

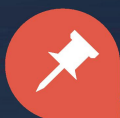
Le bulletin de l'APMEP - N° 551

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Janvier, Février, Mars 2024

Maths en 3D



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :

<https://afdm.apmep.fr>



Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » **numériques** : Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTEVEZ, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Lionel PRONOST, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Éric ASTOUL, Stéphane FAVRE-BULLE, Adèle HUGUET, Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Sixtine MARÉCHAL, Jean-Sébastien MASSET.

Équipe T_EXnique : Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Mars 2024. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau



Troisième degré en 3D

Dans les chapitres introductifs aux nombres complexes des manuels de mathématiques expertes, il est fréquent de trouver un aperçu historique sur les équations du troisième degré avec « les formules de Cardan » et « l'invention par Bombelli des nombres complexes ». Il est plus rare d'y trouver tout le travail de réflexion sur le cube, en tant qu'objet solide, qui a permis d'élaborer les procédés de résolution. L'auteure vous propose de le (re-)découvrir !

Marie-Line Moureau

Introduction

La recherche de l'expression par radicaux des solutions des équations du troisième degré a mobilisé les algébristes pendant plusieurs siècles. Dans son *Ars magna* de 1544, Jérôme Cardan expose des avancées significatives. Mais, écrit en latin dans un style très éloigné de celui d'aujourd'hui, son texte est d'un abord plutôt difficile au XXI^e siècle. En 1585, Simon Stevin publie l'*Arithmétique*, un traité rédigé en français, dans lequel il synthétise et met « dans son ordre et dans son style » les travaux de Cardan. Nous nous proposons donc de suivre Stevin en actualisant le vocabulaire et les notations. Conformément aux algébristes de la Renaissance, nous appelons « résoudre une équation » le fait d'en trouver une solution strictement positive. Comme eux, nous ne résolvons ici que des équations particulières, dont les résolutions ont valeur de modèle : ce sont des « exemples génériques ». Rappelons que ni Cardan, ni Stevin, ne donnent de formules. Leur écriture nécessite un symbolisme étendu aux coefficients qui ne sera élaboré qu'à partir des travaux de François Viète (1591).

Classification des équations du troisième degré

Il est possible de classer les équations du troisième degré (voir tableau ci-dessous) sur le modèle de la classification de celles du second degré faite par Al-Khârezmi¹ dans son *Al Kitâb al mo-khtasar fi hisâb al jabrwa-l-moqâbala* (Livre de la restauration et de la comparaison, vers 800).

Le tableau ci-dessous recense les différents cas (a , b et c désignant des nombres non nuls, mais aussi bien positifs que négatifs).

Le cas $x^3 = c$ (cas 1 dans le tableau) est immédiat.

Les cas $x^3 = bx$, $x^3 = ax^2$ et $x^3 = ax^2 + bx$ (cas 2, 3 et 4 du tableau) sont, selon la terminologie de Stevin, des « dérivatives » d'équations du premier ou du deuxième degré : elles ne présentent donc pas de difficulté.

Stevin montre que $x^3 = ax^2 + c$ et $x^3 = ax^2 + bx + c$, (cas 6 et 7) se ramènent soit au cas $x^3 = bx$, soit au cas $x^3 = bx + c$, c'est-à-dire sans terme du second degré.

Il reste alors à traiter $x^3 = bx + c$ (cas 5).

Équations simples	1)	$x^3 = c$	Résolution immédiate
	2)	$x^3 = bx$	Dérivée de $x^2 = b$
	3)	$x^3 = ax^2$	Dérivée de $x = a$
Équations complexes	4)	$x^3 = ax^2 + bx$	Dérivée de $x^2 = ax + b$
	5)	$x^3 = bx + c$	
	6)	$x^3 = ax^2 + c$	Se ramène à 2) ou 5)
	7)	$x^3 = ax^2 + bx + c$	Se ramène à 2) ou 5)

1. On peut retrouver les équations canoniques d'Al-Khârezmi sur le site CultureMath .

Traitement des cas 6 et 7 : comment se ramener à $x^3 = bx + c$ ou $x^3 = bx$?

La transformation repose, selon le signe de a , sur l'une ou l'autre des deux constructions géométriques ci-dessous, mais le procédé est le même qu'il y ait un terme en x (cas 7) ou pas (cas 6).

La première construction géométrique (figure 1)² montre que le grand cube final est la somme d'un premier cube vert de côté x , de trois pavés jaunes identiques dont une face est d'aire x^2 et d'épaisseur a , de trois pavés gris identiques dont une face est d'aire a^2 et d'épaisseur x , et enfin d'un cube rouge de côté a .

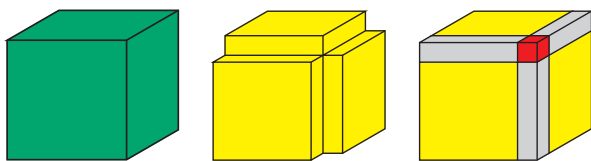


Figure 1. À partir d'un cube de côté x , construction d'un cube de côté $(x+a)$.

Résolution de $x^3 = -6x^2 + 32$

On commence par l'écrire $x^3 + 6x^2 = 32$.

Le premier terme, $x^3 + 6x^2$ peut être vu comme la somme du cube vert et des trois pavés jaunes de la construction présentée en figure 1. Pour obtenir le cube final, il suffit d'ajouter les trois pavés gris et le cube rouge. Donc il suffit d'ajouter $3a^2x$ et a^3 , c'est-à-dire $12x+8$, car ici $a = 2$, pour transformer $x^3 + 6x^2$ en un cube parfait.

L'équation $x^3 = -6x^2 + 32$ équivaut donc à $(x+2)^3 = 12x+40$, ou à $(x+2)^3 = 12(x+2) + 16$, qui est bien de la forme $x^3 = bx + c$.

Remarque : de même, l'équation $x^3 = -6x^2 + 16$ devient $(x+2)^3 = 12(x+2)$, de la forme $x^3 = bx$.

La deuxième construction (figure 2)³ montre que le cube blanc s'obtient en enlevant au grand cube trois pavés de même épaisseur a , mais de plus en

plus petits en volume : d'abord le pavé vert, puis le pavé orange, et enfin le pavé bleu.

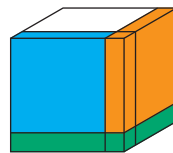


Figure 2. D'un cube de côté x , extraire un cube de côté $(x-a)$.

D'après la figure, en désignant les pavés par leur couleur :

- Vert = ax^2 ,
- Orange = Vert - a^2x ,
- Bleu = Orange - $((\text{Vert} - \text{Orange}) - a^3)$.

Le cube de côté $(x-a)$ est donc obtenu en enlevant au cube de côté x , d'abord le pavé vert de volume ax^2 , puis le pavé orange de volume $ax^2 - a^2x$ puis enfin le pavé bleu de volume $(ax^2 - a^2x) - (a^2x - a^3)$, c'est-à-dire $ax^2 - 2a^2x + a^3$.

Résolution de $x^3 = 6x^2 + 10x + 300$

On commence par l'écrire $x^3 - 6x^2 = 10x + 300$.

Le premier terme, $x^3 - 6x^2$, peut être interprété comme le fait d'enlever au grand cube de côté x , trois pavés identiques de volume $2x^2$ (donc identiques au pavé vert). Or, pour obtenir le cube blanc, les trois pavés à enlever ne sont pas identiques mais de plus en plus petits. Il faut donc ajouter ce qui a été enlevé en trop. On ajoute ainsi d'abord a^2x , puis $2a^2x - a^3$, soit au total $3a^2x - a^3$, c'est-à-dire $12x - 8$ car ici $a = 2$. En ajoutant cette expression aux deux membres, l'équation devient $(x-2)^3 = 22(x-2) + 336$, qui est de la forme $x^3 = bx + c$.

En résumé, si l'équation du troisième degré présente un terme en x^2 alors, en ajoutant aux deux membres une expression judicieuse de la forme $mx + p$, le problème est ramené à la résolution d'une équation du troisième degré sans terme en x^2 .

Donc, dès lors que l'on saura résoudre l'équation $x^3 = bx + c$, on saura venir à bout de toute équation du troisième degré, quelle qu'elle soit.

2. Cette construction est derrière l'identité remarquable $(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$.

3. Cette construction est derrière l'identité remarquable $(x-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$.

Traitement du cas 5 : la résolution de $x^3 = bx + c$

Pour cette résolution, il est nécessaire d'imaginer une autre décomposition du cube.

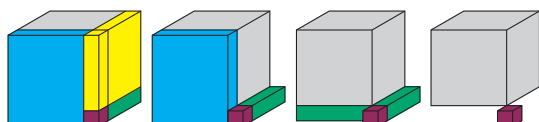


Figure 3. Un cube comme somme de trois pavés identiques et de deux cubes.

Si on enlève successivement trois pavés identiques (jaune, bleu, vert) de dimensions a , b et $a + b$, d'un cube de côté $a + b$, il reste deux cubes (gris et violet), l'un de côté a et l'autre de côté b .

Donc, si $a + b = c$ (a et b strictement positifs) alors $c^3 = a^3 + b^3 + 3abc$.

La figure 4 montre l'exposé de ce résultat par Stevin.

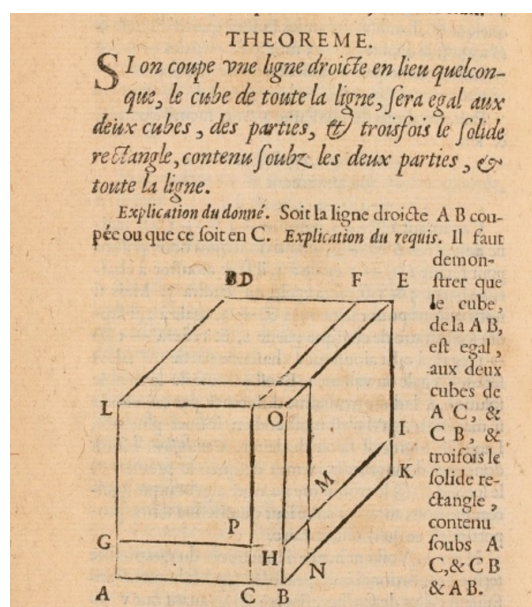


Figure 4. Une décomposition du cube (Stevin, Arithmétique, 1585, p. 302).

Il faut maintenant distinguer trois cas selon les signes⁴ de b et c . Nous allons ainsi résoudre successivement $x^3 = 6x + 40$, $x^3 = 7x - 6$ et $x^3 = -6x + 20$.

Réolvons $x^3 = 6x + 40$

Imaginons que dans la figure 3, la somme des deux cubes gris et violet est égale à 40 et que chacun des pavés a pour volume $2c$. On a alors $c^3 = 40 + 6c$. Le côté c du grand cube est donc solution de l'équation $x^3 = 6x + 40$.

En résumé, si deux nombres a et b sont tels que $a^3 + b^3 = 40$ et $ab = 2$, alors $a + b$ est solution de $x^3 = 6x + 40$.

Or, $a^3 + b^3 = 40$ et $ab = 2$ donnent, en multipliant par a^3 : $a^6 + 8 = 40a^3$. L'équation $a^6 + 8 = 40a^3$ est une équation dérivative de $X^2 + 8 = 40X$; elle ne pose donc pas de problème de résolution.

Cette équation, $X^2 + 8 = 40X$, a deux solutions positives. Prenons la plus grande $20 + \sqrt{392}$. On a alors $a = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}}$ et alors $b^3 = 40 - a^3$ entraîne $b = \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$.

Finalement, $\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$ est solution de $x^3 = 6x + 40$, ce que Cardan note :

Re v: cubica 20 p: Re 392 p: Re v: cubica 20 m: Re 392

et Stevin :

$\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$

Ce résultat a embarrassé les algébristes car ils savent (solution dite « évidente ») que 4 est une solution de $x^3 = 6x + 40$. Stevin cherche, sans réel succès, à lever cette apparente contradiction. Si la méthode pour passer de l'écriture avec radicaux à l'écriture 4 avait été « légitimement inventée », dit-il, « ce serait singulière invention ». Mais il sait, à partir de l'expression avec radicaux, trouver des approximations décimales aussi proches de 4 que souhaité, c'est-à-dire qu'il sait « approcher infiniment 4 ». Le procédé de résolution est donc validé à ses yeux.

La méthode pour démontrer l'équivalence des deux expressions est maintenant connue. Puisque $\sqrt{392} = 14\sqrt{2}$, les racines cubiques disparaîtront si on trouve deux nombres u et v tels que $20 + \sqrt{392} = (u + v\sqrt{2})^3$ et $20 - \sqrt{392} = (u - v\sqrt{2})^3$.

4. Les constantes b et c ne peuvent être toutes les deux négatives, puisque l'on cherche une solution positive.

Or, en prenant pour u la moitié de la solution entière, on trouve, par développement et identification des termes, $u = 2$ et donc $v = 1$. D'où $\sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}} = (2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2}) = 4$.

Réolvons $x^3 = 7x - 6$

La méthode précédente ne convient pas car la somme des deux cubes ne peut être égale à -6 . En revanche, elle convient pour résoudre $x^3 = 7x + 6$. Notons s sa solution ($s = 3$ de manière « évidente »). Stevin ajoute s^3 aux deux membres de l'équation $x^3 = 7x - 6$, puis divise⁵ chacun d'eux par $x + s$. Pour le premier membre, $x^3 + 27$, il obtient le quotient $x^2 - 3x + 9$. Pour le second membre, $7x + 7s$ car $s^3 = 7s + 6$, le quotient est 7.

Ainsi l'équation $x^3 = 7x - 6$ devient $x^2 - 3x + 9 = 7$; une équation du second degré qui a deux solutions, 1 et 2.

Donc l'équation $x^3 = 7x - 6$ a deux solutions 1 et 2.

Les solutions de $x^3 = 7x - 6$ sont les solutions de $x^2 - sx + s^2 = 7$, où s est solution de $x^3 = 7x + 6$.

Réolvons $x^3 = -6x + 20$

On commence par l'écrire $x^3 + 6x = 20$. Cette équation peut être vue comme la traduction du fait que, dans la figure 3, la somme d'un des deux cubes gris ou violet (disons le violet de côté b) et des trois pavés est égale 20. Le grand cube est donc la somme du cube gris et de 20; ou encore $c^3 = a^3 + 20$.

Si on trouve c et a tels que $c^3 = a^3 + 20$ et $ac = 2$, alors la relation $c^3 = a^3 + b^3 + 3abc$ devient $20 = b^3 + 6b$, et elle montre que b , qui vaut $c - a$, est solution de $x^3 + 6x = 20$.

En résumé, si deux nombres c et a sont tels que $c^3 - a^3 = 20$ et $ac = 2$, alors $c - a$ est solution de l'équation $x^3 + 6x = 20$.

Or, $c^3 - a^3 = 20$ et $ac = 2$ donnent $c^6 - 8 = 20c^3$. Cette équation est une équation dérivée de

$X^2 - 8 = 20X$. Celle-ci a pour unique solution positive $10 + \sqrt{108}$.

Donc $c = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}}$ et, puisque $c^3 - a^3 = 20$, $a = \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$.

Pour finir, la solution de l'équation $x^3 = 6x + 20$ est donc $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$.

Le fait que le nombre 2 soit, de manière évidente, solution de l'équation ne nous trouble plus, nous avons vu comment procéder.

D'une part $10 + \sqrt{108} = (1 + \sqrt{3})^3$ et d'autre part $\sqrt{108} - 10 = (\sqrt{3} - 1)^3$; ce qui prouve que $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10} = 2$.

Un cas très particulier entré dans l'histoire

Réolvons $x^3 = 15x + 4$

En appliquant le procédé déjà utilisé pour l'équation $x^3 = 6x + 40$, on en arrive à chercher deux nombres a et b tels que $(a^3 + b^3 = 4$ et $ab = 5)$. Une multiplication par a^3 donne $a^6 + 125 = 4a^3$, équation dérivée de $X^2 + 125 = 4X$. Cette dernière équation n'a pas de solution car elle équivaut à $(X - 2)^2 = -121$.

On pourrait alors être tenté de dire que l'équation $x^3 = 15x + 4$ n'a pas de solution... mais 4 en est une solution évidente ! C'est un épineux problème !

Quand le procédé donne une expression avec des radicaux alors que la solution est entière, comme pour $x^3 = 6x + 40$ ou $x^3 = -6x + 20$, nous avons vu comment faire le lien.

Mais quand le procédé ne donne pas de solution comme pour $x^3 = 15x + 4$ alors qu'il y en a une de manière évidente, faut-il rejeter le procédé ? Ou bien faut-il accepter de manipuler des racines de nombres négatifs ?

L'équation $x^3 = 15x + 4$ est entrée dans l'histoire des mathématiques car, pour sa résolution dans *L'Algebra Parte Maggiore Dell'arimetica* publié en 1572, Rafael Bombelli applique le procédé

5. Nous utiliserions aujourd'hui la factorisation $(x^3 + s^3) = (x + s)(x^2 - sx + s^2)$.

(n'écrivant que les étapes essentielles des calculs) et présente ce qui deviendra les nombres complexes.

Regardons cette page historique (Bombelli, 1572, p. 194).

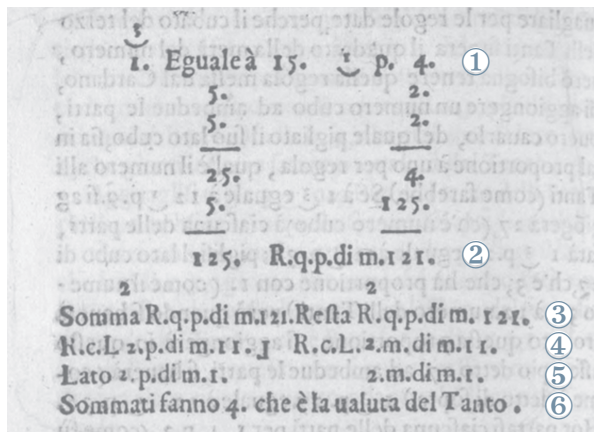


Figure 5. Résolution de l'équation $x^3 = 15x + 4$.

- ① L'équation $x^3 = 15x + 4$.
- ② Afin de pouvoir manipuler la racine carrée de -121 , Bombelli la note *R.q.p.di m.121*, à lire « racine carrée de *piu di meno* 121 ».
- ③ Ce qui l'amène à devoir calculer la somme (*Somma*) et la différence (*Resta*), de 2 et de *piu di meno* 121.
- ④ Puis, la méthode mobilise les racines cubiques (*R.c.*) de, entre deux *L* (l'un droit, l'autre renversé) faisant office de parenthèses, « 2 *piu di meno* 11 » et « 2 *meno di meno* 11 », soit pour nous $\sqrt[3]{2+11i}$ et $\sqrt[3]{2-11i}$. Ainsi en quelque sorte $\sqrt{-121}$ est devenu $11\sqrt{-1}$.
- ⑤ Bombelli calcule ensuite le *Lato*, c'est-à-dire le côté (sous-entendu de chaque cube, donc les racines cubiques). Il trouve « 2 *piu di meno* 1 » (notre $2+i$) et « 2 *meno di meno* 1 » (notre $2-i$).
- ⑥ Et donc la somme, qui est la solution (valeur du *Tanto*), est bien égale à 4.

Stevin connaît l'ouvrage de Bombelli mais refuse ces *piu di meno* et *meno di meno* car il ne peut produire des approximations décimales à partir de telles expressions. Ainsi pour lui, comme pour Cardan avant lui, certaines équations du troisième degré ne sont pas encore résolues de manière totalement satisfaisante.

Conclusion

Les équations du troisième degré ne sont au programme d'aucune classe de lycée et c'est tant mieux : il y a déjà tant à enseigner ! Cependant, il nous semble que ce détour historique peut être le support d'une activité en Première dans le prolongement du travail sur les équations du second degré. Il fournit une ouverture sur le programme de mathématiques expertes et il montre comment l'algèbre s'est constituée à partir de figures géométriques. Dès lors que le langage symbolique a permis de traduire les procédés par des formules, le lien avec la géométrie a été coupé. L'algèbre est alors perçue comme le lieu d'une technicité sur des symboles. Ne peut-il être judicieux de s'appuyer sur l'histoire pour donner à voir qu'il s'agit aussi de traduire le réel ?



Marie-Line Moureau a été professeure de mathématiques et formatrice premier degré dans l'académie de Nantes. Aujourd'hui retraitée, elle est membre du groupe Histoire des mathématiques de l'IREM des Pays de la Loire et fait également partie du comité de rédaction d'*Au fil des maths*.

mlmoureau@aol.fr

© APMEP Mars 2024

Sommaire du n° 551



Maths en 3D

Éditorial

Opinions

Mission « Exigence des savoirs »
— Bureau national

Catégorisons des formes en maternelle
— Valentina Celi

Cartographie des mathématiques que je ne
comprends pas — Mickaël Launay

Avec les élèves

Semaine des maths à l'école — Charlotte Digne

Signons les maths — Amélie Cazottes

La voiture autonome — Laurent Didier

✦ Apprentissage des solides à l'école maternelle
— Élise Curien & Sandrine Lemaire

✦ Le mètre cube — Anne-France Acciari

✦ Les débuts de la géométrie en Sixième
— Lise Malrieu

1 Ouvertures

✦ Fabrication de très grandes boîtes avec une feuille A4
— Florence Soriano-Gafiuk & Manuella Freyermuth 53

3 ✦ Des photophores en dodécaèdre régulier
— Marie Lhuissier 60

6 Petite enquête sur être ou ne pas être un rationnel
— François Boucher 65

14 Récréations

Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 71

Des problèmes dans nos classes — Valérie Larose 74

25 ✦ La croix et le papillon — Olivier Longuet 75

30 ✦ Le temps des cerises
— Séverine Verneyre & Karim Zayana 79

35 Au fil du temps

42 Hommage à Gilles Cohen — Alice Ernoult 84

Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau 85

45 Matériaux pour une documentation 87

✦ Troisième degré en 3D — Marie-Line Moureau 91



CultureMATH

