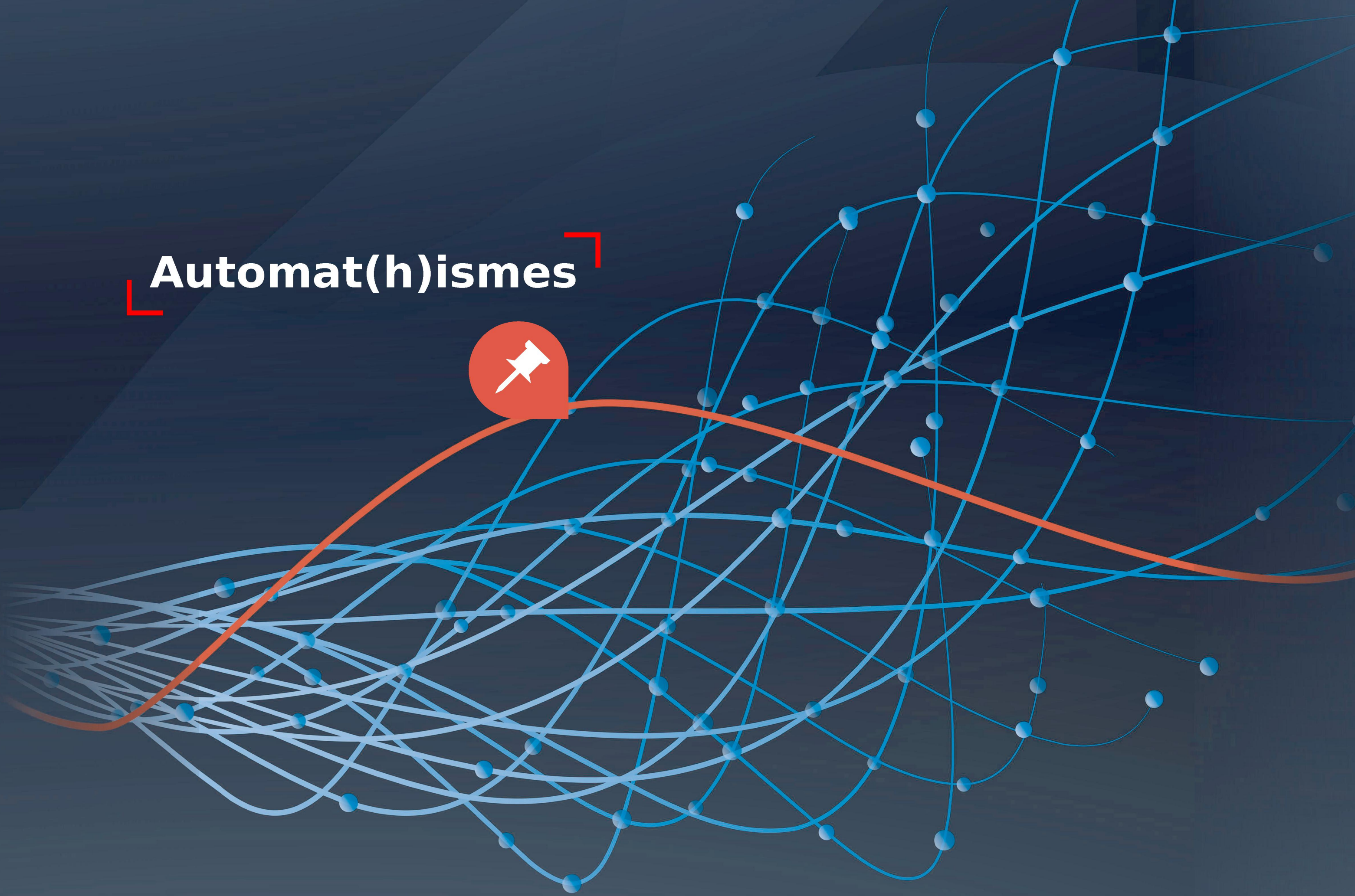
Le bulletin de l'APMEP - N° 552

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Avril, mai, juin 2024

Automat(h)ismes



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION

DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES

DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :

https://afdm.apmep.fr

Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

À ce numéro est joint le BGV n° 236

spécial « Journées Nationales »

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : *Claire PIOLTI-LAMORTHE*.

Responsable coordinatrice de l'équipe : *Cécile KERBOUL*.

Rédacteurs : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY*.

« Fils rouges » numériques : *Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTEVEZ, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Lionel PRONOST, Agnès VEYRON*.

Illustrateurs : *Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL, Olivier LONGUET*.

Équipe TEXnique : *Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD*.

Maquette : *Olivier REBOUX*.

Correspondant Publimath : *François PÉTIARD*.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : juin 2024. ISSN : 2608-9297.

Impression : iLLiCO by L'ARTÉSIENNE

ZI de l'Alouette, Rue François Jacob, 62800 Liévin

Fabrication de très grandes boîtes… la suite !

Comme promis dans notre numéro 551, voici la suite des expérimentations avec des élèves de cycle 4… De quoi donner envie aux enseignants de collège et de lycée d'investir ou de réinvestir ce problème de géométrie !

Florence Soriano-Gafiuk & Manuella Freyermuth

Reprenons le problème ouvert de géométrie dans l'espace de notre article publié dans le nº 551 d'*Au fil des maths* :

> *Fabrique des boîtes sans couvercle avec des feuilles de format A4.*
> *Quel plus grand volume de boîte parviens-tu à obtenir ?*

Quelles sont les exploitations possibles avec des collégiens (cycle 4), voire des lycéens ?

Pour rappel, le format A4 correspond aux dimensions $L = \dfrac{1}{2^{\frac{7}{4}}}$ et $l = \dfrac{1}{2^{\frac{9}{4}}}$ (en mètre). Les calculs qui suivent seront cependant effectués avec des valeurs approchées, soit avec les dimensions affichées dans le commerce pour ce format de feuilles : 21,0 et 29,7 (en centimètres). Les résultats seront à chaque fois donnés au cm^3 près.

Patron en étoile d'une boîte rectangulaire et recours à un tableur *(cycle 4)*

Nous reprenons ici l'exemple de la boîte parallélépipédique rectangle fabriquée à partir d'un patron en forme de croix. Plus précisément, on dispose d'une feuille de format A4 et on découpe quatre carrés identiques à chacun des coins de la feuille.

Le volume d'un parallélépipède rectangle étant égal au produit $L \times l \times x$ où x est la hauteur, le volume de la boîte ainsi fabriquée est donné par la fonction f définie pour $x > 0$ par :

$f(x) = x(L - 2x)(l - 2x)$ avec $x > 0$, $L - 2x > 0$ et $l - 2x > 0$.

Soit $f(x) = x(L - 2x)(l - 2x)$ avec $0 < x < \dfrac{l}{2}$.

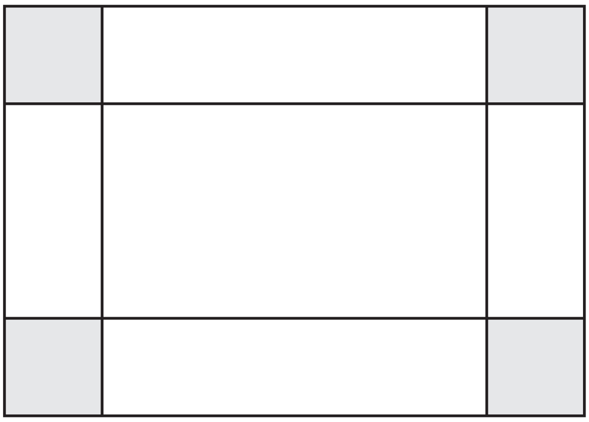


Figure 1. *Patron d'une boîte rectangulaire en forme de croix.*

En utilisant un tableur, à partir de $L = 29{,}7$ et $l = 21{,}0$, on incrémente la hauteur avec un pas de 0,5 pour observer un maximum qui semble atteint pour $x = 4$. On utilise ensuite un pas de 0,05 pour x variant de 3,5 à 4,5, puis enfin un pas de 0,005 pour x compris entre 4,000 et 4,040. On obtient ainsi une valeur de volume maximal d'environ 1 128,494 8 cm^3.

Ceci permet de supposer l'existence d'un unique réel α environ égal à 4,040 cm (à 0,005 cm près) en lequel la fonction f atteint sa valeur maximale.

On obtient ainsi :

$$V_{\text{maximal}} = \max_{x \in \left[0\,;\frac{l}{2}\right]} f(x) \approx 1\,128{,}495\,\text{cm}^3.$$

Ces calculs permettent aussi d'observer que, dans le cas des boîtes rectangulaires pas « trop » basses (de hauteur au moins égale à α), l'aire de la base agit davantage sur le volume que la longueur de la hauteur.

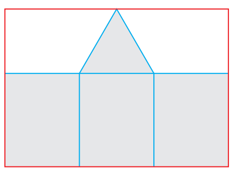
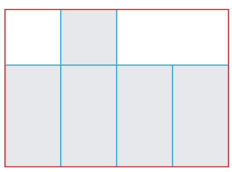
Il est à noter qu'un parallélépipède rectangle possède plusieurs patrons et qu'il est possible d'introduire différentes fonctions numériques, la variable désignant toujours la hauteur de la boîte considérée. Un tel travail a été opéré pour trois patrons différents (donc trois fonctions différentes) [1]. Il montre par l'étude du signe des dérivées — mais le recours à des tableurs est également possible — que la fonction f considérée dans cette section offre la boîte de plus grand volume parmi les trois étudiées.

Prismes droits en mode paysage ou en mode portrait ? *(cycle 4)*

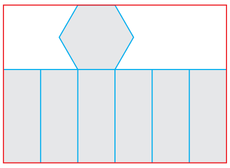
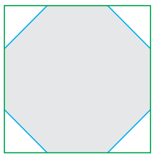
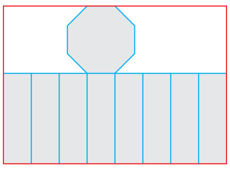
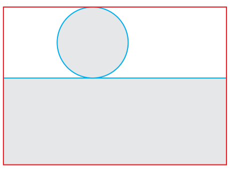
Les élèves ont ensuite choisi de construire des patrons de prismes droits sans couvercle et à base polygonale régulière en considérant la feuille de papier A4 d'abord en mode paysage puis en mode portrait. Le choix de privilégier des bases polygonales qui sont régulières est motivé par le souhait d'aboutir à des calculs accessibles par les outils mathématiques abordés en cycle 4 (et notamment par le théorème de Pythagore pour le calcul de la hauteur d'un triangle équilatéral et de la longueur des côtés adjacents à l'angle droit dans un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse donnée).

Les élèves sont tentés de chercher ces grandes boîtes parmi les prismes droits présentant des bases polygonales d'aire maximale. Comme, pour un nombre de sommets fixé, le périmètre et l'aire du polygone régulier augmentent ensemble [1], il s'agit de considérer des prismes dont le périmètre de la base est maximal, c'est-à-dire de périmètre égal à l pour le mode portrait et égal à L pour le mode paysage. Une fois les dimensions du fond de la boîte connues, la hauteur de ladite boîte sera choisie la plus longue possible, autant que la place sur la feuille de papier A4 le permettra.

Les détails des calculs sont apportés pour le mode paysage qui, au vu des conclusions du paragraphe précédent, est pressenti comme aboutissant à des volumes supérieurs à ceux obtenus dans le cas du mode portrait. Les résultats des calculs des volumes des boîtes construites en mode portrait sont cependant indiqués en italique, afin de pouvoir comparer les volumes obtenus selon les deux modes et ainsi affirmer/infirmer l'idée selon laquelle les bases larges sont à privilégier aux hauteurs longues.

<table>
<tr><th colspan="2">Prisme droit à base triangulaire équilatérale</th></tr>
<tr><td></td><td>En mode paysage. La longueur de côté du triangle équilatéral est : $\frac{L}{3}$.
L'aire de la base triangulaire est : $\frac{1}{2} \times \frac{L}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{L}{3} = \frac{\sqrt{3}L^2}{36}$.
Le volume du prisme est donc : $\frac{\sqrt{3}L^2}{36} \times \left(l - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{L}{3}\right) \approx 527\,\text{cm}^3$.
Pour le calcul du volume obtenu en mode portrait, il suffit de permuter l et L.
On obtient un volume d'environ 502 cm³.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Prisme droit à base carrée</th></tr>
<tr><td></td><td>En mode paysage. L'aire de la base carrée est : $\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{L^2}{16}$.
Le volume du prisme est donc : $\frac{L^2}{16} \times \left(l - \frac{L}{4}\right) \approx 748\,\text{cm}^3$.
Pour le calcul du volume obtenu en mode portrait, il suffit de permuter l et L.
On obtient un volume d'environ 674 cm³.</td></tr>
</table>

1. Cette affirmation n'est pas vraie pour les polygones non réguliers. Par exemple, si on considère un premier rectangle de dimensions 2 cm et 0,2 cm, et un second rectangle de dimensions 1 cm et 1,1 cm, alors le premier rectangle a un plus grand périmètre, mais une plus petite aire que le second rectangle.

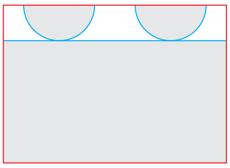
<table>
<tr><th colspan="2">Prisme droit à base hexagonale régulière</th></tr>
<tr><td></td><td>En mode paysage. L'aire de la base hexagonale (composée de six triangles équilatéraux) est : $6 \times \frac{1}{2} \times \frac{L}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{L}{6} = \frac{\sqrt{3}L^2}{24}$.
Le volume du prisme est donc : $\frac{\sqrt{3}L^2}{24} \times \left(l - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{L}{6}\right) \approx 791\,\text{cm}^3$.
Pour le calcul du volume obtenu en mode portrait, il suffit de permuter l et L.
On obtient un volume d'environ 752 cm^3.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Prisme droit à base octogonale régulière</th></tr>
<tr><td>
</td><td>En mode paysage. La longueur d'une arête de l'octogone est : $\frac{L}{8}$.
Un octogone de longueur d'arête $\frac{L}{8}$ peut être obtenu en considérant un carré de longueur de côté supérieure à $\frac{L}{8}$ dont on découpe en chaque sommet un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse est égale à $\frac{L}{8}$. Dans ce triangle, la longueur des côtés adjacents à l'angle droit est égale à $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{L}{8}$, si bien que la longueur de côté du carré est égale à $\frac{1+\sqrt{2}}{8}L$.
L'aire de la base octogonale est donc égale à l'aire du carré auquel on soustrait le quadruple de l'aire du triangle rectangle isocèle, soit :
$\left(\frac{1+\sqrt{2}}{8}L\right)^2 - 4 \times \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{L}{8}\right)^2}{2} = \left(1+\sqrt{2}\right) \times \frac{L^2}{32}$.
Le volume du prisme est donc :
$\left(1+\sqrt{2}\right) \times \frac{L^2}{32} \times \left(l - \left(1+\sqrt{2}\right) \times \frac{L}{8}\right) \approx 801\,\text{cm}^3$.
Pour le calcul du volume obtenu en mode portrait, il suffit de permuter l et L.
On obtient un volume d'environ 777 cm^3.</td></tr>
<tr><th colspan="2">Cylindre</th></tr>
<tr><td></td><td>En mode paysage. Le périmètre de la base circulaire est L si bien que le rayon de la base est $\frac{L}{2\pi}$.
L'aire de la base circulaire est : $\pi \times \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi}$.
Le volume du cylindre est donc : $\frac{L^2}{4\pi} \times \left(l - 2 \times \frac{L}{2\pi}\right) \approx 810\,\text{cm}^3$.
Pour le calcul du volume obtenu en mode portrait, il suffit de permuter l et L.
On obtient un volume d'environ 808 cm^3.</td></tr>
</table>

Les élèves ont observé que le mode paysage permet à chaque fois d'obtenir un volume plus grand que celui obtenu avec le mode portrait, ce qui confirme l'idée que les boîtes larges, si elles ont une hauteur suffisante, peuvent contenir plus que les boîtes hautes.

Il est ensuite intéressant de porter son attention à un problème isopérimétrique qui, « malgré son apparence anodine, fait appel à des théories sophistiquées » : « la forme géométrique plane de périmètre donné, qui maximise son aire, est le disque » [2]. Dans le cas particulier des polygones réguliers de périmètre donné, les formes géométriques qui se rapprochent le plus du cercle sont les polygones de même rayon comptant le plus grand nombre de sommets possible. Pour cette raison, les résultats des élèves sont de plus en plus performants au fur et à mesure que le nombre de sommets augmente. Pour cette raison encore, le cylindre offre finalement le meilleur résultat, le cercle pouvant être considéré comme la limite d'une suite de polygones réguliers lorsque le nombre de sommets tend vers l'infini. Ces dernières lignes n'ont pas valeur de démonstration mais permettent d'attraper par l'intuition les résultats obtenus par les élèves.

Les élèves ont facilement renoncé à la piste des pyramides et des cônes, les patrons de ces deux solides générant d'importantes chutes de papier. Par ailleurs, comme dans le cas du cube, on peut reprendre l'idée d'Alexis [2] et se libérer de la contrainte de non-découpage des faces de la boîte.

Le fond de la boîte cylindrique peut en effet être reconstitué en rabattant deux demi-disques, ce qui permet d'augmenter la longueur de la hauteur du cylindre et, ainsi, d'améliorer le volume de la boîte.

Cylindre (par le gabarit dit d'Alexis)	
	*En mode paysage.* Le rayon de la base circulaire rest $\frac{L}{2\pi}$. L'aire de la base circulaire est toujours : $\pi \times \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 = \frac{L^2}{4\pi}$. Le volume du cylindre est donc : $\frac{L^2}{4\pi} \times \left(l - \frac{L}{2\pi}\right) \approx 1\,142\,\text{cm}^3$. *Pour le calcul du volume obtenu en mode portrait, il suffit de permuter l et L.* *On obtient un volume d'environ 925 cm^3.*

Au final, le plus grand volume obtenu est celui correspondant à la boîte cylindrique en mode paysage obtenu avec le gabarit dit d'Alexis.

Une boîte presque sphérique (*cycle 4*)

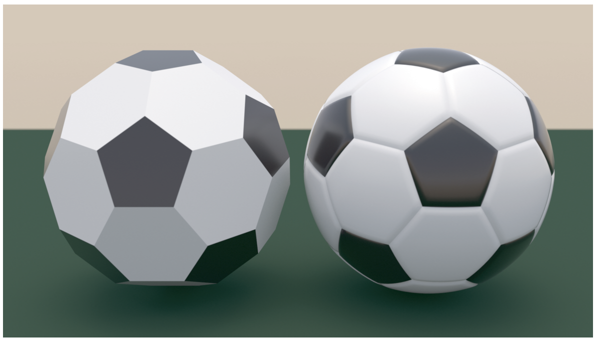


Figure 2. *Icosaèdre tronqué et ballon de football (source Wikipedia :).*

La sphère n'est pas développable mais peut être approchée par des polyèdres en forme de ballons cousus développables. Les élèves pourront effectuer des recherches sur le web et retenir quelques solides pour lesquels l'internet nous indique à la fois des patrons et formules de volume, tels que le cuboctaèdre, le rhombicuboctaèdre ou encore l'icosaèdre tronqué [3]. Nous nous concentrerons cependant sur ce dernier polyèdre, celui-ci ressemblant à un ballon de football et donc ayant une forme qui fait forcément écho auprès des élèves.

L'icosaèdre tronqué est un solide qui compte douze faces pentagonales régulières de côté a, vingt faces hexagonales régulières également de côté a, soixante sommets et quatre-vingt-dix arêtes.

Son volume [3] est : $\dfrac{125 + 43\sqrt{5}}{4}a^3$.

Plusieurs patrons peuvent être trouvés sur le net. Observons par exemple les suivants :

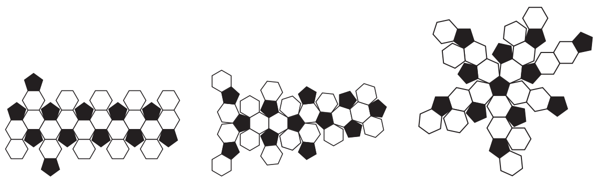


Figure 3. *Trois patrons de l'icosaèdre tronqué.*

Comme la fonction cube est croissante, le volume du solide augmente avec la longueur de côté a. Par suite, optimiser le volume, c'est optimiser a, c'est-à-dire agrandir le plus possible les faces du patron sans déborder de la feuille de format A4. L'idée est donc de choisir le patron qui minimisera la chute de papier après avoir ôté une face

2. Le lecteur pourra se référer à la 1re partie de cet article dans *Au fil des maths* nº 551 : Alexis est l'élève qui a eu l'idée d'emballer une boîte de craie comme un cadeau, obtenant ainsi un gabarit qui ne respecte pas les contraintes habituelles des patrons.

3. L'icosaèdre tronqué a un nom parlant : il est en effet obtenu par troncature des douze sommets de l'icosaèdre régulier convexe, ce dernier étant un polyèdre constitué de vingt faces en forme de triangle équilatéral.

(puisque la boîte n'a pas de couvercle), également de sorte que la chute de papier soit minimale.

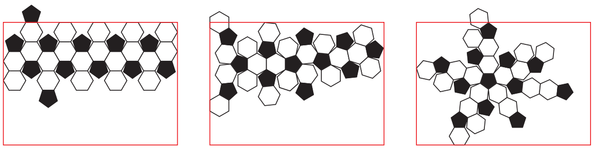


Figure 4. *Représentation à l'échelle des patrons sur des feuilles de format A4.*

Le cadre rouge, un rectangle satisfaisant l'égalité $L = \sqrt{2} \times l$, désigne la disposition de la feuille A4. On peut, avec un logiciel de géométrie ou de dessin, positionner les images des patrons sur un rectangle aux dimensions voulues puis les étirer de sorte qu'elles atteignent le bord du rectangle. À vue d'œil, il n'est pas si facile de reconnaître le patron présentant les plus grandes faces. Pour cette raison, on a procédé à la mesure du diamètre des hexagones sur chacun des trois patrons (avec une règle graduée). La comparaison des mesures ainsi obtenues laisse penser que le premier patron donnera le meilleur volume.

Les élèves se sont ensuite attachés, en recourant à un logiciel de géométrie dynamique, à déterminer avec une précision suffisante la longueur de côté a, de sorte que le patron couvre la plus grande surface, ceci sans déborder de la feuille de papier A4.

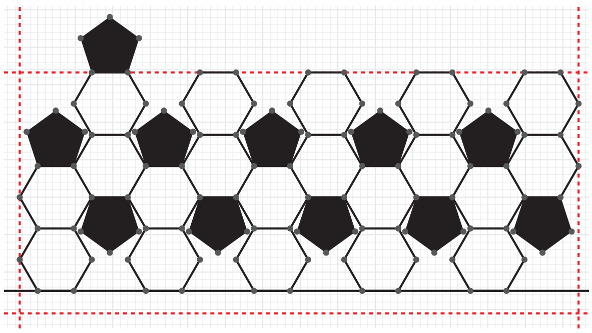


Figure 5. *Recherche du plus grand patron de l'octaèdre tronqué.*

On constate ainsi que la surface du patron est maximale, sans déborder de la feuille de papier A4, lorsque a est environ égal à 1,92 cm ; ce qui donne au final un volume égal à environ 391 cm^3.

La valeur exacte du plus grand volume obtenu en optant pour le patron ci-dessus peut cependant être trouvée. En effet, la longueur du patron est égale à la somme du quintuple du diamètre d'une face hexagonale, du quintuple de l'arête d'une face pentagonale et de la longueur de la demi-base de l'un des six triangles équilatéraux composant une face hexagonale. La valeur maximale de a est donc la solution de l'équation suivante :

$$5 \times 2a + 5a + \frac{a}{2} = L.$$

$$a = \frac{2}{31} \times L \approx 1{,}916\,\text{cm}.$$

Il est utile de vérifier que le patron (en ôtant le pentagone considéré comme étant le couvercle) entre bien dans la feuille A4 également dans le sens de la largeur. L'observation du patron permet de noter que la largeur du patron est inférieure au triple du double de la hauteur du triangle équilatéral de longueur de côté a. Comme l'inégalité $6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times a < l$ est bien satisfaite, on en déduit que le patron peut entièrement être dessiné sur la feuille A4. Le volume obtenu est pour la valeur a trouvée :

$$V = \frac{125 + 43\sqrt{5}}{4} \times \left(\frac{2}{31} \times L\right)^3 \approx 389\,\text{cm}^3.$$

D'autres polyèdres ont été étudiés par les élèves. La question est cependant de savoir s'il faut persister sur la piste des ballons cousus au vu du résultat obtenu dans le cas de l'icosaèdre tronqué qui s'avère bien éloigné de ceux trouvés avec les pavés droits et le cylindre.

Conclusion

Ce problème d'optimisation revêt un intérêt pédagogique certain en rejoignant en de nombreux points les recommandations des textes officiels [4, p. 366-367], en particulier :

- il permet la mise en place d'une « pédagogie de projet, active et collaborative », les élèves étant conduits à travailler ensemble au sein d'ateliers et donc à coopérer pour enrichir leurs travaux ;

- il engage les élèves par la mise en place d'activités de création, de manipulation et d'expérimentation « au cours desquelles les élèves développent leur autonomie » ;
- il propose une véritable pratique des mathématiques et en particulier des problèmes ouverts qui favorisent l'intuition, la prise d'initiative et l'imagination ;
- il développe la culture scientifique puisque le sujet « amène les élèves à travailler sur des notions ou des objets mathématiques dont la maîtrise n'est pas attendue en fin de Troisième » comme les solides d'Archimède dont l'icosaèdre tronqué fait partie.

Au final, il génère chez les élèves une sensation de satisfaction, un sentiment de réussite et une impression que les mathématiques sont accessibles et ne constituent pas un produit achevé. Il développe ainsi la confiance en soi et suscite l'envie de vivre une nouvelle aventure avec un nouvel énoncé.

Références

[1] Équipe DREAM. *La boîte sans couvercle*. . IREM de Lyon, 14 juillet 2020.

[2] `Wikipedia`. *Isopérimétrie*. . 2023.

[3] R. Ferréol. *Isocaèdre tronqué*. . 2017.

[4] Ministère de l'Éducation nationale. « Programmes d'enseignement de l'école élémentaire et du collège ». In : *Bulletin officiel de l'Éducation nationale* (26 novembre 2015). .

Florence Soriano-Gafiuk est professeure des universités à l'université de Lorraine. Elle intervient dans la formation des enseignants.
Manuella Freyermuth est professeure de mathématiques au collège Jean-Jacques Kieffer à Bitche, dans l'académie de Nancy-Metz.
florence.soriano-gafiuk@univ-lorraine.fr

APMEP

19-22 oct
2024

Le Havre - Journées Nationales

LA NORMANDIE, UN HAVRE DE MATHÉMATIQUES

Illustration : OL - Couleur : Claire Dumas

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public
« De la maternelle à l'université »

UNIVERSITÉ LE HAVRE NORMANDIE

Sommaire du nº 552

Automat(h)ismes