classique. Quant à sa querelle avec Leibniz, Newton a tout simplement joué sa partie, tout autant que Leibniz a joué la sienne. Après la collation festive, les échanges avec les élèves pourront ainsi aboutir à des discussions plus générales à visée philosophique : qu'est-ce réussir sa vie? Faut-il se battre à n'importe quel prix? Les mathématiques sont-elles humaines?

## Références

- [1] É. Barbin. « Apports de l'histoire des mathématiques et de l'histoire des sciences dans l'enseignement ». In : *Tréma* n°26 (2006). , p. 20-28.
- [2] P. de La Cotardière. *Histoire des sciences : de l'Antiquité à nos jours*. Tallandier, 2012, p. 67-68.
- [3] J.-U. Schubert, G. Ruppelt et K.-D. Schleiter. *Abenteuer Wissenschaft - Die Abrafaxe unterwegs mit Gottfried Wilhelm Leibniz*. Mosaik Steinchen, 2016, p. 1-176.



## Leibniz, du génie à l'homme, de l'homme au génie

- [4] F. Soriano-Gafiuk. « La multiplication de deux entiers : empreinte de l'histoire sur les savoirs enseignés dans les écoles élémentaires françaises et allemandes ». In : *Synergies Pays germanophones* n° 16 (2023), p. 45-93.
- [5] J.-C.-F. Le Hoefler. *Nouvelle biographie générale depuis les temps les plus reculés jusqu'à nos jours (29)*. Frères Firmin Didot, 1859, p. 465-500.
- [6] S. de La Rochefoucauld. « Petite chronique du costume : Diderot, un philosophe en robe de chambre ». In : *Grande Galerie - Le Journal du Louvre* n° 13 (2010).
- [7] M. Pastoreau. *Vert, histoire d'une couleur*. Seuil, 2013, p. 1-176.
- [8] T. Sonar. *The History of the Priority Dispute between Newton and Leibniz - Mathematics in History and Culture*. Birkhäuser, 2018, p. 473-490.
- [9] A. Antoine, A. von Boetticher et B. Becker. *Leibniz für Kinder*. Hildesheim : Georg Olms, 2016.



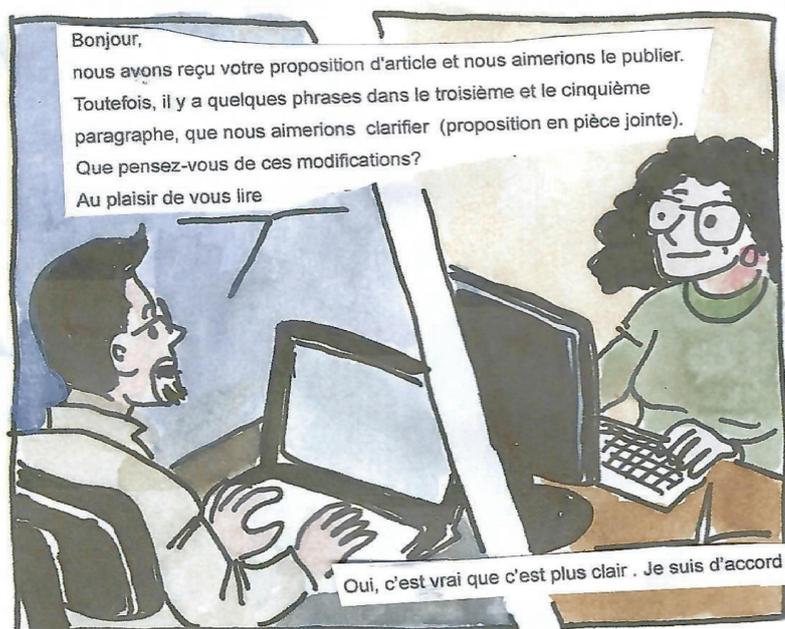
Florence Soriano-Gafiuk est professeure des universités et formatrice à l'INSPÉ de Lorraine, au campus biculturel franco-allemand de Sarreguemines.

Manuela Freyermuth enseigne au collège Jean-Jacques Kieffer, à Bitche (57). Elle est aussi formatrice à l'INSPÉ de Lorraine, au campus biculturel franco-allemand de Sarreguemines.

[florence.soriano-gafiuk@univ-lorraine.fr](mailto:florence.soriano-gafiuk@univ-lorraine.fr)

[manuela.freyermuth@orange.fr](mailto:manuela.freyermuth@orange.fr)

© APMEP décembre 2024



POURQUOI PAS VOUS?  
 VOUS AVEZ UNE IDÉE INTÉRESSANTE SUR LES MATHS, SUR LEUR ENSEIGNEMENT?  
 N'HÉSITEZ PAS À ÉCRIRE À AU FIL DES MATHS ET À PROPOSER UN ARTICLE...

# Sommaire du n° 554



## Mathématiques en histoire(s)

### Éditorial

### Opinions

- ✦ Quelle place des mathématiques dans les histoires ?  
*Annie Camenisch* ..... 3
- ✦ Enseigner les maths par la fiction  
*Serge Petit* ..... 8

### Avec les élèves

- Le boulier-compteur  
*Olivier Le Dantec* ..... 18
- Une utilisation d'une carte micro:bit  
*Alexandre Técher* ..... 26
- ✦ Leibniz, du génie à l'homme, de l'homme au génie  
*Florence Soriano-Gafiuk & Manuella Freyermuth* ..... 30
- ✦ Jouons aux cartes avec Ptolémée  
*Henrique Vilas Boas* ..... 40

### Ouvertures

- ✦ Coéducation en cycle 1  
*Danielle Ruetsch* ..... 47
- Chine : contradictions d'un système en mutation  
*Luc Trouche* ..... 52
- ✦ Faisons les comptes avec CORMÉCOULI  
*V. Beck, A. Gateau, M. Moyon, S. Schwer* ..... 63

### 1 Récréations

- Au fil des problèmes  
*Frédéric de Ligt* ..... 70
- Des problèmes dans nos classes  
*Valérie Larose* ..... 73
- Boucle infernale  
*É. Allain, N. Aubineau, M. Georget & É. Guillet* ..... 75
- ✦ Achille et la tortue  
*Olivier Longuet* ..... 79

### Au fil du temps

- ✦ Le groupe « Histoire des mathématiques » de l'APMEP  
*Nathalie Chevalarias* ..... 80
- Matériaux pour une documentation ..... 84
- ✦ Le prix *Tangente* des lycéens  
*Fabien Aoustin* ..... 87
- ✦ Littéramath, un outil pour l'enseignement  
*Martine Brilleaud & Alice Ernoult* ..... 92



CultureMATH



# APMEP

www.apmep.fr