

Le bulletin de l'APMEP - N° 552

# AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Avril, mai, juin 2024

**Automat(h)ismes**



# APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

# ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

*Au fil des maths*, c'est aussi une revue numérique augmentée :

<https://afdm.apmep.fr>



Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à [aufildesmaths@apmep.fr](mailto:aufildesmaths@apmep.fr)

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN [mcgenin@wanadoo.fr](mailto:mcgenin@wanadoo.fr)

À ce numéro est joint le BGV n° 236  
spécial « Journées Nationales »

## ÉQUIPE DE RÉDACTION

**Directrice de publication** : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

**Responsable coordinatrice de l'équipe** : Cécile KERBOUL.

**Rédacteurs** : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Thomas VILLEMONTÉIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTEVEZ, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Lionel PRONOST, Agnès VEYRON.

**Illustrateurs** : Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL, Olivier LONGUET.

**Équipe T<sub>E</sub>Xnique** : Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD.

**Maquette** : Olivier REBOUX.

**Correspondant Publimath** : François PÉTIARD.

**Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.**

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD


Dépôt légal : juin 2024. ISSN : 2608-9297.

Impression : iLLiCO by L'ARTÉSIEENNE

ZI de l'Alouette, Rue François Jacob, 62800 Liévin

# Des bulles aux polyèdres



À la suite de la bande dessinée *La croix et le papillon* d'Olivier Longuet , Richard Cabassut nous propose de réfléchir sur des définitions mathématiques des notions de patron et de polyèdre.

Richard Cabassut

La bande dessinée utilise éventuellement des bulles pour accompagner par un texte chaque dessin proposé. La représentation en bande dessinée donne à voir plus immédiatement qu'un long texte écrit. Les bulles et la variété des dessins peuvent préciser les objets présentés et limiter les risques de représentations prototypiques. Mais les limitations des bulles (une bulle ne doit pas recouvrir un dessin) et des dessins (un dessin donne à voir un cas singulier qui peut devenir prototype) ne permettent pas toujours de prendre conscience des difficultés conceptuelles des notions représentées. Dans le commentaire suivant sont précisées, au fil de la bande dessinée *La croix et le papillon* parue dans le numéro 551 d'*Au fil des maths*, quelques notions évoquées dans les bulles ou les dessins. Dans les définitions conventionnelles qui suivent, on éliminera les cas dégénérés : un polyèdre ne peut pas être inclus dans

un plan, une face ou un polygone ne peuvent pas être inclus dans une droite, un côté ou une arête ne peuvent pas être un segment réduit à un point.

## Polyèdres convexes

Dès la première vignette, la notion de **patron** est évoquée. Il est étonnant qu'on ne trouve pas dans les textes officiels de définition de la notion de patron alors qu'elle est évoquée dès l'école primaire. On trouve cependant dans certains manuels ou sites des définitions contradictoires : ainsi le cône droit aurait des patrons avec l'exemple de la figure 1 où deux parties (la base et la surface latérale) ont un seul point commun, et l'exemple de la figure 2, pour lequel deux parties du patron ont une intersection réduite à un point E, ne serait pas un patron de cube pour la bande dessinée étudiée qui n'en dénombre que onze (figure 3).

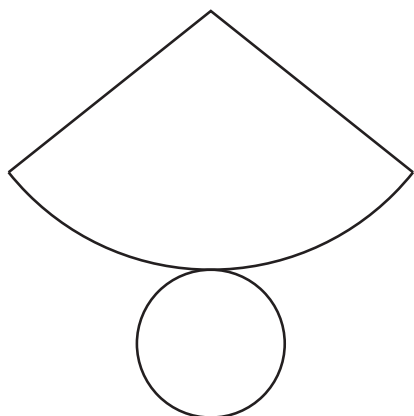


Figure 1.

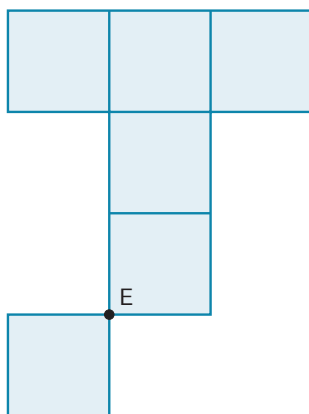


Figure 2.

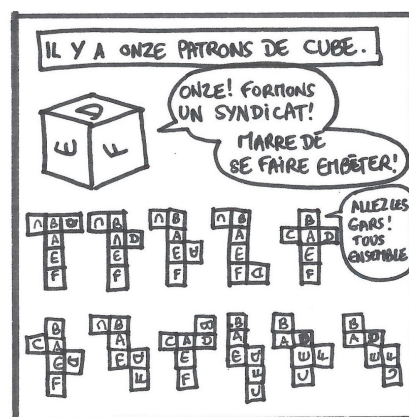


Figure 3.



Dans ce texte, nous nous limiterons aux solides de dimension 3 qui sont des **polyèdres** puisque la bande dessinée ne s'intéresse qu'à cette catégorie, ce qui évitera le problème du patron du cône.

Nous supposerons les solides connexes<sup>1</sup> : en effet si le solide est la réunion de parties disjointes, il suffira de considérer un patron pour chaque partie.

En nous inspirant de [1, p. 270], un **polyèdre convexe**<sup>2</sup>  $\mathcal{P}$  est une partie de l'espace, non contenue dans un plan, bornée, fermée, intersection d'un nombre fini de demi-espaces<sup>3</sup>. Une **face** est l'intersection de  $\mathcal{P}$  avec un des plans qui délimite un des demi-espaces, et forme un polygone<sup>4</sup> convexe<sup>5</sup> (dont l'intérieur n'est pas vide pour s'assurer que la face n'est pas un segment). Un **côté** et un **sommet** d'une face polygonale sont respectivement une **arête** et un **sommet** de  $\mathcal{P}$ .

On remarquera que dans cette définition, un polyèdre convexe est une portion de l'espace, et non pas la surface de cette portion, comme c'est le cas dans une autre définition. On remarquera que c'est une généralisation à la dimension 3 de la problématique de la dimension 2 : pour certains un polygone plan est une surface délimitée par une ligne brisée fermée, pour d'autres le polygone est la ligne brisée fermée. Il en va ainsi de figures classiques de la géométrie plane : pour certains un carré est une surface, pour d'autres la frontière de cette surface, pour d'autres encore une suite des quatre sommets de cette surface.

**Patron**

Un **patron**  $P$  d'un polyèdre convexe  $\mathcal{P}$  est une figure plane vérifiant :

- $P$  est une réunion connexe de polygones : il y a une correspondance univoque entre l'ensemble des polygones de  $P$  et l'ensemble des faces de  $\mathcal{P}$  ;
- chaque polygone est isométrique à sa face correspondante ;
- si deux polygones ont un côté commun, celui-ci correspond à l'arête commune aux deux faces correspondantes ;
- réciproquement, si deux faces ont une arête commune, les parties de  $P$  correspondantes ont soit un côté commun, soit ces côtés respectifs font partie des côtés de la figure plane<sup>6</sup>.

À propos de l'intersection de deux polygones de  $P$ , il y a trois possibilités (qui peuvent être illustrées par le patron d'une pyramide de la figure 4) : l'intersection de deux polygones est soit vide, soit réduite à un point (exemple du sommet de la pyramide dans le patron de la figure 4), soit réduite à une arête. Avec la dernière condition, on veut éviter de partager une face en deux polygones coplanaires ayant un côté commun qui ne serait pas arête de  $\mathcal{P}$ .

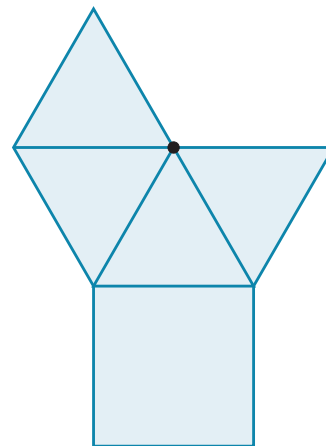


Figure 4.

1. Connexe : d'un seul tenant, n'est pas la réunion de deux parties disjointes fermées.  
 2. Un polyèdre est convexe lorsque, pour tout couple de points  $M$  et  $N$  du polyèdre, le segment  $[MN]$  est entièrement contenu dans le polyèdre. Ce n'est pas le cas du tétracube de la figure 5 où  $]IB[$  est extérieur au tétracube.  
 3. Tout plan partage l'espace en deux demi-espaces, et ce plan délimite chaque demi-espace. On peut rajouter à ce nombre fini de demi-espaces des demi-espaces inutiles qui n'ont en commun avec le polyèdre qu'une partie alignée. On pourrait convenir de ne considérer que des plans qui ont une intersection avec le polyèdre qui ne se limite pas à une réunion fini de segments, c'est-à-dire contenant au moins un polygone dont l'intérieur (au sens topologique du terme) n'est pas vide.  
 4. Avec la convention signalée en début de commentaire, un polygone ne peut pas être aligné ainsi qu'une face. On ne considère pas ainsi les demi-espaces qui ont en commun avec le polyèdre uniquement une arête ou un sommet.  
 5. Cette propriété se démontre.  
 6. Dans le cas de la bande dessinée, une languette sera apposée à l'un de ces côtés extérieurs du patron.



On considère une rotation axiale de l'espace autour d'une arête commune à deux parties-faces appliquée à une des deux parties et éventuellement d'autres parties. En choisissant convenablement l'angle et une succession de rotations, le résultat permet d'obtenir un solide polyèdre convexe isométrique à  $\mathcal{P}$ .

### Polyèdres non convexes

Proposons une définition d'un polyèdre non convexe inspirée de [1, p. 270].

Un polyèdre non convexe  $\mathcal{P}$  est la réunion finie connexe de polyèdres convexes. Remarquons qu'un polyèdre non convexe est donc également fermé et borné.

#### Faces, arêtes et sommets d'un polyèdre non convexe

Examinons maintenant le tétracube  $\mathcal{P}$  de la figure 5 représenté de deux points de vue.

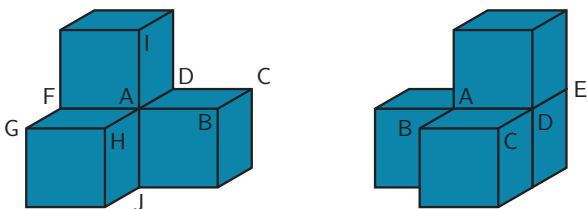


Figure 5.

On voit alors dans ce cas que  $\mathcal{P}$  n'est plus l'intersection de demi-espaces le délimitant. Par exemple, pour un demi-espace délimité par le plan (ABCD), une partie de  $\mathcal{P}$  est d'un côté de ce plan, une autre partie de l'autre côté du fait de la non convexité de  $\mathcal{P}$ . Dans une définition que l'on choisirait, ABCD et AFGH font-ils partie de la même face ? [AJ] est-il une arête ou une partie de l'arête [IJ] ? A et E sont-ils des sommets ?

On remarquera que ces questionnements sont l'extension à la dimension 3 des questionnements sur les polygones non convexes. Par exemple, dans la figure 6, il y a le polygone non convexe ABCDEFGHA dans lequel [DE], [AB] et [HG] sont des côtés et où J et L ne sont pas des sommets et le polygone non convexe AJBCDJLEFGLHA où [DJ],

[JL] et [LE] sont trois côtés distincts et J et L des sommets. Dans aucun des cas [CB] et [GF] ne font partie du même côté. Une différence importante distingue polygone et polyèdre dans la désignation : alors qu'un polygone peut être désigné sans ambiguïté par la succession de sommets voisins sur la ligne brisée de sa frontière, une désignation analogue n'existe plus pour les polyèdres. Ainsi un cube dont la face ABCD est translattée en A'B'C'D' est souvent désigné conventionnellement par ABCDA'B'C'D' sans que D et A' ne soient des sommets voisins.

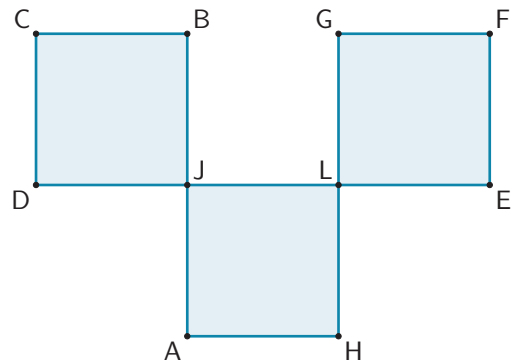


Figure 6.

On voit que des parties coplanaires de la surface d'un polyèdre non convexe peuvent être disjointes, comme dans les cas de la figure 7.

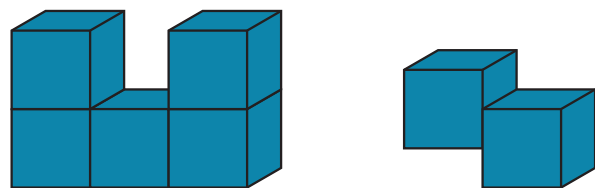


Figure 7.

Nous laissons le lecteur choisir de définir les notions de faces, d'arêtes et de sommets pour un polyèdre non convexe. Nous n'avons pas rencontré de définition consensuelle de ces notions dans la littérature. Sans ces définitions la notion de patron devient délicate à définir.

Sur l'exemple du tétracube de la figure 5, on pourrait proposer le patron de la figure 8.



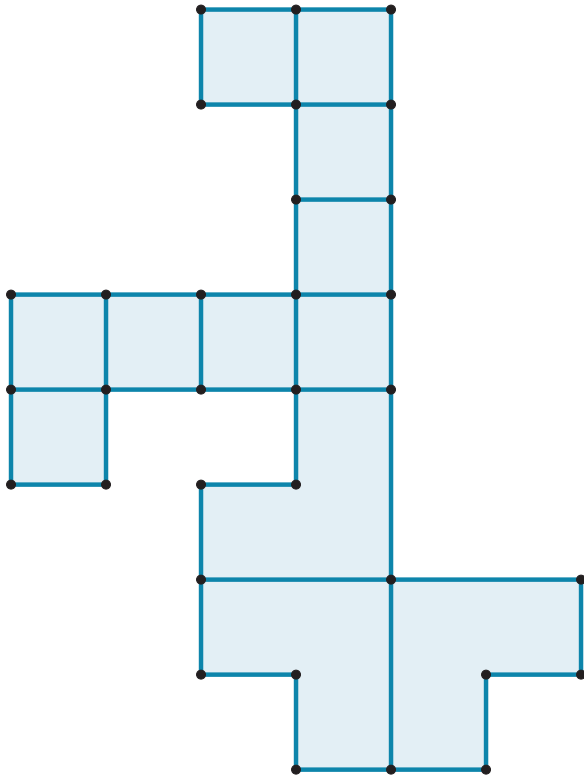


Figure 8.

Mais la chose devient délicate avec deux cubes qui n'ont en commun qu'un sommet ou qu'une arête, comme dans l'exemple de la figure 9.

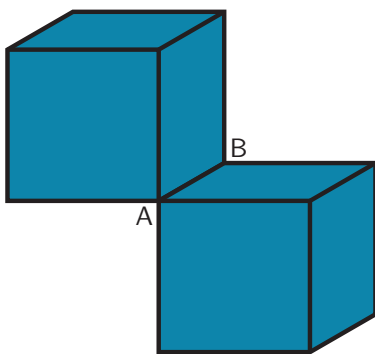


Figure 9.

Si l'un des cubes de la figure 9 est tourné autour du segment [AB] d'un angle de  $10^\circ$ , on obtient un nouveau solide. Qu'est-ce qui distinguerait les patrons de ce nouveau solide de celui du solide la figure 9 ?

Notre propos est d'illustrer la difficulté à définir des objets assez familiers dans l'enseignement obligatoire (polyèdre, face, arête, sommet, patron). Heureusement la bande dessinée que nous avons commentée se limite à la catégorie des polyèdres convexes qui est la moins problématique.

### Références

- [1] D. Perrin. *Mathématiques d'école. Nombres, mesures et géométrie*. Éditions Cassini, 2005.
- [2] Apprenti géomètre. Permet de construire différents polycubes [▶](#). 2021.
- [3] GeoGebra. Permet de construire différents patrons [▶](#). 2002-2024.
- [4] METAPOST. Construction des différents patrons et polycubes de l'article [▶](#). 2023.



Richard Cabassut, maître de conférences honoraire en didactique des mathématiques à l'université de Strasbourg, collabore à l'équipe d'*Au fil des maths*.

[richard.cabassut@gmail.com](mailto:richard.cabassut@gmail.com)

© APMEP Juin 2024



# APMEP

19-22 oct  
2024

Le Havre - Journées Nationales

## LA NORMANDIE, UN HAVRE DE MATHÉMATIQUES

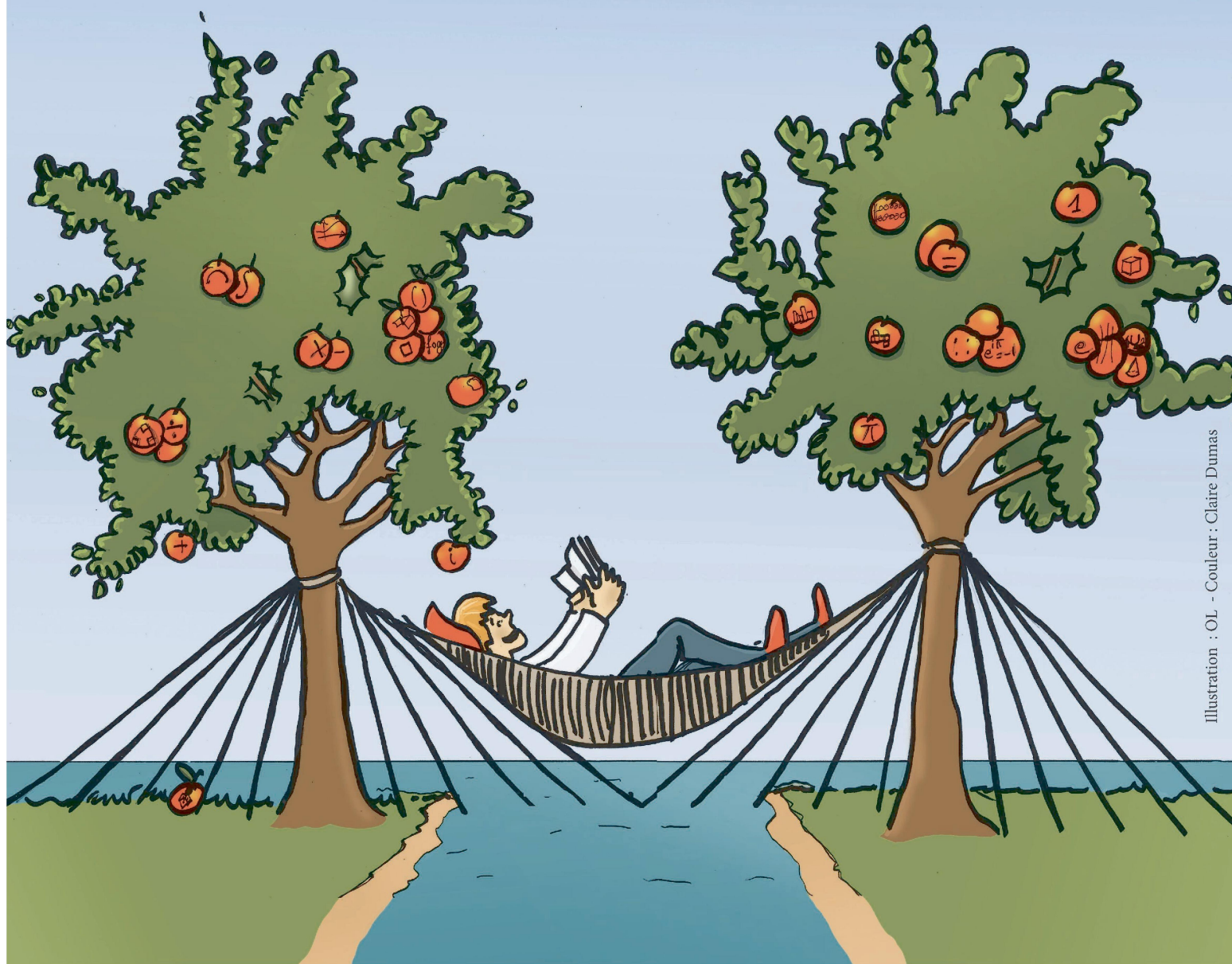


Illustration : OL - Couleur : Claire Dumas



Association des Professeurs de Mathématiques  
de l'Enseignement Public  
« De la maternelle à l'université »



# Sommaire du n° 552



## Automat(h)ismes

### Éditorial

1

Fabrication de très grandes boîtes... la suite !

*Florence Soriano-Gafiuk & Manuella Freyermuth* ..... 59

### Opinions

✦ La parole au groupe « Fondamentaux et Automatismes »

*Groupe « Fondamentaux et Automatismes »* ..... 3

Croisements de points de vue sur la mesure

*Aurélié Chesnais & Valérie Munier* ..... 8

✦ Automatismes ou automathismes ?

*Éric Trouillot* ..... 21

✦ Des Mises En TRAIN pour bien démarrer

*Claire Piolti-Lamorthe & Sophie Roubin* ..... 26

### Avec les élèves

✦ Des rituels en collège

*Lydie El-Halougi* ..... 35

Double vue

*Jean-Christophe Deledicq* ..... 39

✦ MathsMentales

*Sébastien Coge* ..... 41

✦ MathALÉA : du nouveau !

*Ève Chambon, Lydie El Halougi & Stéphane Guyon*... 45

✦ Automatismes : un peu, beaucoup, passionnément...

*Céline Bruel & Élise Locatelli* ..... 50

### Ouvertures

La loi de Benford

*Jean Lefort* ..... 56

La Grande Aventure des maths

*C. Sakarovitch, G. Mulsant & M. Andler* ..... 65

Des bulles aux polyèdres

*Richard Cabassut* ..... 71

### Récréations

Au fil des problèmes

*Frédéric de Ligt* ..... 75

Des problèmes dans nos classes

*Valérie Larose* ..... 77

### Au fil du temps

Hommage à Guy Brousseau

*Éric Barbazo* ..... 79

Le CDI de Marie-Ange

*Marie-Ange Ballereau* ..... 81

Matériaux pour une documentation ..... 83

Les fichiers *Evariste* : toujours d'actualité !

*Jean Fromentin & Nicole Toussaint* ..... 87

Des étudiants aux Journées Nationales à Rennes

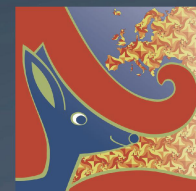
*Christophe Rivière* ..... 90

Mes premières Journées Nationales

*Matthieu Boutier* ..... 94



CultureMATH



# APMEP

www.apmep.fr