

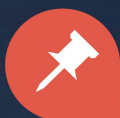
Le bulletin de l'APMEP - N° 553

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Juillet, août, septembre 2024

Accompagnement des élèves



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :

<https://afdm.apmep.fr>



Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufilesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est jointe la plaquette
Visages 2024-2025 de l'APMEP.

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » **numériques** : Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Audrey DUGUE, Nada DRAGOVIC, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Éric ASTOUL, Pol LE GALL.

Équipe T_EXnique : Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Olivier GÉRARD, Benoît MUTH, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Nicolas PETIOT, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Anne-Sophie SUCHARD.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : septembre 2024. ISSN : 2608-9297.

Impression : iLLiCO by L'ARTÉSIENNE

ZI de l'Alouette, Rue François Jacob, 62800 Liévin



De l'utilisation des matériels de numération

Quelle classe d'école élémentaire ne dispose pas de son matériel de numération, rangé au fond d'une armoire, sorti de temps à autre ou au contraire utilisé en continu par les élèves ? Que penser de ce matériel ? Favorise-t-il les apprentissages comme on le croit ? Est-il efficace ? Serge Petit fait le point.

Serge Petit



Enseigner le système de numération nécessite des manipulations souvent effectuées avec du matériel en vente dans le commerce. Le choix du matériel pour enseigner le système de numération de position n'est certainement pas anodin ni du point de vue des apprentissages, ni des conceptions que se font les élèves du système de numération. C'est ce que nous allons tenter de montrer en élargissant le propos en référence à ce qu'il est convenu d'appeler des *artefacts*.

Le concept d'*artefact*

Le mot « artefact » dans le sens commun

Le mot *artefact* est construit sur les éléments de mots *arti-* (artisan, artifice, etc.) et *-fact-* (facteur, factice, etc.) auquel le dictionnaire BRIO¹ attribue respectivement les sens « art, adresse, métier » et « faire, rendre ». L'élément *-fact-* est proche, par son sens, du mot *construction* (*factus*). Il s'agit donc d'objets construits, élaborés à dessein.

D'où le sens commun du mot *artefact* fourni par le même dictionnaire : « *phénomène d'origine humaine, artificielle (dans l'étude des faits naturels)*. » Les « faits naturels » étant assez éloignés des mathématiques, le sens du mot *artefact* doit être précisé dans le cadre de l'enseignement des mathématiques.

Le mot « artefact » en didactique

Mariotti et Maracci [1] précisent qu'un *artefact* est « un objet en soi, symbolique ou matériel,

conçu pour répondre à un besoin spécifique », mais aussi une « ressource susceptible d'améliorer aussi bien l'enseignement que l'apprentissage ». Rabardel (1995, in Mariotti et Maracci, Chap 5.5) écrit, à propos d'un *artefact* qu'il est « un objet [...] élaboré par l'homme pour s'inscrire dans des activités finalisées ». Cette définition insiste sur les finalités de l'*artefact*.

La question se pose alors de savoir si les *artefacts* permettent toujours d'atteindre les finalités pour lesquelles ils ont été conçus et donc de savoir s'ils améliorent ou non l'enseignement/les apprentissages des mathématiques. Certains d'entre eux pourraient en effet présenter des effets contraires, rendre plus difficiles certains apprentissages, et donc s'ériger en obstacles. Un des risques étant que l'enseignement se porte davantage sur l'utilisation de l'*artefact* lui-même que sur l'objectif mathématique visé, sur la finalité, le concept dont il est censé faciliter la compréhension. Un autre risque est que l'*artefact* utilisé ne permette pas à l'élève d'atteindre la signification experte. Que sont ces *artefacts*, quels sont donc les effets induits par certains *artefacts* ?

Artefacts symboliques et artefacts matériels en numération

Les mathématiques étant conceptuelles, toute expression des mathématiques passe nécessairement par l'utilisation d'*artefacts*, en premier lieu pour exprimer le concept visé, à tel point qu'il est impossible d'isoler le concept de certains

1. BRIO, Dictionnaire de la langue française. Le Robert. 2004.



artefacts permettant de communiquer à son propos. Vergnaud² l'exprime très clairement dans la définition qu'il donne du concept en y intégrant toutes les façons de le désigner ou de se le représenter, donc, de fait, certains *artefacts*.

Une première analyse et un classement de différents *artefacts* dans le champ de l'apprentissage du système de numération peuvent consister à séparer les *artefacts* symboliques des *artefacts* matériels, en référence à Mariotti et Maracci.

Dans la classe des *artefacts symboliques* il serait possible de placer la langue naturelle, les signes mathématiques (le signe « 7 » par exemple), le système de numération de position, les noms de nombres, les tableaux de numération en colonnes type « CDU », les constellations (comme sur les faces des dés), les jeux de couleurs portant sur les chiffres servant à désigner un nombre (ex. : 32) proposés dans certains ouvrages scolaires, etc.

Du côté des *artefacts matériels* on pourrait placer tous les matériels de numération, les boîtes à œufs, les dés, les doigts, les réglettes Cuisenaire, les abaques, les boîtes à alvéoles, et bien d'autres proposées dans les ouvrages scolaires, certains albums dits « à compter », etc.

Les *artefacts* peuvent aussi être vus sous un autre angle.

Autre classement des *artefacts*

Les *artefacts*, qu'ils soient matériels ou symboliques, sont contraints par de nombreux facteurs, notamment le bain culturel et les conceptions que se fait son créateur (ou son utilisateur) à la fois des mathématiques et de leur enseignement.

Le concept de numération de position, *artefact* conçu à dessein par l'humanité pour représenter les nombres est un *artefact* majeur, qui est apparu dans l'histoire après l'utilisation par différentes civilisations d'autres *artefacts* présentant certains inconvénients (numération babylonienne,

romaine, maya, égyptienne, etc.). Son enseignement implique l'utilisation d'autres *artefacts* matériels et symboliques. Le choix pédagogique de tel ou tel *artefact* n'est pas sans conséquences comme le montrent Mariotti et Mariacci (2002) qui définissent ainsi le *potentiel sémiotique d'un artefact* :

« Le potentiel sémiotique d'un *artefact* représente le double lien qui peut s'établir entre :

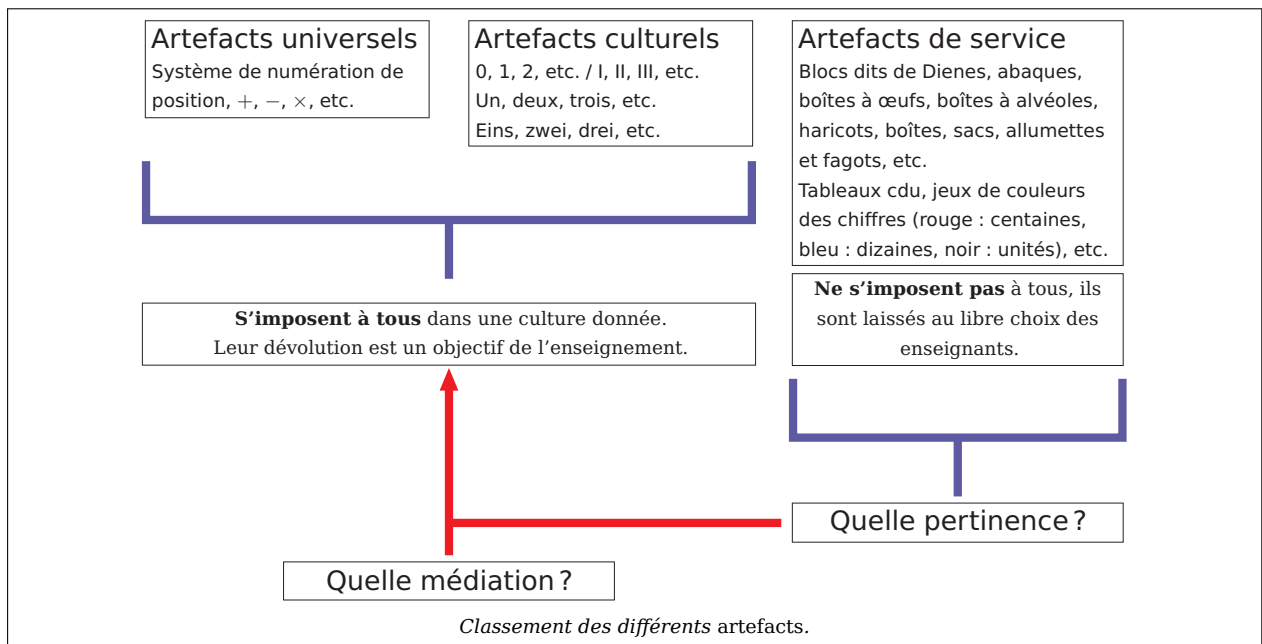
- i) un *artefact* et les significations personnelles émergeant de son utilisation finalisée ;
- ii) cet *artefact* et les significations mathématiques évoquées par son usage, reconnaissables comme mathématiques par un expert. »

Tout *artefact*, toute manipulation d'un *artefact*, construisent chez l'élève des représentations, des significations, des manières particulières d'opérer. Ce constat interroge donc la pertinence du choix de tel ou tel *artefact* tout autant que la médiation de l'enseignant entre tel *artefact* choisi et l'objet de savoir mathématique visé.

Une question se pose alors : tous les *artefacts* ont-ils le même statut ? Le précédent classement reposait sur le caractère matériel ou symbolique des *artefacts*. Un autre regard est possible. Il s'agit de prendre en compte la nécessité ou non de proposer aux élèves un *artefact* donné. Certains *artefacts* s'imposent à tous, ils seront dits *universels*, d'autres ne s'imposent que dans une culture donnée, ils seront dits *culturels*, enfin, certains *artefacts* ne dépendent que du choix des enseignants, ils seront appelés *artefacts de service*. Le schéma page suivante résume ce classement dans le cadre de l'enseignement de la numération de position.

Dès lors que les *artefacts* de service ne s'imposent ni dans une culture donnée, ni de façon universelle, dès lors que l'on sait que les *artefacts* ont un *potentiel sémiotique*, il importe de s'interroger sur leur pertinence puisque le potentiel sémiotique d'un *artefact* pourrait engendrer des conceptions éloignées des finalités visées.

2. Vergnaud G. « La théorie des champs conceptuels », *Recherche en didactique des mathématiques*, vol. 10, 1990.



Du même constat découle le fait que l'enseignant devra exercer une médiation, qui peut être plus ou moins lourde, pour permettre aux élèves utilisant un *artefact* donné d'atteindre « les significations mathématiques [...] reconnaissables comme mathématiques par un expert »³.

Il convient donc d'analyser la pertinence du choix de tel ou tel *artefact* dans l'enseignement.

Analyse de deux *artefacts* courants

Arrêtons-nous sur deux *artefacts* de service fréquemment présents dans les manuels et dans les classes, dont la finalité est de conduire les élèves à la compréhension du système de numération de position.

Un *artefact matériel* : les blocs de Dienes

En le limitant à l'apprentissage de la représentation des nombres jusqu'aux milliers, ce matériel se compose de petits cubes unitaires ; de barres insécables⁴ représentant dix de ces cubes et dont la longueur est égale au décuple de celle du cube unitaire ; de plaques carrées dont les longueurs

des côtés sont le décuple de celle du cube unitaire, ces plaques représentent une centaine ; de blocs cubiques dont les arêtes ont même longueur que les barres, ils représentent le millier.

L'élève est placé devant des entités différentes, petits cubes, barres, plaques. La signification que l'élève se construit à partir d'un tel matériel est que certains objets sont appelés des dizaines, d'autres centaines, d'autres milliers. Avec de tels objets différents, une des caractéristiques essentielles de la numération de position risque de lui échapper, sauf médiation forte de l'enseignant. En effet, le caractère *duel* de la dizaine, qui est à la fois « un » (un regroupement de dix) et « dix » (les dix unités) ne sera sans doute pas perçu par l'élève. Il en est de même aux ordres supérieurs. Pour avoir observé des élèves utiliser ce matériel en classe, il nous est apparu que les échanges (une barre d'une dizaine contre dix unités) n'étaient pas naturels chez les élèves et nécessitaient une forte médiation de l'enseignant pour les guider vers la signification mathématique visée. Pour les élèves observés en situation de simuler un calcul avec ce matériel, dégroupier n'apparaissait pas spontanément, ce qui constitue un obstacle majeur dans

3. Op. cité.

4. Ce type de matériel est de plus en plus formé de barres, de plaques ou de gros cubes sécables ou comportant des traits laissant imaginer les unités. Nous ne traitons que du cas où le matériel est insécable. Voir aussi l'article de Gonzague Jobbè-Duval p. 89.



l'apprentissage du système de numération usuel. L'essence de la numération est le regroupement et sa maîtrise passe par le fait de pratiquer avec aisance le dégroupement.

Un artefact symbolique : le tableau CDU

À ce matériel est parfois associée une représentation symbolique tabulaire constituée des tableaux analogues à celui présenté ci-contre.

Unités		
c	d	u
2	3	7

La disposition en colonnes de ces tableaux ne fait que renforcer l'idée de la séparation des unités des différents ordres et ce d'autant plus qu'il est souvent demandé aux élèves de dire « le chiffre des dizaines » ou des centaines ; ce qui, associé à la confusion courante chiffre/nombre, consolide encore davantage le cloisonnement qui s'érige contre la signification experte visée.



Complète ce tableau.

Nombre	Nombre de dizaines	Nombre d'unités
12	...	...
23	...	...
28	...	...
31	...	...

Atelier de mathématiques, Cahier d'entraînement, Nathan 2017.

Cette signification experte est le fait que les dizaines sont constitués d'unités, les centaines, de dizaines et d'unités, etc. L'utilisation de ce type tableau peut donc consolider chez l'élève la représentation vue dans le point précédent, qui induit de fait une indépendance des unités de chacun des ordres.

Cet artefact peut conduire les élèves à une signification erronée des désignations des nombres dans le système de numération de position. Il y a en effet fort à parier que peu d'élèves écriraient 23 dans la colonne « nombre d'unités ». Et ce pour plusieurs raisons. Tout d'abord, le tableau lui-même incite à ne placer qu'un chiffre dans chacune des colonnes ; ensuite pour une autre raison relevant de la formation des enseignants dont certains, insuffisamment formés, reconduisent ce

type d'habitude ; enfin et ce n'est sans doute pas la dernière raison, pour une raison linguistique, à savoir la confusion entre chiffre et nombre dans le langage courant.

Pour ces raisons, relevant d'un conditionnement, répondre 23 dans la colonne « Nombre d'unités » serait souvent considéré comme erroné. C'est pourquoi de nombreuses publications récentes favorisent ces écritures variées dans ce type de tableaux, comme le remarquent Houdement et Tempier [2, p. 71] engendrant une médiation très lourde des enseignants.

Ainsi, les représentations des nombres dans ces tableaux et leurs représentations dans le système de numération de position ne véhiculent pas les mêmes significations.

Il est pourtant possible d'utiliser un autre matériel et une autre représentation tabulaire des écritures des nombres.

Vers des artefacts plus congruents avec la représentation chiffrée des nombres dans une numération de position

Il apparaît ci-avant que certains artefacts nécessitent des médiations, voire de lourdes remédiations de la part des enseignants. Certains artefacts peuvent alléger fortement cette charge et faciliter l'émergence des significations expertes chez les élèves. Analysons deux tels artefacts.

Un autre artefact matériel

On peut envisager le matériel constitué de haricots secs, de petites boîtes (à l'origine de boîtes de pellicules photos ou de boîtes d'allumettes vides aisément disponibles sur l'internet qui, fermées, contiennent exactement dix haricots), de sacs en tissu opaque qui, fermés, par convention, contiennent exactement dix boîtes fermées donc aussi cent haricots), de cartons (type boîtes à chaussures) qui, fermés, contiennent exactement dix sacs fermés, donc un millier.



Ce matériel met en relief l'aspect groupement. L'élève qui le manipule, s'il a dans sa main une boîte fermée, peut entendre les dix objets à l'intérieur, s'il a dans sa main un sac de dix boîtes a aussi simultanément les cent entités groupées par dix dans les boîtes, etc.

L'aspect duel de la dizaine est prégnant, tout comme l'aspect triel de la centaine. La médiation de l'enseignant pour que l'élève se construise une représentation des désignations des nombres par groupement est faible.

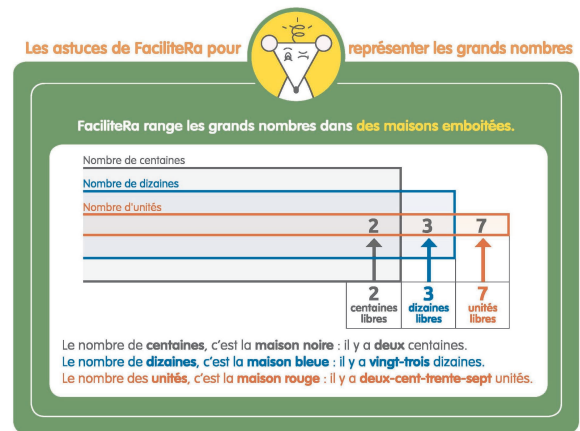
Par ailleurs, ce matériel est très pertinent pour matérialiser, « manipuler » si l'on ose dire, des calculs. En effet, si du matériel doit être utilisé pour accompagner la recherche du résultat d'une soustraction, par exemple $102 - 57$, l'élève utilisant le matériel « blocs de Dienes » et ne disposant que d'une plaque représentant cent et deux petits cubes unitaires et seulement ce matériel aura plus de difficulté à simuler le calcul. En effet, dans un premier temps, il n'a que deux objets devant lui. Il doit se souvenir qu'il peut échanger une plaque contre dix barres, puis une barre contre dix cubes unitaires. Ce qui nécessite, pour bien des élèves, une médiation de l'enseignant, qui suggérera à l'élève d'aller chercher les objets manquants. **Ce matériel exige un degré de symbolisation fort (« un » — la plaque représente en fait « cent » cubes unitaires —, mais il faudra passer par « dix » — barres —) pour effectuer le calcul. Ce matériel très abouti nécessite de l'élève qu'il ait déjà compris la construction du système de numération.**

À l'inverse, le matériel décrit ci-dessus (haricots, petites boîtes, etc.) ne nécessite pas un tel degré d'abstraction. L'élève ayant un sac et deux haricots perçoit de manière kinesthésique l'ensemble des unités définies par l'écriture 102. Tâtant le sac, il perçoit les dix boîtes, agitant le sac comme des maracas, il entend les cent haricots. Il sait que les objets sont là, présents, et qu'il lui suffit donc d'ouvrir le sac puis une boîte pour simuler l'opération demandée.

Un tel matériel pourrait précéder l'utilisation du matériel type « blocs de Dienes » symboliquement plus exigeant et nécessitant davantage la médiation de l'enseignant, médiation qu'il convient naturellement de réduire au maximum pour construire l'autonomie des élèves.

Un autre artefact symbolique

Conscient des difficultés que peuvent engendrer les tableaux de type CDU, nous avons conçu une autre représentation qui n'enferme ni les unités, ni les dizaines, etc., dans des colonnes séparées, mais rend immédiatement compte des groupements. Ainsi, le nombre d'unités (237 est représenté dans la même ligne, dans la même boîte, boîte qui reste ouverte à gauche). De même pour les unités d'ordre supérieur. Cette représentation que l'on pourrait dire orthogonale aux tableaux CDU est présentée ci-dessous.



J'apprends les maths avec les NuméRas [3].

Il convient de remarquer que nous ajoutons le qualificatif « libre », là où d'autres auteurs utilisent l'adjectif « isolé », pour signifier que certaines unités, certaines dizaines, n'ont pas, faute d'effectif suffisant, pu être regroupées. L'usage de l'un de ces deux adjectifs « libre, isolé » laisse sous-entendre qu'il y a des unités et des dizaines qui sont libres ou isolées et d'autres qui sont donc regroupées.

L'utilisation de ce type de tableau évite l'utilisation d'artefacts langagiers du type « chiffre des dizaines ».



Il y est toujours question de nombre de dizaines, nombre d'unités, etc.

Avec ce tableau, la signification mathématique experte, finalité de l'enseignement, à savoir les caractères duel des dizaines et triel des centaines est apparent et n'impose quasiment aucune médiation de l'enseignant.

Dans tous les cas, le caractère conventionnel des désignations chiffrées des nombres par une écriture de gauche à droite nécessite la même médiation de l'enseignant.

Conclusion

Deux dimensions plus prosaïques n'ont pas été prises en compte dans ces quelques lignes, il s'agit du coût du matériel et par voie de conséquence le fait de savoir si chaque élève peut disposer d'un matériel en quantité suffisante.

Le choix d'un matériel de numération n'est pas anodin. Certains matériels engendrent plus que d'autres des significations qui ne peuvent être reconnues comme mathématiques par un expert et peuvent nécessiter de lourdes médiations de l'enseignant.

Il nous semble indispensable de former les enseignants à l'analyse du potentiel sémiotique des artefacts et par voie corollaire, des médiations qu'ils devront assurer.

Références

- [1] M.-A. Mariotti et M. Maracci. *Un artefact comme instrument de médiation sémiotique : une ressource pour le professeur*. ■. 2002.
- [2] C. Houdement et F. Tempier. « Familier, mais problématique, le tableau de numération ». In : *Grand N* n° 109 (2022). ■.
- [3] S. Petit et A. Camenisch. *J'apprends les maths avec les NuméRas. Cahier 1, Niveau 2*. Lea.fr. Nathan, 2016.
- [4] S. Petit et A. Camenisch. « Quelle sémiotique pour l'enseignement de la numération au cycle 2 ? » In : *Actes du 44^e colloque de la COPIRELEM*. ■. Épinal, 2017.
- [5] S. Petit et A. Camenisch. « Artefacts, sémiotique et construction du système de numération de position décimale au cycle 2 ». In : *Actes du 45^e colloque de la COPIRELEM*. ■. Blois, 2018.



Serge Petit, professeur de mathématiques honoraire de l'IUFM d'Alsace (université de Strasbourg), est membre du comité de rédaction d'*Au fil des maths*.

serge.labaroche@sfr.fr

© APMEP septembre 2024



Sommaire du n° 553



Accompagnement des élèves

Éditorial

Opinions

- ✦ **Groupes de niveaux en mathématiques au collège**
Jean-Claude Rauscher 3
- De l'utilisation des matériels de numération**
Serge Petit 6
- ✦ **Quel avenir pour l'inclusion ?**
Claire Lommé 12

Avec les élèves

- Les fractions, c'est pas du gâteau !**
Guillaume Assali 14
- « Le plus grand produit » en CM1**
G. Aldon, F. Margerand, S. Roussel & A. Viry-Leroi ... 26
- Vers la ligne graduée en Grande Section**
Alexandra Homsy 34
- Suivi d'une constellation sur les grandeurs**
Mathilde Pretis 38
- ✦ **Vers plus d'autonomie**
Amélie Cazottes 43
- ✦ **Accompagner les élèves en lycée professionnel**
Mélanie Berthelot-Lepage 47

- 1 ✦ **Un RallyCoach avec les élèves ?**
Erwan Démézet & Gaëlle Morvan 52
- ✦ **La compétence « Chercher » en Troisième**
Morgan Gilot 59

Ouvertures

- Les mystères du sphinx**
Yves Farcy 66
- Relations de voisinage au pays basque**
Pierre Carriquiry 73

Récréations

- Au fil des problèmes**
Frédéric de Ligt 78
- Des problèmes dans nos classes**
Valérie Larose 81

Au fil du temps

- Le CDI de Marie-Ange**
Marie-Ange Ballereau 83
- Matériaux pour une documentation** 85
- Les blocs de base 10**
Gonzague Jobbé-Duval 89



CultureMATH

