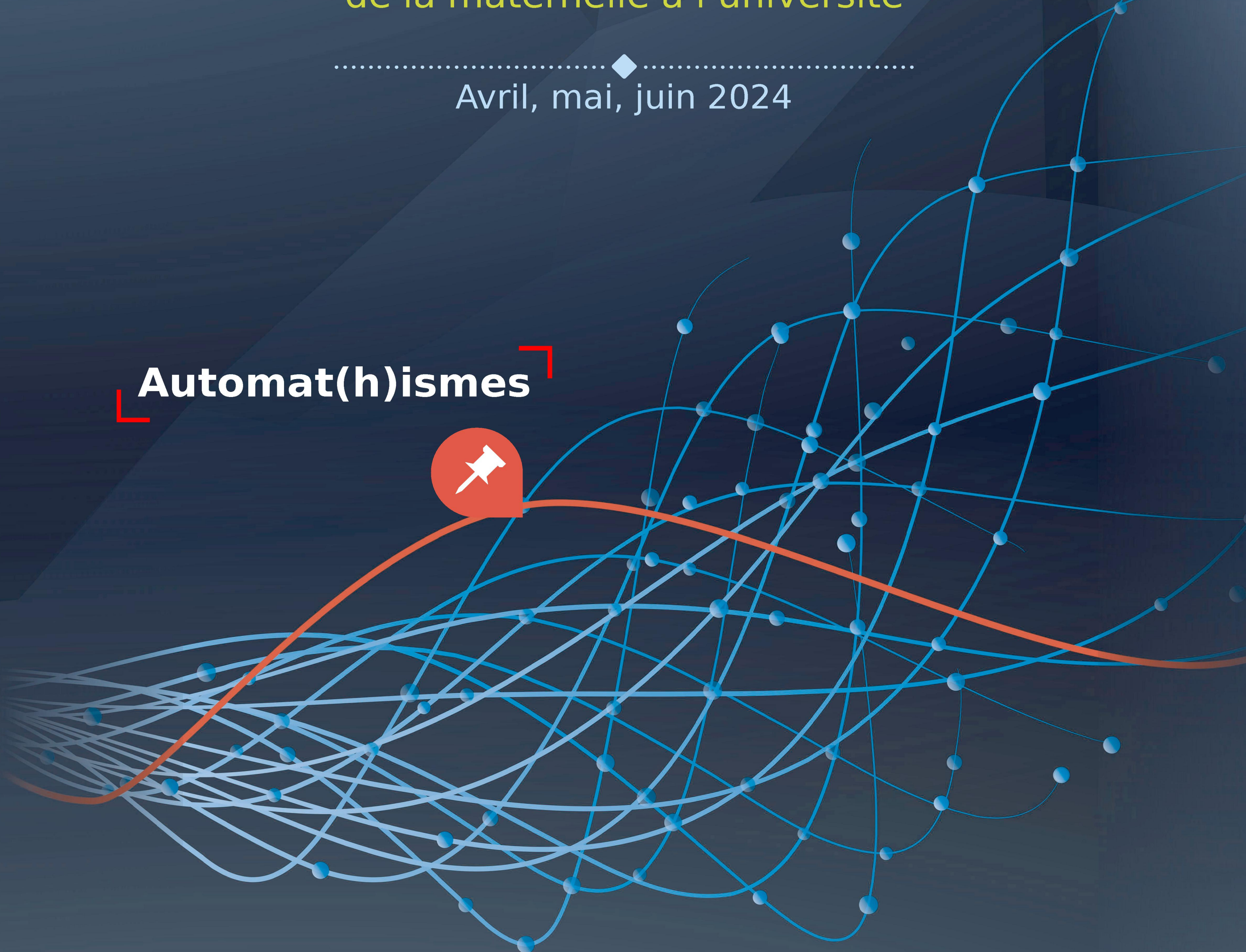
Le bulletin de l’APMEP - N° 552

# AU FIL DES MATHS

## de la maternelle à l’université

Avril, mai, juin 2024

## Automat(h)ismes



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l’Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

***Au fil des maths***, c'est aussi une revue numérique augmentée :
**https://afdm.apmep.fr**

Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est joint le BGV n° 236
spécial « Journées Nationales »


## ÉQUIPE DE RÉDACTION

**Directrice de publication** : *Claire PIOLTI-LAMORTHE.*

**Responsable coordinatrice de l'équipe** : *Cécile KERBOUL.*

**Rédacteurs** : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY.*

**« Fils rouges » numériques** : *Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTEVEZ, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Lionel PRONOST, Agnès VEYRON.*

**Illustrateurs** : *Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL, Olivier LONGUET.*

**Équipe TEXnique** : *Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD.*

**Maquette** : *Olivier REBOUX.*

**Correspondant Publimath** : *François PÉTIARD.*

**Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.**
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : juin 2024. ISSN : 2608-9297.
Impression : iLLiCO by L'ARTÉSIENNE
ZI de l'Alouette, Rue François Jacob, 62800 Liévin

# Des Mises En TRAIN pour bien démarrer

*Les rituels de début d'heure sont préconisés par notre institution et ancrés dans nos pratiques de classe… Claire Piolti-Lamorthe et Sophie Roubin nous présentent leur façon originale de les aborder en collège.*

**Claire Piolti-Lamorthe & Sophie Roubin**

Le travail autour de la construction et l'entretien d'automatismes interroge à la fois le temps scolaire — comment travailler sur un temps long, en considérant l'erreur comme un levier d'apprentissage — et le transfert de ces automatismes dans les activités de résolution de problèmes.

Les rituels actuels sont souvent centrés autour de questions-flash. Cette modalité, du type « entraînement par le test » articule question et *feed-back* immédiat. Elle permet d'entretenir des automatismes déclaratifs et procéduraux [1] en poussant l'élève à fournir un effort cognitif pour récupérer l'information pertinente et ainsi consolider les chemins mentaux y menant.

Notre proposition de rituel que nous nommons Mise En TRAIN (MET) [1] repose sur une organisation particulière : le temps de recherche est systématiquement suivi d'un temps de mise en commun et d'un temps de bilan. Les MET contiennent des entraînements par le test, en respectant l'organisation précédente, et élargissent cette pratique à la construction d'automatismes, qu'ils soient procéduraux ou relevant de raisonnements et de stratégies de résolution en lien avec les compétences mathématiques.

## Quelle modalité ?

Une Mise En TRAIN s'organise en quatre temps.

1. Une situation est écrite ou projetée au tableau lorsque les élèves entrent en classe. La plupart du temps, cette activité est indépendante du chapitre en cours, mais s'articule avec d'autres MET. L'élève doit accepter sur ce temps de ne pas savoir immédiatement quelle est la notion en jeu.
2. Un temps de recherche, d'une dizaine de minutes en général, est laissé aux élèves. La recherche est le plus souvent individuelle ou en binôme. Les élèves savent que l'erreur est autorisée et sert de support à la réflexion collective. Ils peuvent choisir leur méthode de résolution et produisent une trace écrite personnelle. Une rédaction complète de la solution n'est pas forcément demandée, en particulier pour travailler les stratégies, l'activité peut être limitée à la recherche d'une ébauche de raisonnement ou de pistes de travail.
3. Un temps de mise en commun, d'une durée très variable, qui peut porter sur la reconnaissance de situations mathématiques, les procédures mises en œuvre, l'analyse d'erreurs, les stratégies de recherche… Les élèves sont amenés à argumenter pour convaincre leurs camarades de la validité ou de la non-validité des démarches. Pour conserver un format court, l'objet de la mise en commun doit être choisi et anticipé (en restant adaptable).
4. Un temps de bilan lors duquel une trace écrite est construite avec la classe et validée par le professeur en cohérence avec la mise en commun. Même si elle figure uniquement dans le cahier d'exercices ou sur un support choisi par les élèves, elle a un statut de connaissance institutionnalisée.

1. Cf. le document Éduscol *Les automatismes au collège* page 4.

## Quels bénéfices pour les élèves et les enseignants ?

D'après le guide *La résolution de problèmes au collège* (pages 16 et 17), la recherche montre que « *le transfert entre problèmes qui reposent sur la même structure mathématique mais dont l'habillage varie est souvent pauvre* » [2]. De plus, comme le souligne Gérard Sensevy « *être en difficulté, puis en échec, dans la forme scolaire classique, ce n'est pas ne pas savoir faire, ni même ne pas savoir. C'est ne pas comprendre à temps. C'est ne pas comprendre dans le temps imparti* » [3].

Différents aspects des MET nous semblent permettre de contourner ces difficultés en bousculant le temps scolaire et en favorisant l'explicitation des mathématiques en jeu.

De par leur aspect rituel, le déroulement des MET est prévisible pour l'élève, de même que les attentes et les exigences de l'enseignant. Le contenu des MET est *a priori* inconnu de l'élève. Malgré cela, ces situations, où aucune expertise n'est exigée, offrent un cadre d'apprentissage où l'élève peut s'engager sans risques. Il construit des habitudes de travail qui contribuent à développer la confiance dans sa capacité d'apprendre. Ne pas connaître à l'avance la notion en jeu constitue un double levier. Face à la tâche, l'élève opère des choix simultanés ou successifs parmi un ensemble de possibles, parce qu'il a accepté de se laisser surprendre. Le cadre rassurant offert par le rituel lui permet d'oser questionner ses choix. L'erreur devient vectrice de décision et ainsi productrice d'apprentissage. Par ailleurs, l'élève doit faire un effort cognitif pour reconnaître la structure mathématique sous-jacente ce qui met au travail l'encodage [2] qu'il a effectué.

Les activités diverses proposées en MET suivent une progression construite parallèlement à la progression ordinaire. On évite ainsi le transfert par simple analogie avec les notions travaillées dans les chapitres en cours.

Pour une même tâche à réaliser, certains élèves mobilisent des connaissances en lien avec la notion visée par l'enseignant, tandis que d'autres développent des procédures différentes, quelquefois plus intuitives ou plus pragmatiques. Des représentations différentes des situations proposées peuvent donc émerger et être partagées pour construire des automatismes de reconnaissance des outils mathématiques à mobiliser. Cela permet aussi de créer un « parcours de découverte » de certaines notions. Les élèves sont mis en situation de recherche, les procédures personnelles ne sont jamais empêchées par l'enseignant. C'est par nécessité, grâce à des jeux sur les variables, que les élèves, à leur rythme, ont recours aux méthodes expertes, au moment où elles leur semblent plus performantes. Il ne s'agit donc pas ici de trouver « la bonne procédure » puisque différents cadres et différentes démarches sont possibles. Certaines démarches peuvent alors être institutionnalisées (pour un temps ou de façon plus définitive). Le temps imparti à l'apprentissage d'une notion est allongé. La temporalité longue de l'approche d'une notion permet à l'élève de s'approprier savoirs et savoir-faire au moment de l'année où ils prennent sens pour lui. Il peut ainsi faire des liens entre les différentes approches d'une même notion et mieux comprendre la transversalité d'un outil mathématique.

Le temps de mise en commun appuyé sur l'échange entre pairs nous semble pertinent pour répondre aux difficultés de transfert des processus de résolution de problèmes. Les élèves doivent argumenter leurs choix de procédures, en fonction des situations et de la reconnaissance des structures mathématiques et pour cela verbaliser les stratégies qui ont gouverné ses choix. Cette phase d'explicitation permet de construire avec les élèves des banques de connaissances (au sens large), que nous détaillerons dans le paragraphe suivant. Le bilan et l'explicitation des outils en jeu à l'issue de ce temps de travail favorisent

2. Le terme d'encodage est lié à la mémorisation. La recherche montre que la résolution d'un problème inédit s'appuie sur les résolutions antérieures qui sont encodées de manière pertinente ou pas.

donc chez les élèves l'élaboration de liens d'ordre mathématique entre les problèmes résolus plutôt que des liens thématiques basés sur des indices superficiels. Cela nous semble répondre à la problématique suivante : « *Un enjeu essentiel est donc que les élèves n'encodent pas les énoncés travaillés en classe selon les seuls traits superficiels, ce qui les mettrait en échec dès lors qu'un nouveau problème cesserait de partager l'habillage du problème d'entraînement, mais qu'ils soient en mesure de repérer des propriétés qui sont pertinentes sur le plan mathématique* » [4].

Enfin, l'articulation entre les MET et le tissage avec les notions à acquérir sur des temps longs permet de rompre avec les pratiques ordinaires et favorise des apprentissages dans la durée. Le temps n'est plus « immédiat ». Des retours en arrière sont possibles pour les élèves et les enseignants. De plus, la linéarité du temps scolaire est questionnée. Les MET nous permettent de « sortir » du découpage des notions en chapitres, avec leur évaluation finale sur laquelle on peut difficilement revenir, chapitres qui entraînent souvent la parcellisation des connaissances des élèves. À l'aide de mises en TRAIN liées, on passe de pratiques linéaires, cumulatives à des pratiques spiralaires. Pour que les liens se fassent, il est nécessaire d'avoir préparé le travail, les outils en amont. Et c'est avec toutes ces entrées que le motif se dessine, se tisse.

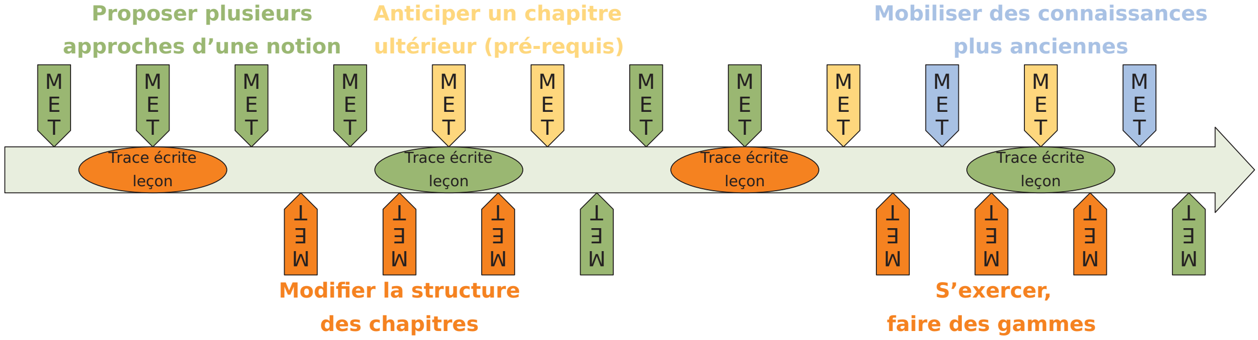



Figure 1. *Penser l'organisation d'une progression.*

Finalement les MET permettent de répondre à une recommandation du socle commun [5] : « *L'élève [(...)] devra apprendre à réfléchir, à mobiliser des connaissances, à choisir des démarches et des procédures adaptées, pour penser, résoudre un problème, réaliser une tâche ou un projet, que ce soit dans une situation habituelle ou, plus difficile, dans une situation nouvelle ou inattendue.* »

## Quels automatismes construire ?

La partie 4.c « Automatiser des stratégies de résolutions » du document Éduscol *Les automatismes au collège* présente sous forme de carte mentale (voir figure 2 p. 29) différents champs dans lesquels les MET peuvent concourir à la construction d'automatismes. Elle est illustrée par des exemples qui clarifient les objectifs et l'intérêt dans plusieurs types de situation. Nous avons choisi ici de proposer, dans les domaines de la proportionnalité (en Sixième ou Cinquième) et de la résolution d'équations (en Quatrième), deux exemples de MET liées. Ces deux suites de MET illustrent à la fois l'intérêt de chacune des activités et l'importance de proposer plusieurs MET articulées qui forment un parcours de construction et de consolidation de l'apprentissage.

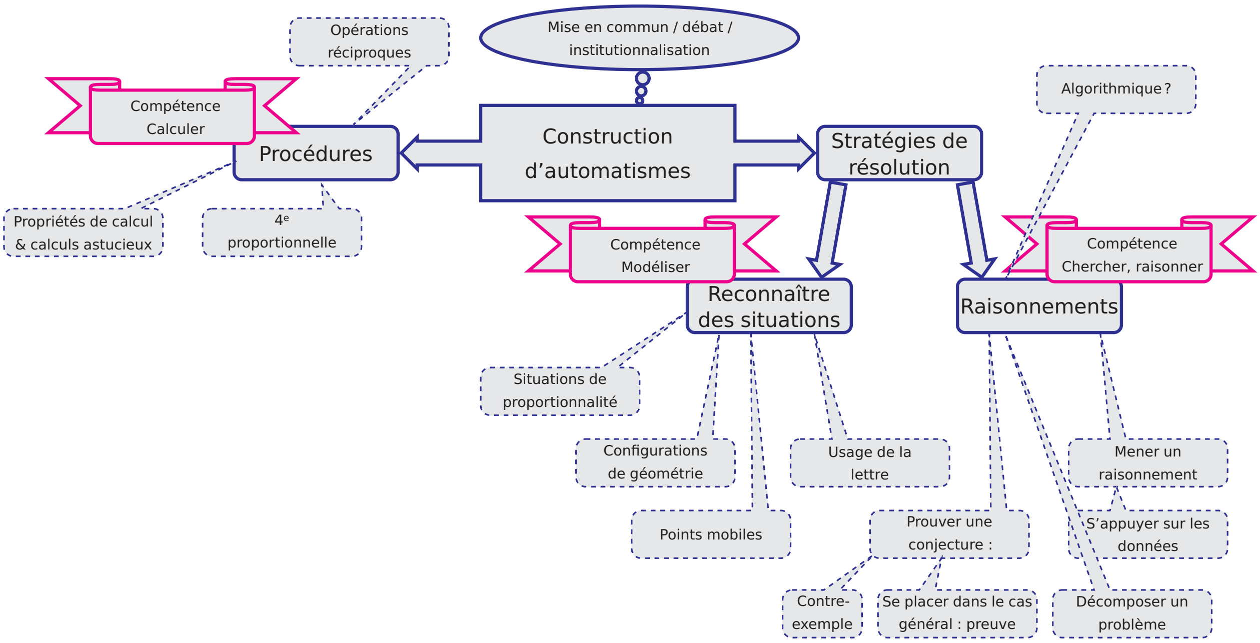



Figure 2. *Carte mentale du document Éduscol* Les automatismes au collège *(p. 38).*

## *Recours à la proportionnalité ?*

Les activités choisies questionnent la proportionnalité comme modèle pertinent dans chaque situation. Le but est d'éveiller l'esprit critique des élèves et d'automatiser ce questionnement pour éviter un recours systématique et parfois à mauvais escient à ce modèle. Cette série de MET s'appuie sur une situation dans laquelle le modèle proportionnel est un choix social qui peut être questionné, une situation non proportionnelle qu'il n'est pas possible de résoudre au collège et une dernière situation non proportionnelle qu'il est possible de résoudre. Ainsi, cela engage les élèves à opérer des vérifications quant à la validité du modèle choisi et à verbaliser ces choix en les argumentant. Les activités suivantes sont issues des ressources BRN EDU BaREM [6].

**Activité 1**

Chez un grossiste, 3 kg de thé valent 69 €.

1. Quel est le prix de 4,5 kg de ce thé ?
2. Quel est le prix de 45 kg de ce thé ?

Cet exercice pose un regard critique sur le modèle proportionnel : est-ce une situation de proportionnalité dans les deux questions ? Rien ne l'indique. Les élèves vont mobiliser la proportionnalité dans les deux questions sans questionner sa pertinence. Lors de la mise en commun, les élèves sont amenés à réaliser que c'est un choix social valable pour la première question mais qu'il faut que cela soit un choix fait sciemment dans la seconde. Dans le problème, il faudrait écrire : pour calculer le prix du thé, je considère que le vendeur ne fait pas de remise, donc que le prix du thé est proportionnel à la masse.

On peut aussi choisir de travailler sur la compétence *Calculer* et montrer qu'il existe de nombreuses façons de résoudre un problème de proportionnalité. L'élève peut choisir la méthode qui lui convient le mieux.

**Activité 2**


Figure 3.

Cette situation permet de développer l'esprit critique des élèves en proposant une situation authentique non proportionnelle qui engage pourtant par sa forme à utiliser la linéarité. Elle permet *in fine* d'engager une réflexion sur l'existence d'autres modèles.

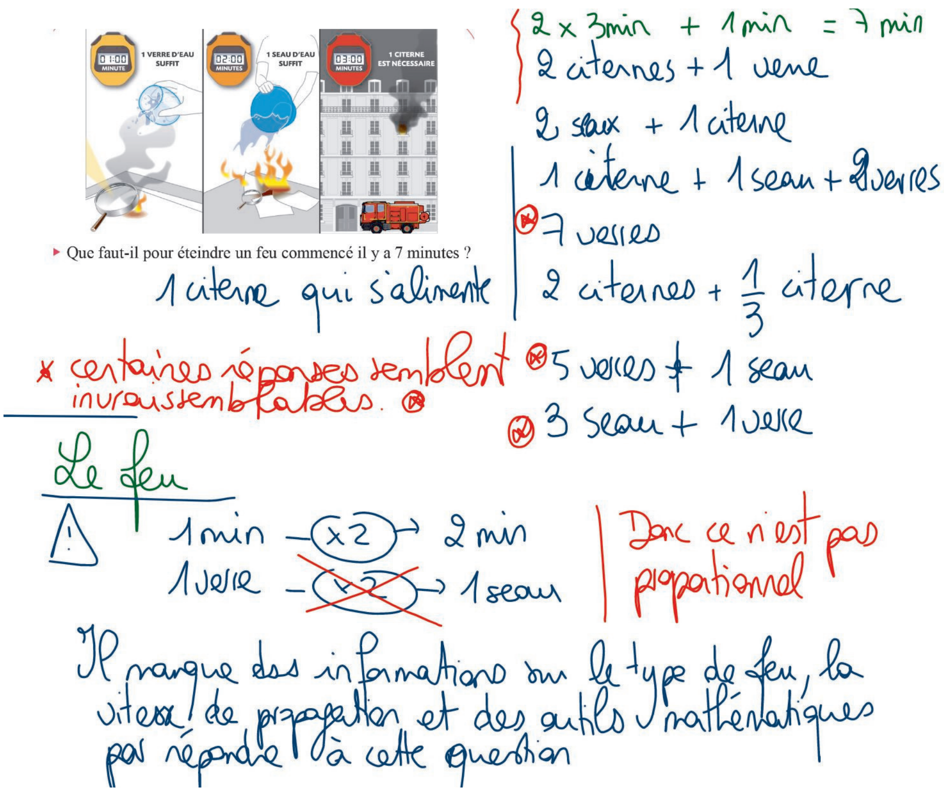



Figure 4. *Copie d'un tableau de mise en commun.*

**Activité 3**

Pierre a 38 ans, son fils a 11 ans.
Quel âge aura Pierre quand son fils aura 22 ans ?

L'idée ici est de montrer qu'il est possible de résoudre des problèmes qui ne relèvent pas de la proportionnalité. Les élèves peuvent avoir l'idée que venant à la suite des autres MET, le modèle proportionnel est à questionner. Les élèves qui auraient recours à la linéarité peuvent remettre en cause le modèle proportionnel en travaillant sur une vérification. De plus, plusieurs représentations de la situation peuvent cohabiter (en envisageant la différence d'âge qui reste constante ou les 11 ans qui se sont écoulés).

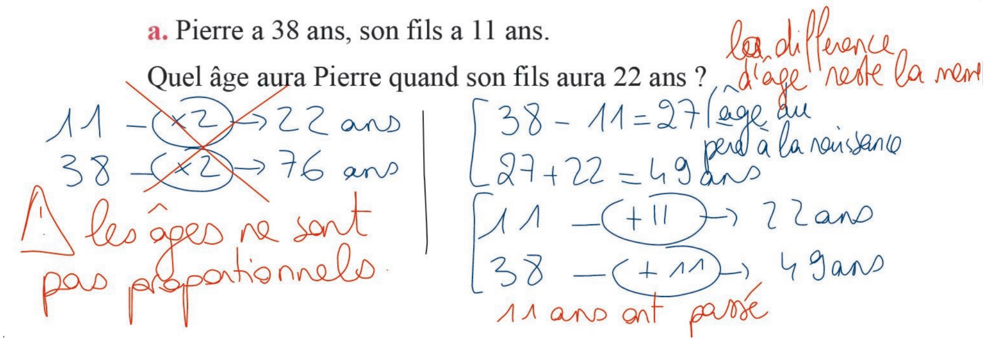



Figure 5. *Copie de tableau, recueil de procédures d'élèves.*

## *Mise en équation*

Remarque : les activités 4 et 5 sont utilisables dès la Cinquième (après la distributivité pour l'activité 5).

Confrontés à des problèmes relevant de différents cadres (source : site PÉGAME), les élèves vont être amenés à reconnaître des situations dans lesquelles « on cherche un nombre… » et que l'on pourra modéliser à l'aide d'une équation. Dans ces exercices, on peut différencier la demande faite aux élèves en exigeant uniquement la reconnaissance d'une situation pouvant être résolue à l'aide d'une équation, le choix de l'inconnue, la mise en équation et réserver la résolution aux plus rapides.

Cette série de MET articule trois situations exigeant un recours progressif à l'algèbre. Dans la première situation, le programme peut être « remonté » sans modification, dans le second il est nécessaire de modifier la forme de l'expression littérale représentant le programme et dans la troisième, l'inconnue figure dans les deux membres de l'équation. De plus, le fait que les trois situations soient présentées dans des cadres différents induit un travail sur la structure mathématique et pas sur l'habillage des problèmes. Les élèves sont amenés à faire des liens entre des situations portant sur des familles infinies de nombres ou des nombres inconnus et l'usage d'une lettre pour représenter ces nombres. Ces différentes activités donnent du sens à l'usage de la lettre et à la production d'expressions comme outil pertinent de résolution de problèmes.

**Activité 4. Programme de calcul**

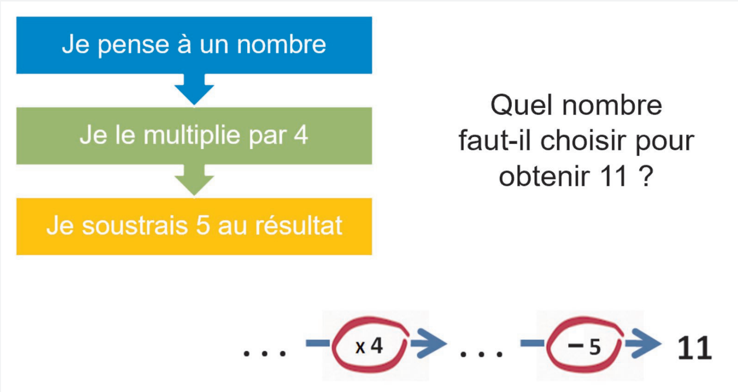



Figure 6.

Plusieurs stratégies peuvent être mises en œuvre :

- essais-ajustements pour lesquels on pourra mettre en avant une organisation permettant d'être plus efficace dans la recherche (dichotomie sans le dire ou fausse position) ;
- changement de registre suivant l'objectif ou le niveau des élèves :

— registre numérique en notant en couleur par exemple le nombre choisi pour repérer des régularités ;
— registre algébrique pour automatiser les essais dans la calculatrice ;
— registre algorithmique pour réaliser les essais dans un tableur ;
— schéma pour remonter le programme de calcul.

Pour que les élèves remontent le programme, un travail préalable sur les opérations réciproques (en reliant le registre des schémas et les opérations à trous) aura été fait. Cette notion qui prépare à la résolution d'équations doit être travaillée dès le début du collège, par exemple dans des activités autour des programmes de calculs ou des opérations à trous.

Des changements de registres pourront permettre aux élèves d'établir des liens entre les opérations et de donner du sens aux expressions en liant plusieurs représentations des programmes de calcul.

**Activité 5**

Compléter cet arbre à calcul en déterminant le nombre dans la case verte.

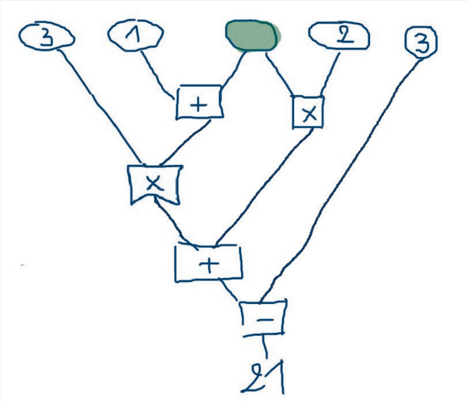



Figure 7.

Les valeurs choisies permettent une résolution par essais-ajustements. L'inconnue apparaît dans plusieurs branches de l'arbre à calcul. L'expression représentant l'arbre doit être modifiée si on souhaite remonter le programme de calcul ou résoudre une équation. Cet exercice propose à nouveau un changement de registre et la lettre peut avoir plusieurs statuts suivant la procédure de résolution choisie par l'élève. Les compétences travaillées sont *Modéliser* et *Calculer*.

En termes de stratégies : l'élève peut par exemple utiliser un registre numérique ou algébrique, faire le lien avec le programme de calcul que l'on pouvait remonter. Cette procédure sera mise en défaut car l'inconnue apparaît plusieurs fois. Il sera alors amené à réviser sa représentation du problème.

**Activité 6. Point mobile**

E est un point du segment [AB].
(CB) est perpendiculaire à [AB] et BC = 5,6 cm.
(DA) est perpendiculaire à (BA) et DA = 2,4 cm.
Lorsque [AB] mesure 9 cm, où faut-il placer le point E pour que l'aire du triangle BCE soit égale à l'aire du triangle ADE ?

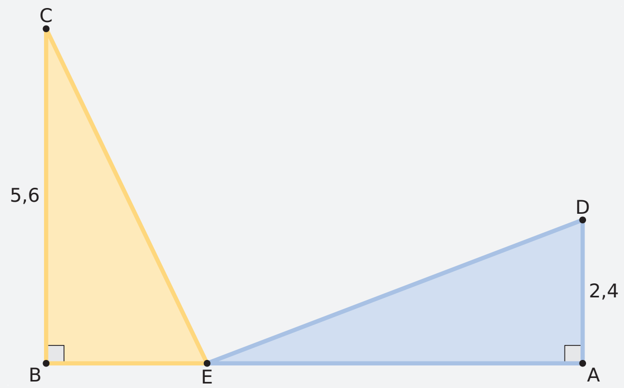



Figure 8.

Ce problème est issu de la géométrie. Il nécessite pour être résolu de passer du cadre géométrique au cadre algébrique. L'inconnue n'est ni proposée, ni induite par la question. Les élèves vont souvent commencer par faire des essais ou raisonner sur le rapport entre les côtés connus de chaque triangle rectangle. Ils vont se rendre compte qu'il y a plusieurs inconnues, qu'à un problème peut correspondre plusieurs équations et qu'il faut rechercher le lien entre ces inconnues. Cette MET permet de travailler les compétences *Chercher* et *Modéliser*.

## Des stratégies

Au-delà de la reconnaissance de structures mathématiques communes à différentes situations, les mises en commun peuvent être une occasion de verbaliser avec les élèves des pistes de stratégies (l'art de planifier et de coordonner un ensemble d'actions en vue d'atteindre un but) et leur montrer, voire afficher en classe, la carte mentale suivante.


Figure 9. *Carte mentale sur les stratégies de résolution.*

## Conclusion

Notre propos est donc d'ouvrir le champ des possibles. Se saisir des temps de rituels avec des questions flash ou des MET constitue un bon moyen de faire entrer les élèves dans l'activité mathématique dès le début d'heure et de varier les modalités de travail et le contenu durant la séance. Articuler ces pratiques permet de travailler différents aspects de l'activité mathématique, les automatismes, les stratégies de résolution de problème… Cela nécessite de faire cohabiter les notions dans des progressions entrelacées. Une bonne occasion de travail en équipe pour davantage spiraler notre enseignement !

## Références

[1] S. Martin-Dametto, C. Piolti-Lamorthe et S. Roubin. « TRAIN : Travail de Recherche ou d'Approfondissement avec prise d'INitiative ». In : *Bulletin Vert* nº 502 (2013). , p. 11-22.

[2] Miriam Bassok, Ling-Ling Wu et Karen L. Olseth. « Judging a Book by its Cover: Interpretative Effects of Content on Problem Solving Transfer ». In : *Memory & Cognition* nº 23 (1995), p. 354-367.

[3] Gérard Sensevy. « Forme scolaire et temps didactique ». In : *Le Télémaque* 1. Nº 55 (2019). , p. 93-112.

[4] Emmanuel Sander. « La résolution de problèmes arithmétiques à énoncés verbaux ». In : *Anae (approche neuropsychologique des apprentissages chez l'enfant)* nº 156 (2018), p. 611-619.

[5] *Décret nº 2015-372 relatif au socle commun de connaissances, de compétences et de culture*. . 31 mars 2015.

[6] Hatier. *60 Mises En TRAIN autour de la proportionnalité*. Chacune est constituée d'un énoncé vidéo-projetable associé à une fiche d'accompagnement . 2016-2021.

Claire Piolti-Lamorthe, présidente actuelle de l'APMEP, est professeure de mathématiques au collège Raoul-Dufy à Lyon et formatrice à l'Inspé de Lyon.
Sophie Roubin, présidente de la Régionale de Lyon, est professeure de mathématiques au collège Ampère à Lyon et chargée de mission à l'IFÉ-ÉNS de Lyon.

claire.piolti-lamorthe@ac-lyon.fr
sophie.roubin@ac-lyon.fr

# APMEP

19-22 oct
2024

Le Havre - Journées Nationales

## LA NORMANDIE,
## UN HAVRE DE MATHÉMATIQUES

Illustration : OL - Couleur : Claire Dumas

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public
« De la maternelle à l'université »

UNIVERSITÉ LE HAVRE NORMANDIE

# Sommaire du nº 552

## Automat(h)ismes



CERCLE DE RECHERCHE ET D'ACTION PÉDAGOGIQUES

CultureMATH

MATh.en.JEANS

APMEP

www.apmep.fr