

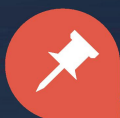
Le bulletin de l'APMEP - N° 553

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Juillet, août, septembre 2024

Accompagnement des élèves



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :

<https://afdm.apmep.fr>



Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufilesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est jointe la plaquette
Visages 2024-2025 de l'APMEP.

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » **numériques** : Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Audrey DUGUE, Nada DRAGOVIC, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Éric ASTOUL, Pol LE GALL.

Équipe T_EXnique : Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Olivier GÉRARD, Benoît MUTH, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Nicolas PETIOT, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Anne-Sophie SUCHARD.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : septembre 2024. ISSN : 2608-9297.

Impression : iLLiCO by L'ARTÉSIENNE

ZI de l'Alouette, Rue François Jacob, 62800 Liévin



Relations de voisinage au pays basque

*Partons pour un peu d'ethnomathématique au pays basque où nous rencontrerons des voisins, des permutations circulaires et de l'arithmétique élémentaire !
Bon voyage !*

Pierre Carriquiry

Introduction

La mathématicienne Marcia Ascher dans ses livres *Mathématiques d'ailleurs* [1] et *Mathematics elsewhere* [2] a étudié les coutumes de nombreux peuples autochtones qui peuvent être décrites en utilisant des notions mathématiques. Parmi les coutumes étudiées dans ce dernier ouvrage, il y a les relations de voisinage dans des villages du Pays Basque en particulier dans le village de Sainte-Engrâce actuellement situé dans les Pyrénées Atlantiques, province de Soule. Ces coutumes ont été décrites par l'ethnologue Sandra Ott dans son livre *Le cercle des montagnes* [3] (*The circle of mountains* [4] en version anglaise). Le terme *voisin* qui se traduit par *aizoa* en souletin¹ (prononcer aïssoua) et par *auzoa* dans les autres provinces basques n'a pas tout à fait la même signification dans les deux langues. En particulier la relation « x est *aizoa* de y » n'est pas symétrique. Dans la suite de cet article on utilisera le terme « voisin » avec sa signification basque que l'on va préciser.

Les relations de voisinage occupaient une place importante dans les villages du Pays Basque jusqu'aux années 1960 où elles ont commencé à disparaître. Chaque maison avait k voisins, k étant un entier positif, probablement inférieur à 5, qui varie suivant les villages. Ces voisins, appelés premier voisin, deuxième voisin, ..., k -ième voisin, sont fixés par la coutume et pas toujours par une

relation de proximité entre les maisons. Il peut même arriver qu'un voisin d'une maison soit situé dans un autre village. Les voisins d'une maison m ont un certain nombre de devoirs à accomplir pour venir en aide à la maison m dans certaines circonstances : maladie, décès, gros travaux, etc. Ces devoirs sont fixés par la coutume et sont les mêmes pour toutes les maisons. Chaque maison a le droit d'avoir des voisins qui lui viennent en aide et a le devoir de venir en aide aux maisons dont elle est la voisine. On peut donc dire qu'il y a égalité des droits et des devoirs pour chaque maison. Cette égalité se traduit par l'expression basque *bardin bardina*, *bardin* pouvant se traduire par « de même mesure » ou « superposables » ou même « égaux » comme dans « triangles égaux » dans la première partie du xx^e siècle. « *bardin bardina* » peut alors se traduire par « parfaitement égaux » ou « *equal-equal* » en anglais.

Dans cet article on va décrire une partie des relations de voisinage en utilisant des notions mathématiques. On note E l'ensemble des n maisons du village. Les voisins de chaque maison seront représentés par des applications de E dans E notées $v_1, v_2, \dots, v_k$. On définira les contraintes vérifiées par ces applications, parmi lesquelles il y a l'égalité des droits et des devoirs entre toutes les maisons, et on recherchera des solutions vérifiant ces contraintes que l'on comparera aux solutions adoptées dans le village de Sainte-Engrâce.

1. Le souletin (*zuberera* en basque) est un dialecte basque particulier parlé dans la Soule (la plus petite des sept provinces historiques du Pays basque, dans l'est). Source : Wikipedia .

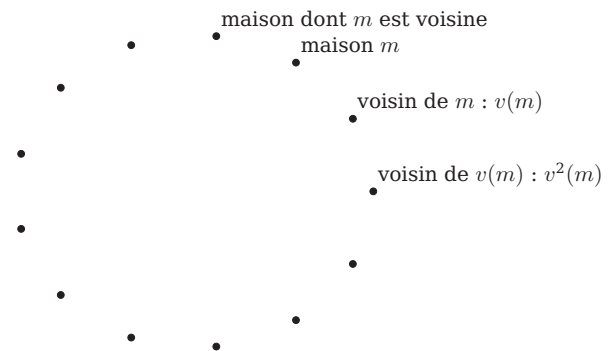


Étude du cas $k = 1$

Dans ce paragraphe on note $v(m)$ le voisin d'une maison m s'il n'y en a qu'un seul et le premier voisin s'il y en a plusieurs. Le bon sens et l'égalité des droits et des devoirs entre toutes les maisons imposent un certain nombre de contraintes devant être vérifiées par v .

- Chaque maison doit avoir un seul voisin (ou un seul premier voisin) ce qui signifie que v est bien une application.
- Deux maisons différentes doivent avoir des voisins différents donc v doit être injective. En effet, si v n'était pas injective, il existerait deux maisons m et m' telles que $v(m) = v(m')$ c'est-à-dire que deux maisons auraient le même voisin et on pense que celui-ci ne pourrait pas toujours venir en aide à deux maisons simultanément. On peut aussi remarquer que E étant fini, si v n'était pas injective, elle ne serait pas surjective, donc il existerait une maison qui ne serait la voisine d'aucune autre et qui n'aurait donc pas les mêmes devoirs que les autres. L'application v doit donc être une bijection de E encore appelée permutation de E .
- Une maison ne peut pas être voisine d'elle-même, donc v ne doit pas avoir de point fixe et doit donc vérifier : pour toute maison m , $v(m) \neq m$.
- On note $O(m)$ l'orbite de la maison m c'est-à-dire l'ensemble formé par m , son voisin $v(m)$, le voisin de $v(m)$ que l'on note $v^2(m)$ et ainsi de suite jusqu'à que l'on retombe sur m . Comme v est une bijection, il est certain que l'on retombera sur m car parmi les $(n+1)$ éléments $m, v(m), v^2(m), \dots, v^n(m)$ il y en a au moins deux qui sont égaux puisque E a n éléments. Il existe donc deux entiers i et j tels que $0 \leq i < j \leq n$ et $v^i(m) = v^j(m)$. On a alors $v^j(m) = v^i(v^{j-i}(m)) = v^i(m)$. La composée de bijections étant une bijection, v^i est une bijection d'où $v^{j-i}(m) = m$ avec $0 < j - i \leq n$.

On sait que l'ensemble des orbites forme une partition de E et on peut penser que s'il y avait plusieurs orbites cela pourrait entraîner une sorte de partition du village. On peut aussi dire que toutes les maisons ont droit à la même orbite. Ces considérations impliquent qu'il ne doit y avoir qu'une seule orbite. L'application v doit donc être une permutation circulaire. On a alors $E = \{m, v(m), v^2(m), \dots, v^{n-1}(m)\}$ et $v^n(m) = m$. L'ensemble des maisons peut être alors représenté par des points sur un cercle orienté où le voisin d'une maison m est le point suivant sur le cercle.



Or, il se trouve que dans le village de Sainte-Engrâce, si $v(m)$ désigne le premier voisin de m , l'application v est une permutation circulaire et l'orbite de m , qui est l'ensemble de toutes les maisons, est concrétisée par la coutume suivante :

Coutume à Sainte-Engrâce

Chaque dimanche, la maîtresse d'une maison m rend visite à sa voisine $v(m)$ pour lui offrir le pain bénit en lui disant « *gure azia* », que l'on peut traduire par « *notre semence* » ; le dimanche suivant, $v(m)$ rend visite à sa voisine $v^2(m)$ et lui offre le pain bénit en utilisant la même formule, et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les maisons reçoivent le pain bénit, et le cycle recommence indéfiniment.

Comme il y avait une centaine de maisons dans le village, un cycle durait environ deux ans. Les lecteurs intéressés par une interprétation anthropologique de cette coutume peuvent lire le livre *Le matriarcat basque* [5] d'Anne-Marie Lagarde.

Il est peu probable que le choix d'une permutation circulaire pour désigner le premier voisin d'une



maison soit dû au hasard. On peut calculer la probabilité d'obtenir une permutation circulaire en choisissant au hasard une permutation dans l'ensemble des permutations n'ayant pas de point fixe d'un ensemble ayant n éléments. En faisant le rapport entre le nombre de permutations circulaires et le nombre de permutations n'ayant pas de point fixe, on obtient :

$$p(n) = \frac{(n-1)!}{n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}} = \frac{1}{n \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}}.$$

Cette probabilité est égale à 1 pour $n = 3$, mais elle ne vaut plus que 0,027 pour $n = 100$.

Dès lors, comment expliquer le choix d'une permutation circulaire ?

Il est aussi peu probable qu'un beau jour de l'Antiquité, dans un village du pays basque, un habitant a fait l'équivalent des raisonnements précédents et proposé une permutation circulaire pour désigner le premier voisin de chaque maison.

On peut alors faire l'hypothèse suivante : au début de la formation du village, il y avait un petit nombre de maisons et une permutation circulaire s'est imposée pour définir le premier voisin ; l'ensemble des maisons peut alors être représenté sous la forme $E = \{m, v(m), v^2(m), \dots, v^{n-1}(m)\}$; lorsqu'une maison nouvelle m' se construisait, elle choisissait la maison géographiquement la plus proche $v^i(m)$ pour devenir sa voisine et on prenait $v^{i+1}(m)$ pour voisine de m' , autrement dit m' s'intercalait dans la ronde entre deux maisons voisines.

D'une manière analogue, la suppression d'une maison désignée par $v^i(m)$ revient à remplacer le voisin de $v^{i-1}(m)$ par $v^{i+1}(m)$ sans changer les voisins des autres maisons, autrement dit on enlève une maison dans la ronde.

La formule de la permutation circulaire permet donc de résoudre simplement le problème posé par la suppression ou l'ajout d'une maison.

Cas général

Étudions d'abord le cas $k = 2$. Chaque maison m a deux voisins différents que l'on note $v_1(m)$ et $v_2(m)$, l'application v_1 étant une permutation circulaire. Peut-on déterminer une application v_2 telle que pour tout m , $v_1(m) \neq v_2(m)$ et que v_2 soit aussi une permutation circulaire ?

L'orbite d'une maison m relativement à v_1 étant égale à E , $v_2(m)$ sera un élément de cette orbite, donc il existe un indice i compris entre 2 et $n - 1$ tel que $v_2(m) = v_1^i(m)$. Toutes les maisons étant soumises aux mêmes règles, cet indice doit être le même pour toutes les maisons. Étudions le cas $i = 2$, soit $v_2(m) = v_1^2(m)$ c'est-à-dire que le deuxième voisin de m est le premier voisin du premier voisin de m . La composée de deux bijections étant une bijection, v_2 est donc une bijection vérifiant $v_1(m) \neq v_2(m)$. Est-ce une permutation circulaire ? On peut voir sur un exemple que ce n'est pas toujours le cas. Prenons $n = 6$ et numérotions les maisons de 1 à 6. Soit v_1 l'application définie par le tableau suivant :

1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	1

Les éléments de la deuxième ligne sont les premiers voisins de ceux de la première ligne.

v_1 est une permutation circulaire. L'application $v_2 = v_1^2$ est représentée par le tableau :

1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	1	2

On voit que v_2 a deux orbites $\{1, 3, 5\}$ et $\{2, 4, 6\}$ donc v_2 n'est pas une permutation circulaire.

Plus généralement, on peut démontrer le résultat suivant :

Soit E un ensemble de n éléments, v une permutation circulaire de E , p un entier positif inférieur à n .

Si n et p sont premiers entre eux, v^p est une permutation circulaire.

Si n et p ne sont pas premiers entre eux, v^p n'est pas une permutation circulaire.



Démonstration

L'orbite d'un élément m relativement à ν^p est

$$\begin{aligned} O(m) &= \{m, \nu^p(m), \nu^{2p}(m), \dots, \nu^{(n-1)p}(m)\} \\ &= \{\nu^p(m), \nu^{2p}(m), \dots, \nu^{(n-1)p}(m), \nu^{np}(m)\} \end{aligned}$$

car $\nu^n(m) = m$ d'où pour tout entier i , $\nu^{n+i} = \nu^i$ ou encore : si $i \equiv j \pmod n$ alors $\nu^i = \nu^j$.

Démontrons alors la propriété suivante :

Soit $k = \frac{n}{\text{PGCD}(n, p)}$; pour tout $j \in \{1, 2, \dots, k, \dots, n\}$, il existe $i \in \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$ tel que $pj \equiv pi \pmod n$.

La propriété est évidente pour $j < k$. Si $j \geq k$ la division de j par k donne $j = bk + r$ avec $0 \leq r < k$.

Alors $pj = pbk + pr$.

Or $pk = \frac{pn}{\text{PGCD}(n, p)} = n \times \frac{p}{\text{PGCD}(n, p)}$ est multiple de n , donc $pbk \equiv 0 \pmod n$, d'où $pj \equiv pr \pmod n$ avec $0 \leq r < k$ ce qui démontre la propriété.

Montrons alors que les éléments de $\{p, 2p, \dots, kp\}$ sont non congrus modulo n c'est-à-dire que si $i \neq j$, $pi - pj$ n'est pas multiple de n .

On fait un raisonnement par l'absurde :

si $p(i - j)$ est multiple de n avec $0 < j < i \leq k$, $p(i - j)$ est multiple de n et de p donc est multiple de PPCM(n, p) ;
or, $\text{PPCM}(n, p) = \frac{np}{\text{PGCD}(n, p)} = kp$ donc $p(i - j) \geq kp$
ce qui contredit l'hypothèse $(i - j) < k$.

Alors, si n et p sont premiers entre eux, $\text{PGCD}(n, p) = 1$, d'où $k = n$ et les éléments de $\{p, 2p, \dots, np\}$ sont non congrus modulo n donc $\{p, 2p, \dots, np\} \equiv \{0, 1, \dots, (n-1)\} \pmod n$.

On en déduit

$$\{\nu^p(m), \nu^{2p}(m), \dots, \nu^{np}(m)\} = \{\nu^0(m), \nu^1(m), \dots, \nu^{n-1}(m)\} = E$$

car ν est une permutation circulaire, donc ν^p est aussi une permutation circulaire.

Si n et p ne sont pas premiers entre eux,

$$\text{PGCD}(n, p) > 1$$

d'où $k < n$ et

$$\{\nu^p(m), \nu^{2p}(m), \dots, \nu^{np}(m)\} = \{\nu^0(m), \nu^p(m), \dots, \nu^{(k-1)p}(m)\}$$

qui est un ensemble ayant moins de n éléments donc ν^p n'est pas une permutation circulaire. ■

Revenons à la définition du deuxième voisin par la formule $\nu_2(m) = \nu_1^2(m)$. L'application ν_2 est une bijection mais ce ne sera une permutation circulaire que si 2 et n sont premiers entre eux, c'est-à-dire si n est impair. Le village de Sainte-Engrâce n'a pas adopté la formule $i = 2$ pour désigner le deuxième voisin, mais il a choisi $i = n - 1$, soit $\nu_2(m) = \nu_1^{n-1}(m)$.

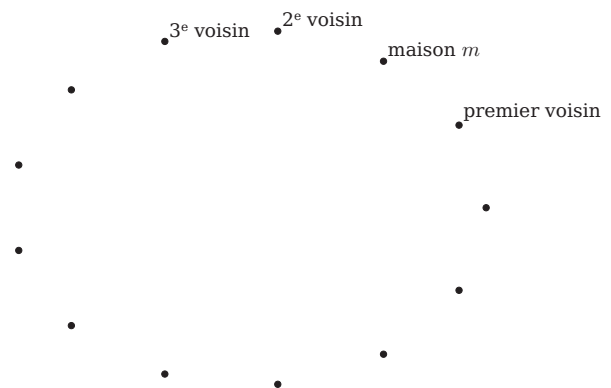
Or $\nu_1^{n-1}(m) = \nu_1^{-1}(m)$ où ν_1^{-1} est l'application réciproque de ν_1 c'est-à-dire que le deuxième voisin de m est la maison dont m est le premier voisin. En faisant ce choix, ν_2 est une permutation circulaire quel que soit le nombre d'habitants du village car pour tout $n > 1$, n et $n - 1$ sont premiers entre eux. Bien entendu je ne dis pas que le choix du deuxième voisin résulte du raisonnement précédent ; il est plus probable que les habitants ont remarqué qu'en parcourant les maisons dans le sens inverse du rite des premiers voisins ils obtenaient toutes les maisons du village.

Pour le troisième voisin, en supposant que ν_1 a été choisi de manière à minimiser les distances entre une maison et son premier voisin, et si on veut minimiser les distances entre une maison et son troisième voisin on a le choix entre les formules $\nu_3(m) = \nu_1^2(m)$ et $\nu_3(m) = \nu_1^{n-2}(m)$. La solution qui a été retenue à Sainte-Engrâce est $\nu_3(m) = \nu_1^{n-2}(m)$.

En faisant ce choix on obtient une permutation circulaire si n et $n - 2$ sont premiers entre eux c'est-à-dire si n est impair. On obtient le même résultat avec la formule $\nu_3(m) = \nu_1^2(m)$.

Il n'y avait que trois voisins de chaque maison à Sainte-Engrâce mais on peut généraliser les formules précédentes en prenant $\nu_k(m) = \nu_1^{k-1}(m)$ pour $k > 2$.

Le choix des trois voisins peut être représenté par le schéma suivant :





Conclusion

On ne connaît pas la date de début du rite des premiers voisins, mais on peut supposer qu'elle est antérieure au christianisme car les mots prononcés par la femme qui rend visite à sa première voisine (« *notre semence* ») n'ont pas un caractère religieux catholique et ne correspondent pas à l'offrande qui est faite. Le christianisme local aurait alors « recyclé » la coutume en y introduisant le pain bénit. Comme on manque d'informations sur cette lointaine époque, on ne saura probablement jamais pourquoi les habitants de Sainte-Engrâce ont choisi des permutations circulaires pour définir leurs premiers et deuxièmes voisins (et leurs troisièmes voisins dans le cas où n est impair). Les anthropologues David Graeber et David Wengrow dans leur livre *Au commencement était* [6] ont classé la société agropastorale basque dans un ensemble de sociétés basées sur l'égalité et non sur une hiérarchie entre les individus, et on a vu que le choix de permutations circulaires pour définir des voisins peut s'expliquer par des considérations mathématiques sur l'égalité des droits et des devoirs entre les maisons.

Les relations de voisinage codifiées ont disparu à partir des années 1960 à Sainte-Engrâce et

peut-être avant dans d'autres villages. Cependant l'entraide entre les maisons n'a pas disparu ; si une maison a besoin d'aide, elle est secourue par d'autres maisons qui prennent l'initiative de l'aider alors que dans le système codifié qui prévalait autrefois elle était sûre d'être aidée par ses voisins.

Références

- [1] Marcia Ascher. *Mathématiques d'ailleurs*. Seuil, 1998.
- [2] Marcia Ascher. *Mathematics Elsewhere: An Exploration Of Ideas Across Cultures*. Princeton University Press, novembre 2004.
- [3] Sandra Ott. *Le cercle des montagnes*. Éditions du C.T.H.S. Paris, février 1995.
- [4] Sandra Ott. *The circle of mountains*. University of Nevada Press, novembre 1993.
- [5] Anne-Marie Lagarde. *Le matriarcat basque*. Éditions Arteaz, mars 2022.
- [6] David Graeber et David Wengrow. *Au commencement était*. Les liens qui libèrent, novembre 2021.



Pierre Carriquiry est aujourd'hui à la retraite ; il a enseigné à l'École Nationale de Commerce. Il est membre de l'APMEP depuis 35 ans.

carriquiryp@free.fr

© APMEP septembre 2024



Sommaire du n° 553



Accompagnement des élèves

Éditorial

Opinions

- ✦ Groupes de niveaux en mathématiques au collège
Jean-Claude Rauscher 3

De l'utilisation des matériels de numération
Serge Petit 6

- ✦ Quel avenir pour l'inclusion ?
Claire Lommé 12

Avec les élèves

Les fractions, c'est pas du gâteau !
Guillaume Assali 14

« Le plus grand produit » en CM1
G. Aldon, F. Margerand, S. Roussel & A. Viry-Leroi ... 26

Vers la ligne graduée en Grande Section
Alexandra Homs 34

Suivi d'une constellation sur les grandeurs
Mathilde Pretis 38

- ✦ Vers plus d'autonomie
Amélie Cazottes 43

- ✦ Accompagner les élèves en lycée professionnel
Mélanie Berthelot-Lepage 47

- 1 ✦ Un RallyCoach avec les élèves ?
Erwan Démézet & Gaëlle Morvan 52

- ✦ La compétence « Chercher » en Troisième
Morgan Gilot 59

Ouvertures

Les mystères du sphinx
Yves Farcy 66

Relations de voisinage au pays basque
Pierre Carriquiry 73

Récréations

Au fil des problèmes
Frédéric de Ligt 78

Des problèmes dans nos classes
Valérie Larose 81

Au fil du temps

Le CDI de Marie-Ange
Marie-Ange Ballereau 83

Matériaux pour une documentation 85

Les blocs de base 10
Gonzague Jobbé-Duval 89



CultureMATH

