

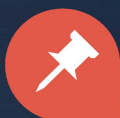
Le bulletin de l'APMEP - N° 551

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Janvier, Février, Mars 2024

Maths en 3D



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :

<https://afdm.apmep.fr>



Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » **numériques** : Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTEVEZ, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Lionel PRONOST, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Éric ASTOUL, Stéphane FAVRE-BULLE, Adèle HUGUET, Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Sixtine MARÉCHAL, Jean-Sébastien MASSET.

Équipe T_EXnique : Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Mars 2024. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau



Petite enquête sur... être ou ne pas être...



Et voici le troisième volet de la petite enquête de François Boucher, consacré aux nombres rationnels.

François Boucher

Pour un lycéen standard, il n'est pas assuré que le nombre rationnel ait un statut de nombre bien défini. Au mieux, il est identifié à la fraction laquelle se reconnaît bien sûr à la présence de la barre — comme le décimal à sa virgule.

On dispose de représentations variées des rationnels : la fraction $\frac{a}{b}$ solution de l'équation $bx = a$ avec diverses représentations géométriques, la fraction irréductible (avec unicité), la décomposition partie entière plus partie fractionnaire (avec unicité) en relation avec la division euclidienne, le produit de puissances (relatives) de nombres premiers (avec unicité) et enfin la représentation décimale illimitée, périodique à partir d'un certain rang (avec possibilité de répéter infiniment le 9 pour récupérer les décimaux) ; l'unicité est parfois importante dans les raisonnements mais reste souvent implicite. Toute la question est d'illustrer le fonctionnement de ces représentations avec des problèmes pertinents.

Pour pouvoir parler de nombre non rationnel — typiquement les racines carrées de petits entiers — la question de l'existence se pose. Le corpus euclidien y pourvoit, déjà avec les constructions « règle et compas », puis de façon plus abstraite, avec les rapports de grandeurs de même espèce, comme celui du rapport de la circonférence à son diamètre. Mais observons que pour répondre à la question : « existe-t-il un nombre rationnel dont le carré est

égal à 2 (ou à N) », il n'est nul besoin d'avoir conscience de l'existence d'un sur-ensemble de celui des rationnels.

Les racines

La star $\sqrt{2}$ mériterait ici une place de choix mais d'autres l'ont déjà fait : Benoît Rittaud avec tout un livre [1] et Alexander Bogomolny[†] qui a recensé vingt-neuf preuves sur son site [▶](#).

La démonstration de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un carré est un haut fait des mathématiques grecques. Dans le dialogue platonicien éponyme, Théétète rapporte que son professeur Théodore de Cyrène aurait démontré l'irrationalité des racines des entiers jusqu'à dix-sept.

Si l'on ne sait rien sur l'éventuelle méthode utilisée par Théodore, celle du pair et de l'impair (rapportée par Aristote) est une candidate qui demande toutefois — à défaut d'une maîtrise rhétorique improbable — la bonne intelligence et le bon emploi des écritures $2p$ et $2p + 1$, et bien sûr quelques compétences algébriques.

Pour $\sqrt{11}$ et $\sqrt{13}$, il faut ajouter une bonne dose de persévérance dans le travail algébrique. En revanche, la méthode n'aboutit pas pour $\sqrt{17}$. Examinons cela.



Peut-on démontrer par le pair et l'impair que, si N n'est pas un carré parfait, $\sqrt{N}$ n'est pas rationnel ?

Si N est pair, on se ramène sans problème au cas où $N = 2P$ avec P impair par des divisions successives par quatre. Dans ce cas, la démonstration pair/impair fonctionne exactement comme pour $N = 2$.

Si N est impair, l'égalité $a^2 = Nb^2$ avec a et b premiers entre eux (ou sans diviseur commun autre que 1) ne laisse possible que le cas a et b impairs. On aboutit alors à $4(u(u+1) - Nv(v+1)) = N - 1$; comme $u(u+1)$ et $v(v+1)$ sont pairs, on en déduit que nécessairement $8 \mid (N - 1)$. Donc, dans le cas contraire, une contradiction apparaît. Si, en revanche, $8 \mid (N - 1)$, aucune contradiction ne peut être obtenue en restant dans le cadre du pair/impair. Ce qui exclut donc 17, 33, 41, 57, 65, 73, Au passage, on (re)découvre que tous les carrés parfaits impairs sont de la forme $8P + 1$.

Il est instructif de reprendre le cas de $N = 17$ et de tourner en rond avec les formes $2p, 2p+1$ pour tenter de faire apparaître une contradiction. En revanche, le 3-pair, 3-impair¹ aboutit, mais échoue avec 73. La voie semble sans issue, ou l'enquête prolongée.

Observons que ce qui précède ne prouve pas que l'irrationalité de $\sqrt{17}$ ne saurait être obtenue par le pair et l'impair. Mais comment fournir une telle démonstration ?

Depuis un siècle, la communauté — modestes enseignants ou brillants mathématiciens — a multiplié les démonstrations de l'irrationalité de $\sqrt{N}$ avec un double objectif : simplicité et élégance. De quoi faire une bien belle affiche. Ainsi il est possible de proposer une démonstration d'irrationalité n'utilisant, semble-t-il, *aucun* théorème savant d'arithmétique.

Supposons donc $N \geq 2$ non carré parfait. À partir de $\sqrt{N} = \frac{a}{b}$ (non entier), on déduit $\frac{bN}{a} = \frac{a}{b}$.

Or deux fractions égales ont des parties fractionnaires égales. On en déduit une égalité de la forme $\frac{r}{a} = \frac{s}{b}$ avec $0 < r < a$ et $0 < s < b$ (les restes) donc $\frac{a}{b} = \frac{r}{s}$ et Fermat de conclure : « descente infinie » ! Cette diablerie apparaît dans le livre de Conway [2].

A priori la connaissance utile est la division euclidienne³ pour écrire $\frac{a}{b} = q + \frac{s}{b}$ avec $0 \leq s < b$. Pointons plus simplement la propriété d'Archimède restreinte aux entiers : si $b \geq 1$, a tombe entre deux multiples consécutifs de b .

Prenons l'exemple de $\sqrt{3}$ dont on trouvera une belle illustration géométrique dans le numéro 546 d'*Au fil des maths*  : avec $N = 3$, $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ fournit $\frac{3b}{a} = \frac{a}{b}$ donc $\frac{3b-a}{a} = \frac{a-b}{b}$ puis $\frac{3b-a}{a-b} = \frac{a}{b}$ avec $3b-a < a$ et $a-b < b$.

Notons que le passage de $\frac{3b}{a} = \frac{a}{b}$ à $\frac{3b-a}{a-b} = \frac{a}{b}$ est un cas particulier de feu le théorème des rapports égaux, aujourd'hui dilué dans le « calcul algébrique » sans plus de lien avec la proportionnalité.

Signalons une variante tout aussi diabolique : si deux fractions sont égales, l'une des deux étant irréductible, le numérateur et le dénominateur de l'autre sont des équi-multiples de ceux de la première. Il s'agit de la réciproque — oubliée — du théorème de simplification bien connu des collégiens. En supposant $\frac{a}{b}$ irréductible, de $\frac{bN}{a} = \frac{a}{b}$, on déduit : a est un multiple de b !

Cerise sur le gâteau : dans les cours d'arithmétique pour bacheliers du début du xx^e siècle, figuraient de nombreux théorèmes — plus d'une centaine ! — sur les « fractions » dont un qui apporte une solution directe au problème des racines (de tous les ordres) : toute puissance d'une fraction irréductible est une fraction irréductible.

Le cas de l'exposant deux est très intuitif en examinant au besoin quelques exemples : lorsqu'on élève au carré un produit de nombres premiers, il y a un invariant : la liste des premiers.

La clef est bien sûr $(ab)^2 = a^2b^2$. Et ensuite, en élevant au carré une fraction irréductible... Ainsi le carré d'une fraction irréductible ne saurait être un entier. Une formalisation du raisonnement n'est pas utile à la compréhension mais peut constituer un challenge.

Bien sûr, demander si la racine carrée d'un rationnel peut être un rationnel s'impose.

Examinons ensuite quelques arguments de géométrie très euclidienne.

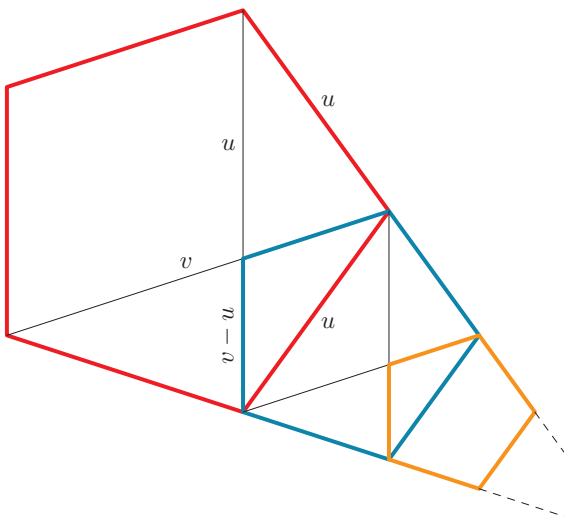
1. Voir le numéro 549 d'*Au fil des maths* .
2. Et aussi celle de (presque) tous les nombres « célèbres ».
3. Dont toute l'arithmétique de $\mathbb{Z}$ est issue.



Le carré construit sur la diagonale d'un carré a une aire double du carré initial, ce que montre limpide-
ment un découpage. Le rapport des aires de deux
carrés étant égal au carré du rapport [des longueurs]
de leurs côtés, la géométrie fournit donc un rapport
de deux grandeurs dont le carré est l'entier 2 que
l'on dénote aujourd'hui $\sqrt{2}$.

On ne sait pas comment les Grecs ont démontré la
plus célèbre des incommensurabilités, mais l'anthy-
phérèse, autrement dit l'algorithme d'Euclide, dans
sa version antique par soustractions successives, est
suggérée : en prouvant que l'algorithme ne se ter-
mine pas, on démontre l'incommensurabilité [3]. Et
il s'agit d'une preuve directe.

Prenons l'exemple du nombre d'or : on le trouve
dans le pentagone régulier comme rapport de la
diagonale au côté, rapport de longueurs⁴.



La figure parle toute seule (à condition de voir le tri-
angle isocèle ou le losange) ; d'où l'égalité — par simi-
litude ou, visiblement, par homothétie — des rapports
 $\frac{v}{u}$ et $\frac{u}{v-u}$.

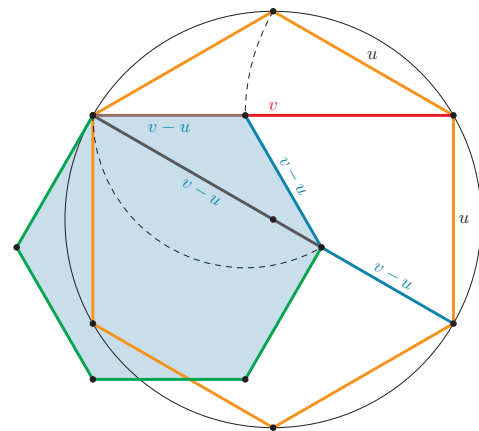
On en déduit, par anthyphérèse non finie, que u et
 v sont incommensurables, en langage actuel, le rap-
port $r = \frac{v}{u}$ est irrationnel. Sous-produit de l'égalité

précédente, r vérifie $r^2 = r + 1$ donc $r = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$. Joli !

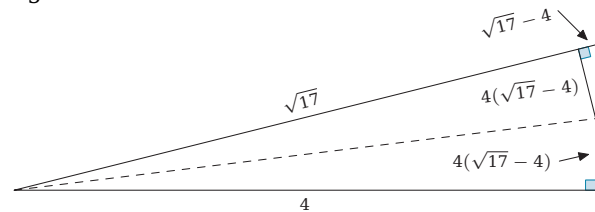
Une construction similaire peut-être faite pour
prouver l'irrationalité de $\sqrt{3}$ en utilisant un hexa-
gone régulier : le rapport entre la diagonale
(distincte du diamètre) et le côté est $\sqrt{3}$. La
construction illustre la démonstration proposée
précédemment pour l'irrationalité de $\sqrt{3}$.

4. Certains historiens pensent qu'il s'agit du premier incommensurable.

5. Nombre dont l'écriture décimale ne comporte que des 1.



Et même $\sqrt{17}$ en laissant le lecteur décoder la
figure.



Un peu d'infini

Les élèves découvrent assez vite les divisions
entre nombres entiers qui ne se finissent pas, mais
finissent par se répéter ; la possibilité de désigner
le résultat de la division inachevable par une écri-
ture, qui s'avère caractéristique, est une étape
importante dans l'étude des rationnels et fournit
un critère d'irrationalité.

$C_{10} = 0,123\,456\,789\,101\,112\ldots$ est-il rationnel ?

Ce nombre, dit de Champernowne, est obtenu par
concaténation des écritures décimales des nombres
entiers : il n'est ni entier, ni décimal.

Si l'intuition est forte sur l'absence de période (« ça
change tout le temps »), l'écriture d'une preuve
s'avère problématique, même dans le supérieur. Le
nombre $0,101\,001\,000\,100\,001\,000\,00\ldots$ est un bon
tremplin.

Il est loisible de procéder par l'absurde : supposons
donc que C_{10} soit rationnel non décimal.

Son développement décimal illimité (qu'on a sous les
yeux) est alors périodique à partir d'un rang r avec
une longueur de période $p \geq 1$; d'après la définition
de C_{10} il existe au-delà du rang r , des répunits⁵ de
longueur arbitrairement grande, donc il en existe
au moins un de longueur strictement plus grande



que $2p$; ce répunit contient alors une période entière qui est ainsi elle-même un répunit, donc il n'y aurait dans l'écriture de C_{10} que des 1 à partir d'un certain rang, ce qui est faux. De multiples variantes de cette démonstration sont possibles⁶.

Cette démonstration pourrait aisément être adaptée pour prouver l'irrationalité, par exemple, de 0,135 791 113 151 719... mais, plus difficilement, celle du nombre de Copeland-Erdős

$$C_E = 0,235\,711\,131\,719\,232\,931\,\dots$$

L'irrationalité de C_E mérite le détour. On raisonne par l'absurde, en supposant la période de longueur p . Il existe bien des répunits premiers, par exemple $R_{109\,297}$, mais on ne sait pas s'il en existe une infinité. Deux clefs : pour tout $n \geq 1$, il existe un nombre premier à n chiffres ; pour cela il faudra, une fois de plus, faire appel à Joseph Bertrand. Ensuite, il existe dans la partie périodique un nombre premier P de longueur mp (avec $m \geq 2$ assez grand pour être au-delà de la partie non périodique). Et on exhibe alors un diviseur de ce nombre premier. Pour en illustrer le principe, prenons $m = 2$ et pour période $abcdefg$ (soit $p = 7$). Soit le recouvrement de P tombe « juste » soit $P = abcdefgabcdefg$ et $abcdefg$ divise P , sinon on a, par exemple, $P = defgabcdefgabc$ et $defgabc$ divise P . On pourra consulter la bible [4].

Les développements décimaux illimités fabriqués par concaténation ont fait l'objet de très nombreuses recherches, en particulier sur des critères d'irrationalité et aussi de transcendance.

Euler et Archimède

L'irrationalité des nombres célèbres, au premier rang desquels π et e , ne relève pas de l'arithmétique élémentaire. Se pose en premier lieu la question de leur définition. Pour π , le demi-périmètre d'un cercle de rayon unité doit suffire en permettant le lien avec les fonctions trigonométriques. Pour e , c'est $\exp(1)$; la fonction exponentielle sera donc convoquée.

Les premières démonstrations sont dues respectivement à Léonard Euler pour e et à Jean-Henri Lambert pour π . Leur méthode repose sur l'emploi de fractions continues dont nous ne parlerons pas ici, à notre grand regret car il s'agit d'un

outil extrêmement pertinent pour les questions d'irrationalité.

Selon Christian Radoux [5], une grande idée — remontant à Liouville — derrière les démonstrations d'irrationalité (et aussi de transcendance) est que *des éléments rares distincts sont distants les uns des autres*. La rareté renvoie ici au cardinal mais pas seulement : les entiers sont plus rares que les décimaux qui le sont plus que les rationnels qui le sont plus que les irrationnels.

Ainsi deux entiers distincts sont distants d'au moins 1 ; mais les rationnels aussi sont distants entre eux d'une façon quantifiable :

$$\text{si } x = \frac{a}{b} \text{ et } x \neq \frac{c}{d}, \text{ alors } |d| \cdot \left| x - \frac{c}{d} \right| \geq \frac{1}{|b|}$$

en observant que $\frac{1}{b}$ ne dépend que de x . Dès lors, on a un critère d'irrationalité de x avec une traduction séquentielle immédiate :

s'il existe une suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ de rationnels distincts de x telle que $\left(b_n \left| x - \frac{a_n}{b_n} \right| \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors x est irrationnel⁷.

En utilisant la suite $u_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \exp(t) dt$, démontrer que le nombre d'Euler e est irrationnel.

Bien évidemment, il y a quelques étapes non triviales qui ne s'inventent pas mais u_n peut faire l'objet d'une exploration avec un système de calcul formel :

$u_n = e - v_n$ avec $n!v_n \in \mathbb{N}$ qui se démontre par récurrence⁸. Une majoration simple donne ensuite $0 \leq u_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$ et le critère s'applique.

La bonne question est de comprendre d'où sort cette intégrale ; l'expert aura reconnu le reste de Laplace de la formule de Taylor appliquée à la fonction $\exp$ entre 0 et 1. Mais est-ce généralisable ? Voilà un petit sujet d'enquête.

Jonathan Sondow[†], brillant mathématicien américain, a imaginé une étonnante version géométrique de cette démonstration [6].

Il introduit une suite de segments définis par récurrence : $I_1 = [2; 3]$ et, pour $n \geq 2$, I_n est le deuxième

6. Bien sûr, les répunits ne font rien à l'affaire.

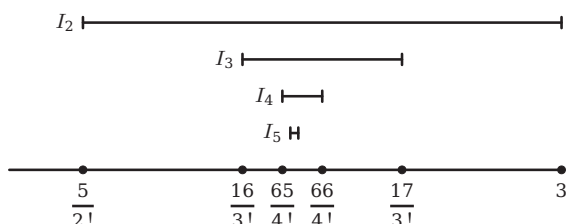
7. La réciproque est vraie. Dans le supérieur, ce critère est caché dans la densité de $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$.

8. Avec une intégration par parties à la clef ; et cela fournit en prime $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ mais ce n'est pas indispensable. Il n'est pas si simple de prouver au lycée que (v_n) converge vers e . La preuve ultra-classique de l'irrationalité de e utilise cette représentation.



segment de la subdivision régulière de I_{n-1} en n segments.

Ainsi $I_2 = \left[\frac{5}{2!}; \frac{6}{2!} \right]$, $I_3 = \left[\frac{16}{3!}; \frac{17}{3!} \right]$, $I_4 = \left[\frac{65}{4!}; \frac{66}{4!} \right]$ et plus généralement $I_n = \left[\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}; \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n!} \right]$.



Sachant que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$, on en déduit $\bigcap_{n \geq 1} I_n = \{e\}$.

Pour chaque $n \geq 1$, on a donc $e \in I_{n+1}$ qui est strictement inclus dans I_n dont les extrémités sont de la forme $\frac{a_n}{n!}$ et $\frac{a_n+1}{n!}$ avec a_n entier; donc e n'est pas égal à un rationnel dont le dénominateur est $n!$ et cela quel que soit n . Mais tout rationnel est de cette forme puisque $\frac{p}{q} = \frac{p(q-1)!}{q!}$. Donc e n'est pas un rationnel. Remarquable et limpide! Et ce n'est pas une démonstration par l'absurde.

Une variante d'usage constant consiste à exhiber une suite d'entiers non nuls qui converge vers 0, pas immédiatement perçue comme une belle contradiction.

Illustrons cela avec la preuve de l'irrationalité des racines rapportée par Miklos Laczkovich dans un livre magnifique [7] et qui fait joliment appel à l'analyse de Première.

Soit $r = \sqrt{2} - 1$; on a $0 < r < 1$ donc (r^n) converge vers 0. La formule du binôme permet d'écrire $r^n = a_n + b_n\sqrt{2} > 0$ où a_n et b_n sont des entiers. Si $\sqrt{2}$ est rationnel et égal à $\frac{p}{q}$ ($q \geq 1$), on aura $qr^n = qa_n + pb_n$: on a ainsi construit une suite d'entiers non nuls qui converge vers 0.

Il est clair que cette démonstration se généralise. La faire écrire pour $\sqrt[3]{17}$, puis pour $\sqrt[3]{36}$ est instructif sur la difficulté des lycéens à s'emparer des ressorts d'une démonstration.

Passons au plus célèbre des nombres réels: le nombre d'Archimède. On sort des capacités de découverte d'un lycéen et une recherche (très) « dirigée » est inévitable.

Démontrer que π est irrationnel en utilisant la

$$\text{suite } I_n = \frac{\pi^{2n+1}}{n!} \int_0^1 (x-x^2)^n \sin(\pi x) dx.$$

L'utilisation d'un système de calcul formel permet déjà de faire deux conjectures: I_n est un polynôme en π à coefficients entiers et la suite (I_n) converge vers 0.

L'encadrement $0 < I_n \leq \pi \frac{(\pi^2/4)^n}{n!}$ s'obtient par les inégalités de la moyenne. Il est habile⁹ de poser $P_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}$; deux intégrations par parties demandant plus de confiance que d'habileté conduisent à la relation

$$I_{n+2} = (4n+6)I_{n+1} - \pi^2 I_n$$

Cette relation de récurrence permet alors de démontrer que I_n est un polynôme (pair) en π à coefficients entiers de degré au plus n . Sous l'hypothèse $\pi = \frac{p}{q}$, on a d'une part $q^n I_n$ entier non nul et d'autre part $(q^n I_n)$ qui converge vers 0, convergence qui demande sans doute un coup de pouce mais mérite un temps de recherche.

On dispose de démonstrations similaires pour l'irrationalité de l'image d'un rationnel par les fonctions trigonométriques, logarithme et exponentielle.

Ainsi l'irrationalité de $\ln(r)$ lorsque r est rationnel (distinct de 1) peut s'obtenir par l'étude de la suite d'intégrales

$$I_n = \frac{bp^{2n+1}}{q^{2n}n!} \int_0^1 x^n(1-x)^n \exp\left(\frac{p}{q}x\right) dx$$

sous les hypothèses $r = \frac{a}{b} > 1$ et $\ln(r) = \frac{p}{q}$.

On démontre que I_n est entier non nul et que la suite (I_n) converge vers 0. Mais il y a du travail. La similitude avec l'intégrale introduite pour π est flagrante; Ivan Niven[†] a mis à jour le dénominateur commun de toutes ces démonstrations d'irrationalité [8].

Pour terminer ce paragraphe citons le nom de Roger Apéry[†], mathématicien français, qui démontra en 1978 (à l'âge de 62 ans), et à la stupéfaction générale, l'irrationalité de $\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

La stupéfaction est venue du fait que les mathématiques utilisées pour cet exploit étaient toutes disponibles du temps d'Euler¹⁰.

9. L'expert aura reconnu un polynôme dont la dérivée n -ième est le polynôme de Legendre de degré n . Ce n'est pas un hasard.

10. Avec de la persévérance, on peut suivre le développement de cet extraordinaire calcul dans le livre de Julian Havil [9].





Algébrique et pas entier !

Observons que les rationnels sont caractérisés comme racine des équations du premier degré à coefficients entiers. Les irrationnels les plus simples comme $\sqrt{N}$ sont racines d'une équation du second degré à coefficients entiers.

Un réel est dit *algébrique* s'il est solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers. Ainsi $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ est algébrique car $(\alpha^2 - 5)^2 = 24$. Si le polynôme est unitaire, le réel¹¹ est qualifié d'*entier algébrique*. C'est le cas de $\sqrt{17}$ et de α . Tous les rationnels sont algébriques, mais, parmi eux, seuls les entiers (relatifs) sont des entiers algébriques. On a alors un critère plutôt simple, qui peut être démontré dans chaque situation particulière.

Un entier algébrique (réel) est soit un entier (relatif), soit un irrationnel.

Il s'agit d'une application directe du théorème de Gauss (ou du théorème de factorisation unique). De plus, les seuls entiers possibles sont les diviseurs du terme constant du polynôme annulateur.

Ainsi, de $\alpha > 1$, on déduit qu'il est irrationnel.

Plus spectaculaire est une solution élémentaire du problème

$\sigma_n = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}$ est irrationnel.

Problème fort difficile ; pourtant une idée simple s'impose : une petite expérience avec un système de calcul formel permet de mettre au point un algorithme naïf de calcul d'un polynôme annulateur de σ_n à partir d'un polynôme annulateur de σ_{n-1} .

Ainsi, avec $P_2 = X^2 - 2$, on a $P_2(X - \sqrt{3}) = X^2 + 1 - 2\sqrt{3}X$, donc en posant $Q_2 = X^2 + 1$ et $R_2 = -2\sqrt{3}X$ puis $P_3 = (Q_2 - \sqrt{3}R_2)(Q_2 + \sqrt{3}R_2) = X^4 - 10X^2 + 1$, et on a bien $P_3(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$. Les polynômes ainsi obtenus ne sont pas de degré minimum mais sont bien unitaires à coefficients entiers. Une récurrence le démontrant fonctionne sans problème.

Cela prouve que σ_n est un entier algébrique. Reste à prouver que σ_n n'est pas entier et la seule existence du polynôme annulateur ne suffit pas. Il est nécessaire de pénétrer plus avant dans la relation $P_n(\sigma_n) = 0$.

Ceci a été réalisé par Greg Patruno en 1988 [10]. Mais dans des cas particuliers, tout fonctionne et même se généralise.

Ainsi avec $\sigma = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{11}$, la méthode décrite donne un polynôme annulateur unitaire qu'il n'est pas utile de calculer, son existence suffit ! Donc σ est un entier algébrique ; il suffit alors de prouver que σ n'est pas entier par exemple avec une calculatrice.

La petite enquête « être ou ne pas être » s'achève ici bien que le sujet soit à peine effleuré. Nous espérons avoir convaincu qu'au delà de « la visite de l'œuvre » $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, il y a du grain à moudre, à tous les niveaux, avec les nombres.

Références

- [1] Benoît Rittaud. *Le fabuleux destin de $\sqrt{2}$* . Le Pommier, 29 mars 2006.
- [2] John Conway et Richard Guy. *The book of numbers*. Springer-Verlag, 1996.
- [3] François Boucher. « Preuves visuelles II ». In : *Au fil des maths* n° 547 (2023), p. 47-52.
- [4] Godfrey Hardy et Edward Wright. *Introduction à la théorie des nombres*. Traduction française de François Sauvageot. Vuibert, 2007.
- [5] Christian Radoux. *Les nombres transcendants*. Société Belge des Professeurs de Mathématiques, 1982.
- [6] Jonathan Sondow. « A geometric proof that e is irrational ». In : *American Mathematical Monthly* 113.7 (2006), p. 637-64.
- [7] Miklós Laczkovich. *Conjecture and proof*. Mathematical Association of America, 2001.
- [8] Ivan Niven. *Irrational numbers*. Mathematical Association of America, 1956.
- [9] Julian Havil. *The Irrationals*. Princeton University Press, 2012.
- [10] Gregg Patruno. « Sums of Irrational Square Roots Are Irrational ». In : *Mathematical Magazine* 61.1 (1988), p. 44-45.



François Boucher, à la retraite depuis quelques années, s'intéresse encore aux mathématiques et à leur enseignement.

boucherf@free.fr

© APMEP Mars 2024

11. Il est indispensable d'un point de vue théorique d'étendre ces définitions aux nombres complexes : ainsi i est algébrique.

Sommaire du n° 551



Maths en 3D

Éditorial

Opinions

Mission « Exigence des savoirs »
— Bureau national

Catégorisons des formes en maternelle
— Valentina Celi

Cartographie des mathématiques que je ne
comprends pas — Mickaël Launay

Avec les élèves

Semaine des maths à l'école — Charlotte Digne

Signons les maths — Amélie Cazottes

La voiture autonome — Laurent Didier

✦ Apprentissage des solides à l'école maternelle
— Élise Curien & Sandrine Lemaire

✦ Le mètre cube — Anne-France Acciari

✦ Les débuts de la géométrie en Sixième
— Lise Malrieu

1 Ouvertures

✦ Fabrication de très grandes boîtes avec une feuille A4
— Florence Soriano-Gafiuk & Manuella Freyermuth 53

3 ✦ Des photophores en dodécaèdre régulier
— Marie Lhuissier 60

6 Petite enquête sur être ou ne pas être un rationnel
— François Boucher 65

14 Récréations

Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 71

Des problèmes dans nos classes — Valérie Larose 74

25 ✦ La croix et le papillon — Olivier Longuet 75

30 ✦ Le temps des cerises
— Séverine Verneyre & Karim Zayana 79

35 Au fil du temps

42 Hommage à Gilles Cohen — Alice Ernoult 84

Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau 85

45 Matériaux pour une documentation 87

✦ Troisième degré en 3D — Marie-Line Moureau 91



CultureMATH

