

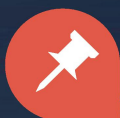
Le bulletin de l'APMEP - N° 553

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Juillet, août, septembre 2024

Accompagnement des élèves



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :

<https://afdm.apmep.fr>



Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufilesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est jointe la plaquette
Visages 2024-2025 de l'APMEP.

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » **numériques** : Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Audrey DUGUE, Nada DRAGOVIC, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Éric ASTOUL, Pol LE GALL.

Équipe T_EXnique : Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Olivier GÉRARD, Benoît MUTH, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Nicolas PETIOT, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Anne-Sophie SUCHARD.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : septembre 2024. ISSN : 2608-9297.

Impression : iLLiCO by L'ARTÉSIENNE

ZI de l'Alouette, Rue François Jacob, 62800 Liévin



Les mystères du sphinx

Voici quelques mystères du sphinx (enfin) révélés... Découvrez des activités au cycle 4 et au lycée (et plus !) autour de l'hexiamant sphinx alliant représentations, manipulations et raisonnements. Belles découvertes !



Figure 1. Photo originale de Jorge Láscar. ▶

Yves Farcy



Quelle histoire !

Notre histoire débute en novembre 1953 lorsqu'un jeune étudiant de vingt-et-un ans donne, au Havard Mathematic Club, une conférence remarquée. Il reprend, pour commencer, le célèbre problème consistant à paver avec des dominos un échiquier diminué de deux de ses cases situées dans des coins opposés (figure 2) et donne une jolie preuve de son impossibilité.

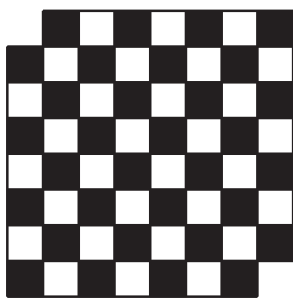


Figure 2. Échiquier « diminué ».

Dans la suite de son exposé, en prononçant pour la première fois le mot de polyomino, il baptise les formes constituées de carrés ayant au moins, deux à deux, un côté commun.

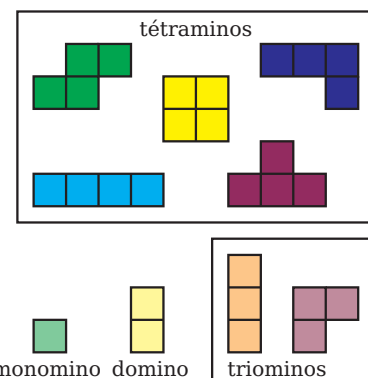


Figure 3. Polyominoes dont les célèbres tétraminoes qui sont utilisés dans le jeu « Tétris ».

Un an plus tard, l'exposé est publié dans *American Mathematical Monthly* [1] attirant la curiosité de nombreux mathématiciens. C'est le début de la longue et brillante carrière de son auteur, Solomon Wolf Golomb¹.



Figure 4. Solomon Wolf Golomb.

1. Mathématicien, ingénieur et professeur de génie électrique à l'université de Caroline du Sud, Solomon Wolf Golomb (1932–2016) a été entre autres l'un des pionniers dans l'étude des séquences de registre à décalages et l'inventeur d'une méthode de compression sans perte qui porte son nom.



Quelques années plus tard, le 26 octobre 1961, dans la rubrique Puzzles and Paradoxes du *New Scientist* [2] paraît une jolie énigme avec de drôles de formes obtenues par la juxtaposition de six triangles équilatéraux : il s'agit de recouvrir les dix-neuf hexagones de la figure 5 avec les dix-neuf pièces données dans la figure 6 sans les retourner.

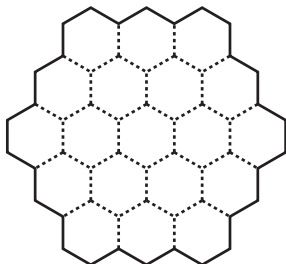


Figure 5.

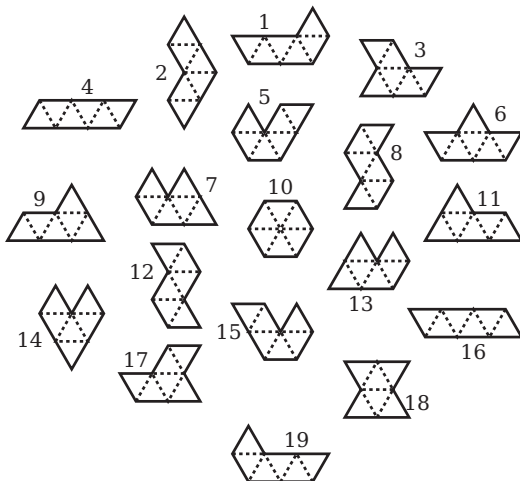


Figure 6. Dix-neuf pièces pour recouvrir dix-neuf hexagones !

La semaine suivante, Thomas H. O'Beirne², ingénieur écossais responsable de la rubrique et auteur du puzzle, citant les travaux de S.W. Golomb, baptise le losange constitué de deux triangles équilatéraux de *diamant* et, par extension, les dix-neuf pièces d'hexiamants³ [3]. Il affuble chacune d'elles d'un surnom : la crosse (1 et 19); le chevron (2); le panneau d'indication (3 et 17); la barre (4 et 16); le crochet (5 et 15); la couronne (6); le yacht

(7 et 13); le serpent (8 et 12); l'hexagone (10); le homard (14); le papillon (18) et celle qui nous intéresse aujourd'hui, le sphinx (9 et 11).

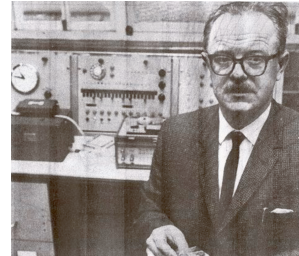


Figure 7. Thomas O'Beirne (crédit :).

En reprenant la notation des chimistes pour la chiralité⁴ des molécules, j'appellerai arbitrairement sphinx *R* l'hexiamant 9 et sphinx *S* l'hexiamant 11.

Si les hexiamants sont source de nombreux puzzles dont celui moins connu qui sert d'image d'introduction (figure 1), ils peuvent donner lieu à des activités intéressantes sur les périmètres, les aires, les axes et centres de symétrie.

Ainsi, le sphinx⁵ me sert depuis trois ans à introduire les translations et les rotations en Quatrième.

Premières activités

Tâche n° 1

Construire en vraie grandeur le logo ci-dessous sachant qu'il est formé de six triangles équilatéraux identiques de 5 cm de côté.

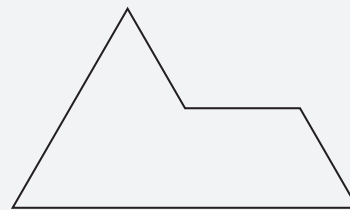


Figure 8.

La première tâche⁶ (figure 8) a pour but de mettre les élèves en activité et de travailler les compétences « chercher » et « représenter ».

2. De nombreuses énigmes publiées par Thomas O'Beirne dans le *New Scientist* ont été rassemblées dans le livre *Puzzles & Paradoxes* initialement publié par Oxford University Press en 1965.

3. On trouve indifféremment le terme hexamant en français.

4. « La chiralité est une caractéristique importante du vivant, c'est la propriété d'une molécule de ne pas être superposable à son image dans un miroir, comme la main droite n'est pas superposable à la gauche. » Source : .

5. C'est Gérard Martin, responsable du groupe Jeux de l'IRES (Institut de Recherche pour l'Enseignement des Sciences) de Toulouse, qui m'a fait découvrir le sphinx au festival international d'astronomie de Fleurance.

6. Nous verrons que le choix de 5 cm de côté n'est pas tout à fait innocent.



Elle me permet d'observer la manière dont les élèves communiquent entre eux et leur manière de s'organiser en s'appuyant notamment sur des schémas. Elle me donne aussi l'occasion de détecter très vite les problèmes de dyspraxie.

Tâche n° 2

Par quelle(s) transformation(s) peut-on passer du triangle 1 au triangle 2 ?

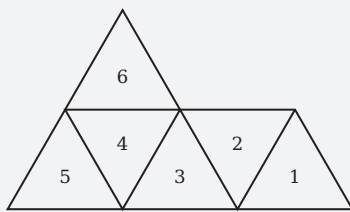


Figure 9.

On réactive ensuite les connaissances sur les symétries axiale et centrale (figure 9). Pour que les élèves soient d'accord, cela fait apparaître la nécessité de nommer les points. La définition du milieu et de la médiatrice d'un segment sont également retravaillées, ainsi que les codages associés.

Les élèves les plus rapides se chargent des transformations du triangle 1 au triangle 4, puis du triangle 1 au triangle 5. Je fais remarquer également, sans parler bien sûr d'involution, qu'appliquer deux fois la même symétrie nous fait revenir à la position de départ.

Tâche n° 3

Par quelle(s) transformation(s) peut-on passer du triangle 1 au triangle 6 ?

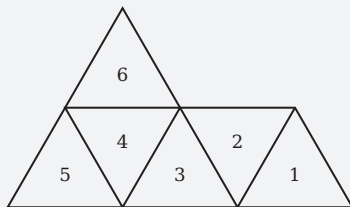


Figure 10.

J'introduis ainsi la translation (figure 10). J'ai au préalable prévu des triangles équilatéraux de 5 cm de côté pour leur permettre de glisser sans

tourner du triangle 1 au triangle 6 ainsi qu'un jeu aimanté pour le tableau. Chaque année, certains élèves remarquent qu'on peut aussi utiliser deux symétries axiales ou une symétrie centrale et une symétrie axiale.

Tâche n° 4

Par quelle(s) transformation(s) peut-on passer du trapèze BGEF au trapèze ABEJ ?

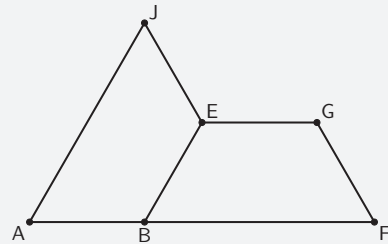


Figure 11.

Pour la rotation, suite à un travail avec Cyril Melac⁷, nous avons proposé de reprendre à nouveau le sphinx en remarquant qu'il était composé de deux trapèzes isocèles (figure 11). Là encore, avoir préparé des trapèzes pour les élèves est une aide fructueuse qui leur permet de trouver assez rapidement les deux rotations cherchées, dans le sens horaire et anti-horaire, ainsi que leur centre et la mesure de leurs angles.

Par ailleurs, lors de la séquence sur le théorème de Pythagore, les élèves ont pu calculer l'aire du sphinx.

Les tuiles auto-répliquantes ou reptuiles

Mais revenons un instant en 1962. Notre ami Solomon Golomb a déjà enregistré plusieurs succès au Jet Propulsion Laboratory et au MIT en développant la télémétrie radar et s'apprête à devenir professeur de l'Université de Caroline du Sud. C'est alors qu'il publie une série d'articles sur les polygones qui peuvent être reproduits en un polygone semblable, soit par juxtaposition soit par découpage d'un certain nombre de copies de lui-même. Il les nomme avec malice les reptuiles (rep-tile en anglais).

7. Cyril est un collègue du collège Louisa Paulin de Muret (31), membre du groupe Jeux de l'IRES de Toulouse et membre de l'APMEP.



Ces publications n'ont pas échappé à la sagacité de Martin Gardner qui, après les polyominos, fait connaître les travaux de Golomb au grand public dans les colonnes du *Scientific American* en 1963 [4]. Parmi les nombreux exemples apparaît bien sûr le sphinx qui est un 4-reptuile c'est-à-dire que quatre copies de lui-même permettent de construire un sphinx semblable.

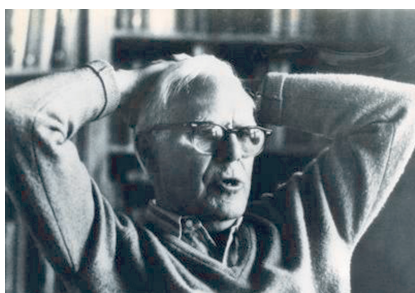


Figure 12. Martin Gardner .

Afin de proposer aux élèves de construire un 4-sphinx, où la difficulté vient du fait qu'une pièce est symétrique des trois autres, j'ai créé deux types de jeux de sphinx.

Le premier a été réalisé à la découpe laser : j'ai peint puis vernis le bois MDF⁸ et choisi rouge côté S et bleu côté R (figure 13).

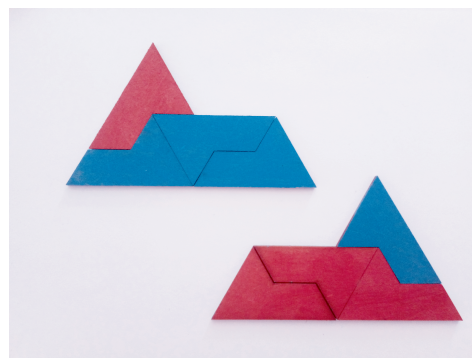


Figure 13.

Le second est réalisé en origami. En effet, David Mitchell a créé un pliage du sphinx à partir du rectangle restant d'une feuille A4 après y avoir découpé un carré de 21 cm de côté pour faire... de l'origami. Les Anglo-Saxons le désignent du nom significatif de *left rectangle*.

Voici les étapes de construction du sphinx S.

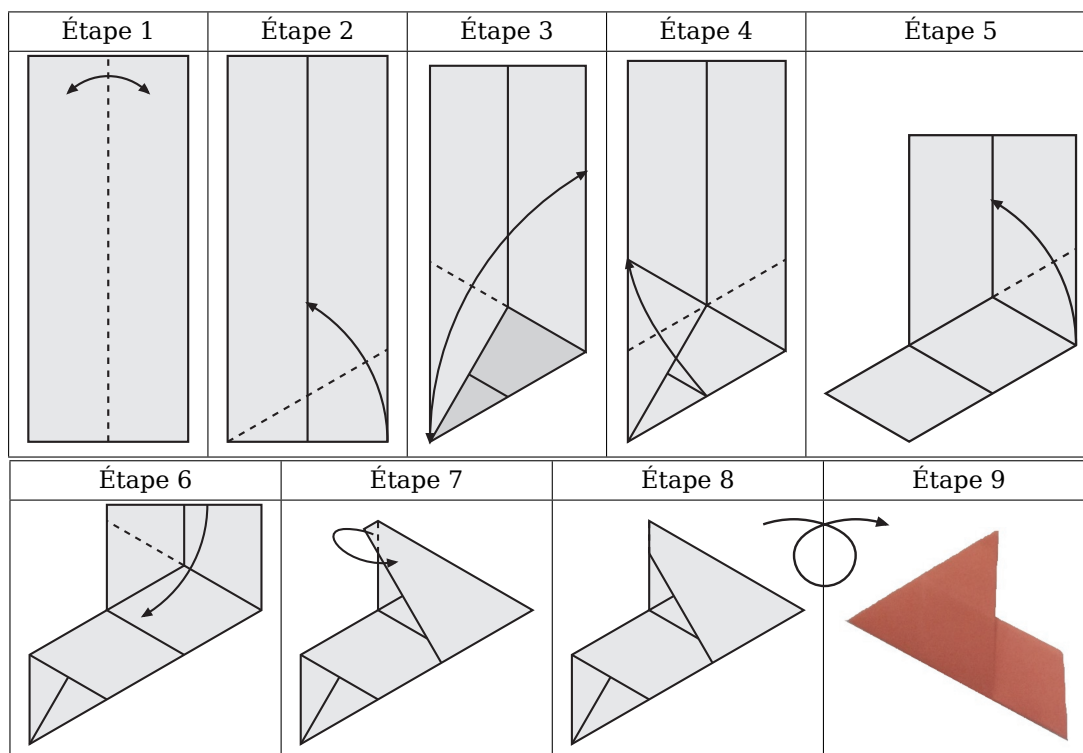


Figure 14. Construire un sphinx en origami.

8. Aussi connu sous le nom de médium, le MDF ou Medium Density Fireboard en anglais désigne littéralement un panneau composite de fibres de bois à densité moyenne.



Au passage, puisque l'on part d'un rectangle de 21 cm par 8,7 cm, le plus petit côté de ce sphinx est $\frac{8,7\sqrt{3}}{3}$ cm qui est une excellente approximation de 5 cm. Les élèves peuvent ainsi utiliser la construction réalisée lors de la tâche n° 1 pour vérifier leur pliage.

Pour ma part, à la séance précédant l'activité, je demande aux élèves de préparer au moins quatre sphinx R d'une même couleur et à leur voisins quatre sphinx S d'une autre couleur. Cette année, voulant un peu de place sur le mur de ma classe, j'ai opté pour des *left rectangles* de feuilles A5 (figure 15).

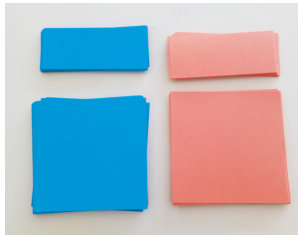


Figure 15.

Le jour même, je leur demande d'essayer de créer avec quatre pliages le 4-sphinx. Face à l'impossibilité d'y arriver avec les hexiamants de la même couleur, certains élèves trouvent eux-mêmes l'idée d'échanger un sphinx avec leur voisin, idée qui circule rapidement dans la classe.

On peut réactiver alors le travail sur les transformations en prenant par exemple le 4-sphinx S (figure 16) :

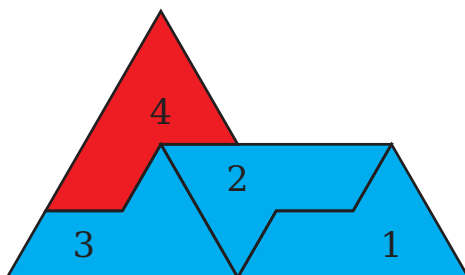


Figure 16.

Par quelle(s) transformation(s) peut-on passer du sphinx 1 au sphinx 2, du sphinx 1 au sphinx 3 ?

Pour les plus avancés, on peut même introduire la symétrie glissée, isométrie du plan qui n'est cependant pas au programme du collège.

On peut transformer le sphinx 3 en sphinx 4 par une symétrie axiale suivie d'une translation. Déterminer un axe de symétrie et une translation possible (la réponse n'étant pas unique).

Le fait de pouvoir manipuler les objets permet aux élèves de trouver la solution suivante : $\vec{u} \circ S_{\Delta}$ (figure 17).

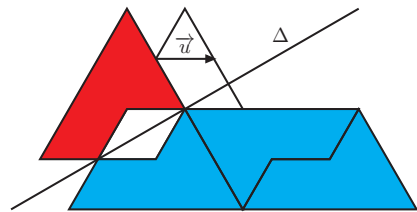


Figure 17.

On pose bien sûr aussi les questions naturelles sur les agrandissements, notre nouveau sphinx étant semblable au premier :

Par combien a-t-on multiplié les longueurs des côtés ? Son périmètre ? Son aire ?

Et vient la question :

Quel nouveau sphinx semblable au sphinx 1 peut-on alors construire ?

Bien sûr, un 16-sphinx et, par extension, un 4^k -sphinx avec $k \in \mathbb{N}^*$ pour obtenir de jolies décorations sur son mur après un travail de groupe et un peu de pâte à fixer (figure 18) ! Je m'y réfère souvent pour y retravailler l'effet des agrandissements sur les périmètres et les aires.

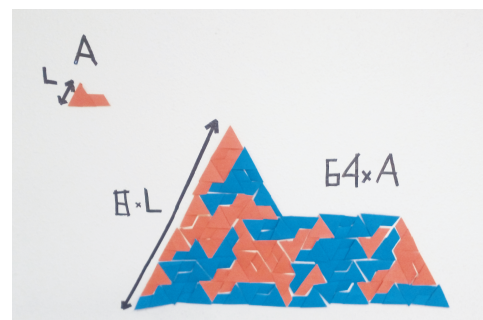


Figure 18.



Incidentement, on obtient un pavage apériodique du plan. Celui-ci ne répond pas bien sûr au problème einstein⁹ récemment résolu puisqu'on peut avec deux sphinx réaliser un parallélogramme qui lui pave de façon périodique le plan.

Un problème de Martin Gardner sur les 4^k-sphinx

Cette fresque murale (figure 18) est une introduction pour le joli problème que pose Martin Gardner en 1987 dans *Riddle of the Sphinx*¹⁰ [5], dont voici en substance l'énoncé.

On choisit un sphinx S (étape 0) et on le découpe en quatre copies de lui-même. On obtient alors trois sphinx R et un sphinx S à l'étape 1. Puis on recommence. On obtient ainsi six sphinx R et dix sphinx S à l'étape 2 (cf. figure 19). Qu'en est-il à l'étape 7 ?

Si Martin Gardner le pose en division, je le pose en extension avec les collégiens en demandant combien de sphinx il leur faudrait pour réaliser un 4⁷-sphinx.

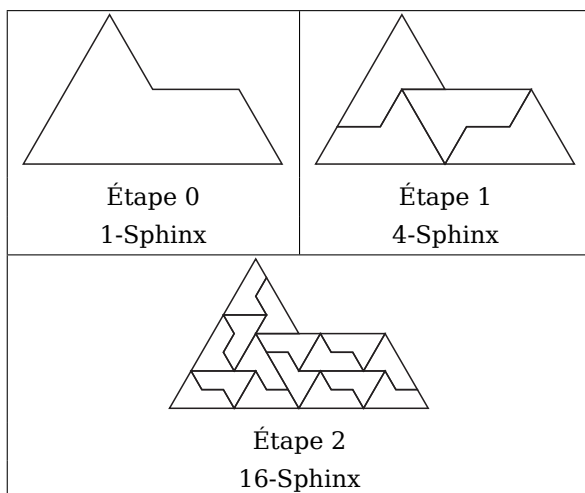


Figure 19.

Le travail précédent permet de compléter la feuille de calcul suivante (figure 20). Nous constatons qu'un sphinx R génère trois sphinx S et un sphinx R et inversement pour le sphinx S .

Les élèves en déduisent alors les deux formules « $=B5+3*C5$ » pour la cellule B6 et « $=C5+3*B5$ » pour C6 qu'ils recopieront vers le bas pour trouver la solution cherchée.

	A	B	C
1	Étape	Nombre de sphinx S	Nombre de sphinx R
2	0	1	0
3	1	1	3
4	2	10	6
5	3	28	36
6	4		
7	5		
8	6		
9	7		

Figure 20. Feuille de calcul.

On peut aller plus loin au lycée en cherchant les formules explicites des deux suites générées.

On peut en effet définir les deux suites $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comptant respectivement le nombre de sphinx R et le nombre de sphinx S . Ainsi :

$$\begin{cases} R_{n+1} = 3S_n + R_n \\ S_{n+1} = 3R_n + S_n \end{cases} \text{ avec } R_0 = 0 \text{ et } S_0 = 1.$$

Pour trouver les expressions explicites de R_n et S_n , les solutions sont nombreuses . Nous sommes souvent tentés d'attendre que les élèves aient engagé le travail sur le calcul matriciel pour poser ce type d'exercice. Toutefois, on sait que l'espace des suites solutions est un espace vectoriel de dimension 2 dont on cherche une famille libre parmi les suites géométriques. Cela revient à chercher deux suites géométriques $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui sont combinaisons linéaires de R_n et S_n .

Sans perte de généralité, on peut demander aux élèves de trouver tous les nombres a tels que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $T_n = S_n + aR_n$ soit géométrique.

Si l'on note q la raison de cette suite géométrique, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} T_{n+1} &= S_{n+1} + aR_{n+1} = 3R_n + S_n + a(3S_n + R_n) \\ &= (3a + 1)S_n + (3 + a)R_n \end{aligned}$$

$$T_{n+1} = qT_n = qS_n + aqR_n$$

9. « En géométrie plane, le problème einstein (à ne pas confondre avec le physicien Albert Einstein) s'interroge sur l'existence d'une tuile unique connexe formant un pavage apériodique du plan ». Source Wikipedia : .

10. *Riddle of the Sphinx* est un recueil de problèmes publiés précédemment dans le magazine *Asimov's Science-Fiction*.



Il vient $\begin{cases} q = 3a + 1 \\ aq = 3 + a \end{cases}$ soit $\begin{cases} q = 3a + 1 \\ a^2 = 1 \end{cases}$.

On en déduit qu'il existe deux suites solutions $T_n = S_n + R_n = 4^n$ et $T'_n = S_n - R_n = (-2)^n$. La première traduit le fait que le sphinx est un 4^n -reptuile et la seconde l'alternance de la majorité de sphinx S et de sphinx R dans leur construction. Connaissant la somme et la différence de R_n et S_n , on déduit alors que

$$R_n = \frac{4^n - (-2)^n}{2} \text{ et } S_n = \frac{4^n + (-2)^n}{2}$$

et on trouve $R_7 = 8\,256$ et $S_7 = 8\,128$.

Le rusé Martin Gardner propose, lui, de conjecturer les formules de T_n et de T'_n à partir du tableau suivant (figure 21) puis de les démontrer par récurrence.

Étape	A	B	C	D	E
Étape	Nombre de sphinx S	Nombre de sphinx R	Total	Différence Sn-Rn	
2	0	1	0	1	1
3	1	1	3	4	-2
4	2	10	6	16	4
5	3	28	36	64	-8
6	4				
7	5				
8	6				
9	7				

Figure 21. Feuille de calcul étendue.

On trouve que le nombre total de sphinx à l'étape 7 est $4^7 = 16\,384$ et qu'il y a $2^7 = 128$ sphinx R de plus que de sphinx S .

On peut développer ensuite plusieurs stratégies :

- ajouter et soustraire la moitié de 128 à la moitié de 16 384 ;
- s'il y avait ces 128 sphinx R en moins, soit 16 256, il y aurait autant de R que de S , soit 8 128. Il y a donc 8 128 sphinx S et 8 256 sphinx R .

Compléments pour les enseignants

Retour vers les reptuiles

Mais nous ne sommes pas au bout de nos surprises ! Nous avons vu que le sphinx est $4k$ -reptuile. Pour quels autres entiers naturels n , le sphinx pourrait-il être un n -reptuile ?

Les 2-reptuiles sont connus. Il y a trois polygones (le triangle rectangle isocèle, le rectangle et le parallélogramme de ratio $1 : \sqrt{2}$) et quatre fractales (le dragon de Levy, le dragon de Heighway, les dragons jumeaux — *twindragons* — et les dragons jumeaux — « ternes »-*tame twindragons* — .

En prenant comme unité la longueur du côté d'un des six triangles équilatéraux qui constitue le sphinx, les mesures des longueurs de ses côtés sont 1, 1, 1, 2 et 3. Par juxtaposition sans trou, on obtiendra des côtés qui seront des entiers et donc il ne sera possible de multiplier le côté que par un nombre entier n et donc le sphinx ne peut-être qu'un n^2 -reptuile.

Donc la première question est de savoir si on peut construire un 9-sphinx.

Pour aider à la construction d'une solution, on peut partir d'un sphinx S et reprendre comme unité le côté d'un triangle équilatéral. Les mesures des longueurs des côtés du 9-sphinx sont donc 3, 3, 3, 6 et 9 (figure 22). En regardant les mesures manquantes, on pense à placer deux parallélogrammes (2, 3) (figure 23) pour compléter les côtés de mesure 3 (figure 24).

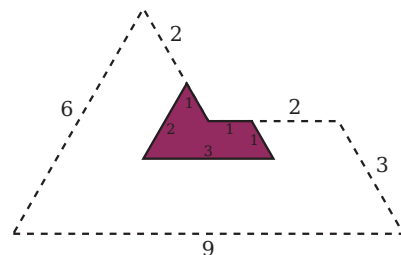


Figure 22.

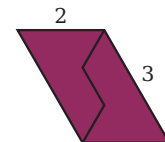


Figure 23. Parallélogramme (2, 3) S .

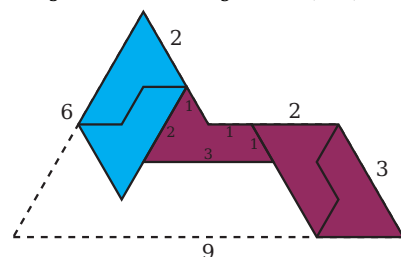


Figure 24.



On complète ensuite avec un troisième parallélogramme $(2, 3)$ R (figure 25) et enfin avec un pentagone constitué de deux sphinx, ce qui achève la construction du 9-sphinx S (figure 26). Ce n'est pas la seule solution et on peut construire trois autres 9-sphinx S .

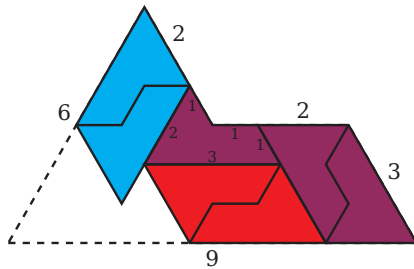


Figure 25.

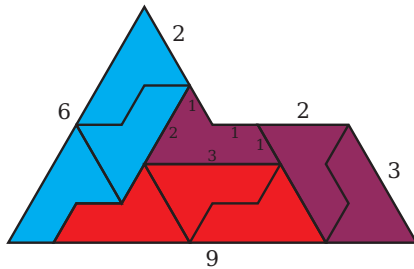


Figure 26.

Au passage, s'il y a donc quatre façons de construire un 9-sphinx S , il y en a seize pour un 16-sphinx S , cent-cinquante-trois pour le 25-sphinx S , la suite ayant été publiée dans l'OEIS [jusqu'au 169-sphinx](#).

Mais comment démontrer que le sphinx est, pour tout n un n^2 -reptuile ?

Une première recherche fait penser que l'on peut construire à partir d'un sphinx de côté n un sphinx de côté $n + 2$ comme pour le 9-sphinx. Mais la construction d'un sphinx de côté 4 à partir du sphinx de côté 2 laisse circonspect. L'idée est donc de construire, non pas le sphinx de côté $n + 2$, mais le sphinx de côté $n + 3$.

On peut commencer la preuve par récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(n)$ la proposition : le sphinx est un n^2 -reptuile. On sait que $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$ sont vraies.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; supposons que $P(n)$ est vraie. Construisons le sphinx de côté $n + 3$ possédant des côtés de mesures $n + 3$, $2n + 6$ et $3n + 9$. Une étude préalable montre que, pour l'hérédité, il faut envisager deux cas suivant la parité de n .

- Si n est pair, en posant $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, on peut compléter notre n^2 -sphinx de la façon suivante : les côtés du sphinx de côté $n + 3$ ont donc pour mesure $2k + 3$, $4k + 6$ et $6k + 9$.

On définit trois zones A, B, C qui sont des parallélogrammes ayant pour mesure $(3, 4k)$, $(3, 2k)$ et $(3, 6k)$ que l'on peut donc compléter avec des parallélogrammes $(2, 3)$. L'espace laissé vide est comme par magie un 9-sphinx (figure 27).

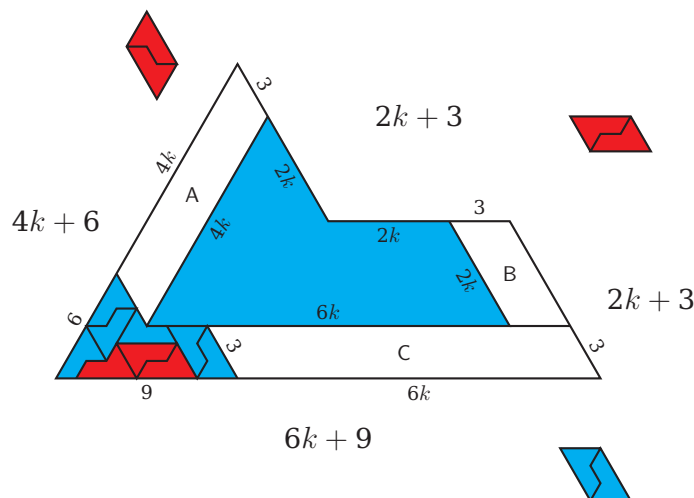


Figure 27.



- Si n est impair, en posant $n = 2k' + 1$ avec $k' \in \mathbb{N}$, cette fois-ci les côtés du sphinx de côté $n + 3$ ont donc pour mesure $2k' + 3$, $4k' + 6$ et $6k' + 9$. On définit trois zones nouvelles zones A' , B' , C' qui sont des parallélogrammes ayant pour

mesure $(3, 4k' + 2)$, $(3, 2k' + 4)$ et $(3, 6k')$ que l'on peut à nouveau compléter avec nos parallélogrammes $(2, 3)$.

L'espace laissé vide est à nouveau un 9-sphinx !
(figure 28).

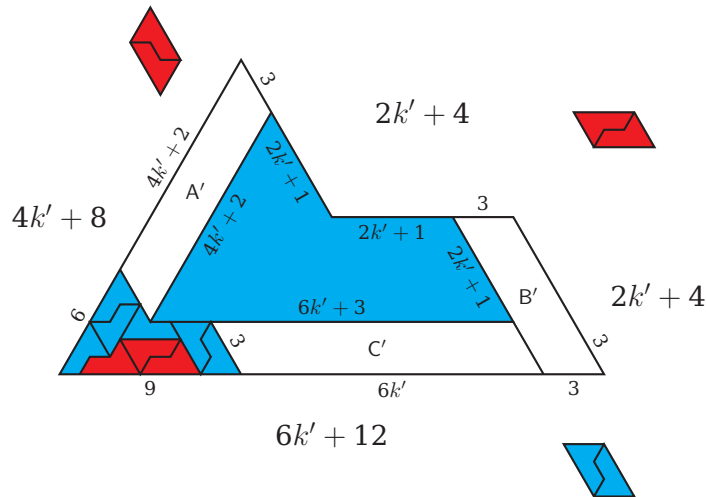


Figure 28.

Donc $P(n + 3)$ est vraie.

Et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) \implies P(n+3)$;
d'autre part, $P(1)$, $P(2)$ et $P(3)$ sont vraies ; donc,
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le sphinx est un n^2 -reptuile.

Les sphinx peuvent-ils recouvrir une face d'une pyramide ?

En raisonnant sur l'angle au sommet, on montre facilement si on veut paver un triangle avec des sphinx que celui-ci doit être équilatéral. De plus

son côté doit être un multiple des côtés des triangles équilatéraux qui composent le sphinx. Reste à connaître leurs dimensions. Pour cela nous allons raisonner par Analyse-Synthèse.

Analyse

Sans perte de généralité, considérons que les triangles équilatéraux constituant le sphinx ont pour côté 1 et définissons l'unité d'aire t.e telle que l'aire de chacun de ces triangles fasse une unité d'aire¹¹.

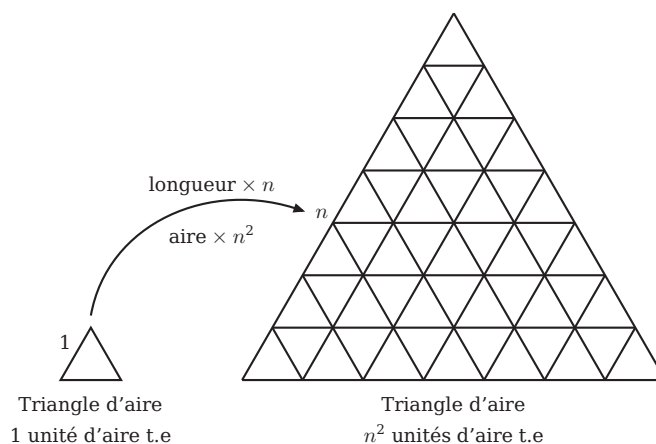


Figure 29.

11. t.e pour *triangle équilatéral*.



Le triangle que nous pourrions paver aura pour côté $n \in \mathbb{N}^*$, c'est donc un agrandissement d'un facteur n du triangle de côté 1. Son aire sera donc n^2 t.e. Il est donc constitué de n^2 triangles de côté 1.

Un sphinx étant composé de 6 triangles, on en déduit que $n^2 \equiv 0 \pmod{6}$ puis, par disjonction des cas, que $n \equiv 0 \pmod{6}$ donc il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 6k$.

On remarque de plus que le sphinx, quelle que soit son orientation utilisable dans le pavage, est composé de 4 triangles orientés dans un sens et de 2 dans l'autre. Notons arbitrairement + les triangles orientés vers le haut et - les triangles orientés vers le bas (figure 30). On peut alors constater que l'on a six sphinx (+2) et six sphinx (-2).

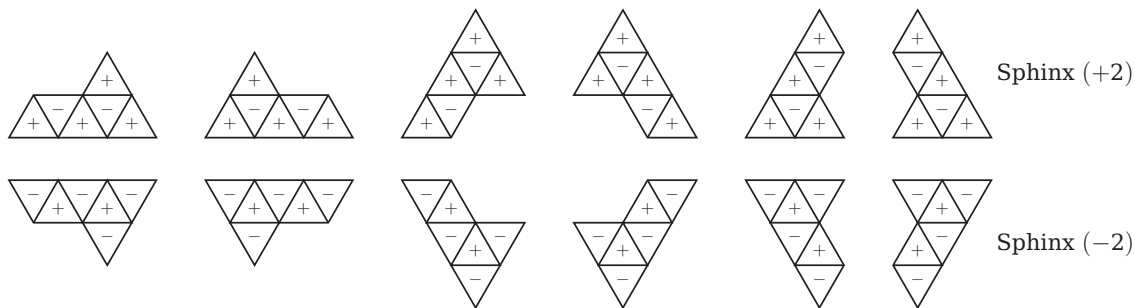


Figure 30.

Dans le triangle que nous essayons de paver, notons t_n^+ le nombre de triangles + (et respectivement t_n^- le nombre de triangles -).

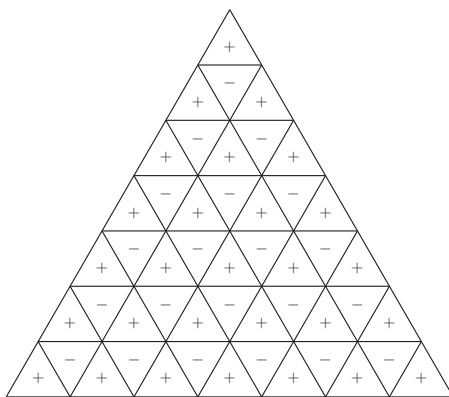


Figure 31.

On établit par récurrence que :

$$t_n^+ = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \text{ et } t_n^- = \sum_{i=1}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Et comme $n = 6k$, on obtient $t_n^+ = 3k(6k+1)$ et $t_n^- = 3k(6k-1)$.

Puisqu'on le pave avec des sphinx et que leur nombre de triangles + et - sont pairs, t_n^+ et t_n^- sont donc pairs.

Supposons que k est impair ; alors $3k$ et $(6k+1)$ le sont également et donc $3k(6k+1)$ est impair — il en est de même pour $3k(6k-1)$ — ce qui est impossible ; donc k est pair et donc il existe $k' \in \mathbb{N}^*$ tel que $k = 2k'$; donc $n = 12k'$, donc n est un multiple de 12. Ce qui achève l'analyse.

Synthèse

Essayons de paver avec des sphinx un triangle équilatéral de côté 12. Puisque son aire est égale à 144 unités d'aire t.e, il nécessitera donc $\frac{144}{6} = 24$ sphinx. De plus $t_n^+ - t_n^- = n = 12$. Il faut donc 6 sphinx (+2) de plus que de sphinx (-2) soit 15 sphinx (+2) et 9 sphinx (-2), ce qui aide à la construction d'une solution. Walter Trump a montré qu'il existe 830 façons différentes de le faire . En voici trois, invariantes par rotation d'angle 120° :

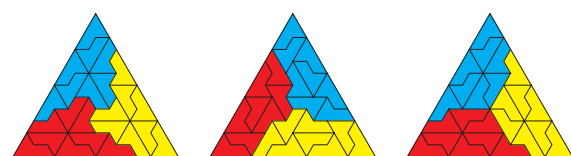


Figure 32.

Reste à répondre à notre question. Pour que cela soit possible, il faudrait avoir des faces



latérales équilatérales, c'est-à-dire que le quotient du côté de la base carrée par la hauteur vaille $\sqrt{2}$. C'est presque le cas de la pyramide de Khéphren  puisque le rapport valait à l'origine 1,495 5 environ. On peut donc clôturer cette étude par la mise en abîme suivante en miroir inversé de la première illustration :



Figure 33. Photo originale de Christian Rosenbaum.

Références

- [1] S. W. Golomb. « Checker Boards and Polyominoes ». In : *The American Mathematical Monthly* (1954).
- [2] T. H. O'Beirne. « Pell's Equation in Two Popular Problems ». *Puzzles and Paradoxes*. In : *New Scientist* n° 258 (26 octobre 1961), p. 260-261.
- [3] T. H. O'Beirne. « Pentominoes and Hexiamonds ». *Puzzles and Paradoxes*. In : *New Scientist* n° 259 (2 novembre 1961), p. 316-317.
- [4] Martin Gardner. « On reptiles, polygons that can make larger and smaller copies of themselves ». In : *Scientific American* (1963).
- [5] Martin Gardner. « Riddles of the sphinx and Other Mathematical Puzzle Tales ». In : *American Mathematical Society* (1987).



Yves Farcy est professeur de mathématiques au lycée français de Los Angeles (États-Unis).

yves.farcy@gmail.com

© APMEP septembre 2024

Sommaire du n° 553



Accompagnement des élèves

Éditorial

Opinions

- ✦ Groupes de niveaux en mathématiques au collège
Jean-Claude Rauscher 3

De l'utilisation des matériels de numération
Serge Petit 6

- ✦ Quel avenir pour l'inclusion ?
Claire Lommé 12

Avec les élèves

Les fractions, c'est pas du gâteau !
Guillaume Assali 14

« Le plus grand produit » en CM1
G. Aldon, F. Margerand, S. Roussel & A. Viry-Leroi ... 26

Vers la ligne graduée en Grande Section
Alexandra Homsy 34

Suivi d'une constellation sur les grandeurs
Mathilde Pretis 38

- ✦ Vers plus d'autonomie
Amélie Cazottes 43

- ✦ Accompagner les élèves en lycée professionnel
Mélanie Berthelot-Lepage 47

- 1 ✦ Un RallyCoach avec les élèves ?
Erwan Démézet & Gaëlle Morvan 52

- ✦ La compétence « Chercher » en Troisième
Morgan Gilot 59

Ouvertures

Les mystères du sphinx
Yves Farcy 66

Relations de voisinage au pays basque
Pierre Carriquiry 73

Récréations

Au fil des problèmes
Frédéric de Ligt 78

Des problèmes dans nos classes
Valérie Larose 81

Au fil du temps

Le CDI de Marie-Ange
Marie-Ange Ballereau 83

Matériaux pour une documentation 85

Les blocs de base 10
Gonzague Jobbé-Duval 89



CultureMATH

