

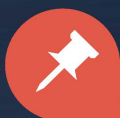
Le bulletin de l'APMEP - N° 551

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Janvier, Février, Mars 2024

Maths en 3D



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :

<https://afdm.apmep.fr>



Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » **numériques** : Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTEVEZ, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Lionel PRONOST, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Éric ASTOUL, Stéphane FAVRE-BULLE, Adèle HUGUET, Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Sixtine MARÉCHAL, Jean-Sébastien MASSET.

Équipe T_EXnique : Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Mars 2024. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau



Cartographie des mathématiques que je ne comprends pas

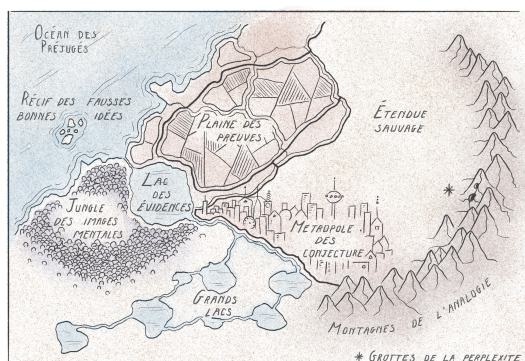
Mickaël Launay nous fait le plaisir de partager le texte de la conférence qu'il a donnée en clôture des Journées Nationales à Jonzac. Une belle invitation vers des terres inconnues.

Mickaël Launay

Lorsque l'on fait des maths, il existe plein de raisons différentes pour lesquelles notre compréhension peut se retrouver bloquée face à un résultat. Mickaël Launay propose une tentative de cartographie personnelle des différentes façons de ne pas totalement comprendre une idée.

Les mathématiques que l'on ne comprend pas sont bien sûr les plus intéressantes. Ce sont elles qui nous attirent, nous intriguent et nous motivent. **Tout comme il y a mille manières de comprendre, il y en a mille de ne pas comprendre.** Chacun ne comprend pas « à sa manière ». Et les retours en arrière sont toujours possibles : comprendre mieux, c'est parfois se rendre compte que, finalement, on ne comprend pas aussi bien qu'on le pensait.

Voici une tentative de cartographie des mathématiques que je ne comprends pas. Cet article est issu, avec quelques adaptations, de la conférence que j'ai eu le plaisir de donner lors des Journées APMEP à Jonzac. Bien sûr, cette carte est à la fois très personnelle et loin d'être exhaustive. À chacun de la compléter ou de la modifier selon ses propres perceptions !



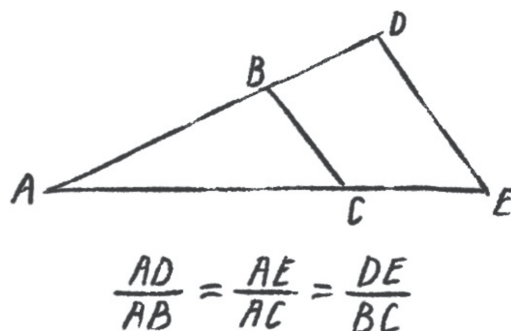
Évidences, images mentales et preuves

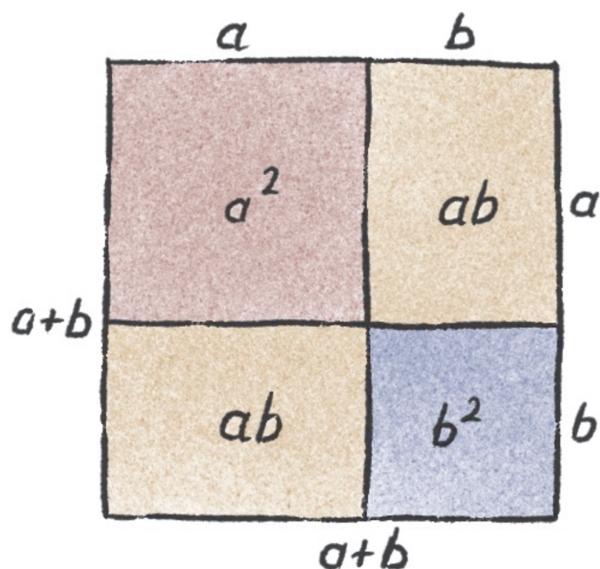
L'expédition commence sur les rives du lac des évidences. Là se trouvent les quelques trucs que je pense bien comprendre. Les concepts qui me semblent fluides et que je parviens à manipuler mentalement sans difficulté.

Ce lac se trouve à l'intersection de deux régions plus vastes : la jungle des images mentales et la plaine des preuves.

Car j'estime avoir bien compris quelque chose lorsque j'ai en tête ces deux choses : d'une part une preuve implacable, un enchaînement logique qui ne laisse aucun doute sur la véracité du résultat, et d'autre part une représentation mentale qui me donne, quand je pense à ce résultat, un sentiment d'évidence.

C'est le cas, par exemple, du théorème de Thalès ou de l'identité $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Je sais les démontrer en partant des définitions et axiomes de base. Mais j'ai aussi, quand j'y pense, des images qui me viennent à l'esprit et me procurent un sentiment de certitude indépendant de ces démonstrations.





Les deux aspects sont importants. Une image mentale sans preuve peut toujours être un leurre. Une preuve sans image mentale laisse un goût d'inachevé, comme si quelque chose continuait de nous échapper.

Car comprendre, ce n'est pas simplement savoir avec certitude que quelque chose est vrai. C'est plus intime, c'est un sentiment profondément humain, personnel et souvent inexplicable.

Une preuve peut nous aider à comprendre, elle peut nous accompagner sur son chemin, mais elle n'est pas suffisante.

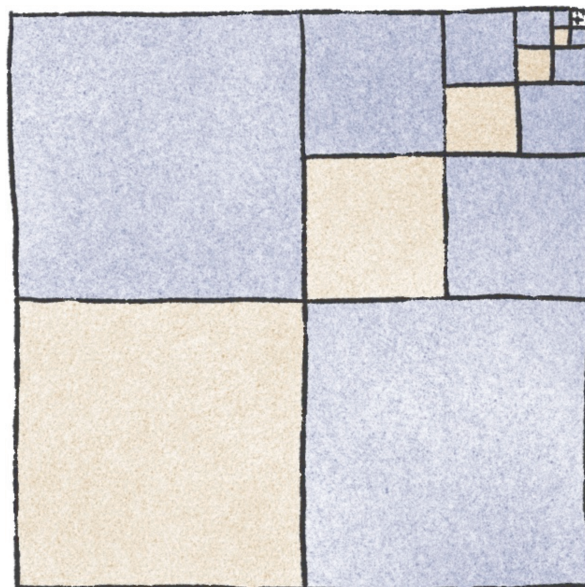
De nombreux résultats se trouvent dans ma plaine des preuves sans pour autant se trouver sur le lac des évidences. Je suis certain qu'ils sont vrais car je sais les démontrer, mais ils conservent un petit quelque chose d'impénétrable. C'est le cas du théorème de Pythagore qui garde, après toutes ces années à le côtoyer, quelque chose de mystérieux pour moi. Comme si nous avions eu un coup de chance incroyable qu'une relation aussi simple existe entre les côtés d'un triangle rectangle. Je n'ai pas, comme pour Thalès, cette petite voix qui, en voyant la figure, me dit « *non mais bien sûr, ça ne pouvait pas se passer autrement, ça ne pouvait qu'être vrai !* ».

Fausse bonnes idées

L'ensemble de cette région se trouve au bord de l'océan des préjugés. Dans ses remous désordonnés se trouvent toutes les mauvaises interprétations, les idées reçues, les choses que l'on pense vraies à tort et qui nous ralentissent parfois sur le chemin de la bonne compréhension.

Une mauvaise idée peut être bénéfique à condition de ne pas trop y tenir. En la creusant et en réalisant qu'elle est fausse, elle nous permet d'une certaine manière de mieux cerner, par le négatif, ce qui pourrait être vrai. **Les contre-exemples sont souvent d'un prodigieux secours pour mieux comprendre.**

Au milieu de cet océan se tient un récif sur lequel j'aimerais m'attarder un peu : le récif des fausses bonnes idées. Ce sont des idées correctes, mais qui, pourtant, peuvent limiter notre compréhension. Dans cette catégorie, je place certaines (pas toutes) preuves sans mots. Cette image par exemple est un classique du genre :



Elle illustre le fait que la somme infinie

$$\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$$

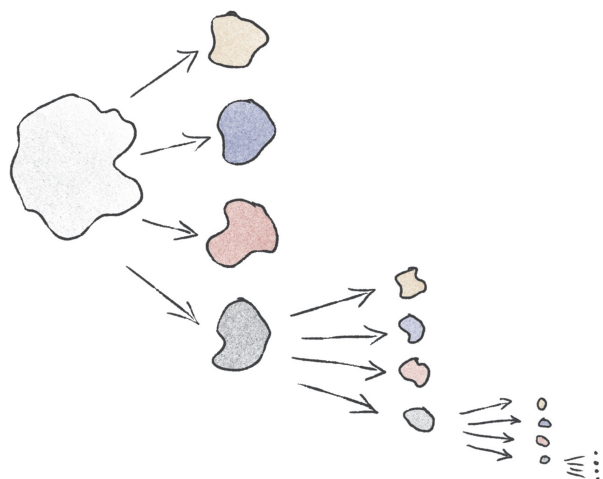
est égale à $\frac{1}{3}$. En supposant que le côté du carré vaut 1, les carrés beiges par taille décroissante



ont bien des aires égales à respectivement $\frac{1}{4}$, $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{1}{4}\right)^3$, ... et ils recouvrent tous ensemble $\frac{1}{3}$ du carré puisqu'on identifie deux groupes de carrés bleus qui ont la même aire.

En soi, c'est exact, il n'y a rien de faux dans cette image. Pourtant, elle donne l'impression qu'une coïncidence se produit avec cette somme qui la rend représentable sous la forme d'un carré. Vous ne trouverez pas d'images similaires si vous remplacez $\frac{1}{4}$ par $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{17}$ dans la somme. On ne peut pas découper un carré (ni un pentagone ou une autre figure simple) en cinq carrés plus petits. Comme si cette somme-là était spéciale.

En réalité, la représentation géométrique en carré ne sert à rien. Vous pouvez tout aussi bien partir d'une figure quelconque, que vous divisez en quatre parties égales. Peu importe qu'elles soient de même forme ou non. Puis vous divisez une de ces quatre parties en quatre plus petites et ainsi de suite.



Cette image prouve aussi bien que le carré l'égalité, mais elle a un gros avantage : elle est généralisable. Vous pouvez maintenant choisir de découper votre forme de départ en dix-sept morceaux (ou n'importe quel entier naturel) et répéter le processus, vous aurez alors une preuve visuelle de l'égalité

$$\frac{1}{17} + \left(\frac{1}{17}\right)^2 + \left(\frac{1}{17}\right)^3 + \dots = \frac{1}{16}.$$

La représentation en carré, sans être fausse, était non seulement inutile, mais pouvait devenir un obstacle à une compréhension plus générale de ces sommes.

Étendues sauvages et conjectures

Au-delà des territoires familiers, se trouvent des mathématiques plus lointaines. Ce sont celles pour lesquelles une des raisons de mon incompréhension est le peu de temps que j'ai passé à les étudier. Les mathématiques sont vastes et on ne peut pas être partout à la fois.

Les grands lacs représentent les zones bien balisées et documentées par les spécialistes de ces sujets. L'étendue sauvage, au contraire, est constituée de tous les territoires répertoriés, mais mal connus. Entre les deux se trouve la métropole des conjectures. C'est là que travaillent les mathématiciennes et mathématiciens. À chaque recherche qui démarre, à chaque nouvelle idée lancée, la ville gagne un peu sur l'étendue sauvage. À chaque théorie longuement mûrie et digérée, la ville cède un peu de terrain aux grands lacs.

Je trouve fascinant que parfois les résultats les mieux compris se trouvent tout près des mystères les plus impénétrables. Le problème de l'empilement des sphères, qui a valu en 2022 la médaille Fields à Maryna Viazovska, m'en semble un exemple flagrant. Selon la dimension dans laquelle on l'étudie, il se passe des choses très différentes.

En dimension 2, pour remplir de la façon la plus efficace possible un plan avec des disques, on les place de la même façon que les alvéoles d'un nid d'abeille, en suivant la trame d'un pavage hexagonal. Il est assez facile d'être convaincu intuitivement qu'on ne peut pas faire mieux et il n'est pas très compliqué de le démontrer rigoureusement.

En dimension 3, on peut également rapidement conjecturer que l'empilement optimal est celui des empilements d'oranges qu'on a l'habitude de



voir sur les étals des marchands de fruits et légumes. La preuve en revanche est ici bien plus complexe et n'a été apportée qu'en 1998 par Thomas Hales avec une assistance informatique.

Au-delà, chaque dimension semble avoir sa spécificité et une difficulté qui lui est propre. Viazovska a reçu la médaille Fields pour avoir démontré les configurations optimales en dimensions 8 et 24. C'est une chose surprenante au premier abord, mais la difficulté du problème ne croît pas avec la dimension et les cas 8 et 24 sont plus faciles à aborder que les dimensions 4, 5 ou 6.

Pour les autres petites dimensions (disons entre 4 et 16) il existe des conjectures quant aux empilements optimaux, mais les démonstrations semblent encore loin d'être accessibles en l'état de la recherche. Pour les plus grandes dimensions, il n'existe même pas de conjectures raisonnables sur ce que pourraient être les meilleurs empilements.

En changeant simplement un nombre dans l'énoncé du problème, on passe de l'évidence à l'inconnu en passant par des conjectures hasardeuses et des résultats maîtrisés mais très complexes.

Analogies

L'ensemble de ces territoires est cerné par les montagnes de l'analogie. En les gravissant, on peut observer de haut l'ensemble des domaines parcourus. Il est alors possible de voir comment ils se côtoient et communiquent entre eux. Les analogies jettent des ponts parfois inattendus entre les théories. Elles sont surtout au cœur de la compréhension des concepts. **Comprendre, c'est souvent créer des liens.**

Il y a quelques années, j'assistais à une conférence au cours de laquelle l'orateur, à quelques minutes d'intervalle, cita deux théorèmes qui tous les deux contenaient le nombre 11 dans leur énoncé. Il se retourna alors vers nous et nous annonça : « Ces deux 11 là, ce sont les mêmes ! » Cette sortie saugrenue fit rire la salle. Bien sûr que ces deux 11 sont les mêmes... Un 11 est un 11. Il n'y a qu'un seul 11. Mathématiquement, cette phrase

ne voulait pas dire grand chose. Et pourtant, tout le monde a bien compris ce qu'il voulait dire. Il disait : il existe un lien caché entre ces deux théorèmes et ce n'est pas un hasard si on retrouve le même nombre à ces deux endroits.

Tenez, considérez par exemple ces deux objets mathématiques.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ & 1 & 3 & & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ & & \dots & & & & \end{array}$$



$$V = \frac{1}{3} Bh$$

D'un côté le triangle de Pascal, de l'autre le volume d'une pyramide. Des deux côtés on peut voir le nombre 3 (il y en a même deux dans le triangle). La question se pose alors : ces trois sont-ils les mêmes ? Autrement dit, existe-t-il un lien caché entre le triangle de Pascal et la pyramide qui pourrait nous faire dire que ce n'est pas un hasard si c'est le même nombre qui apparaît ici et là ?

En faisant quelques étapes, on parvient en effet à tracer un chemin effectif entre les deux.

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ & 1 & 3 & & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ & & \dots & & & & \end{array}$$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

$\int x^2 dx = \frac{1}{3} x^3$

$V = \frac{1}{3} Bh$

Première étape : dans l'identité remarquable $(a+b)^n$, les coefficients du développement sont donnés par les lignes du triangle de Pascal.

Deuxième étape : la dérivée de x^n se trouve en écrivant la limite de $\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$. En développant, on trouve qu'il s'agit du deuxième coefficient de l'identité remarquable ci-dessus.

Troisième étape : l'intégrale de x^n se calcule par sa primitive, c'est-à-dire l'opération inverse de la dérivée. On y retrouve donc notre coefficient.

Quatrième étape : le volume de la pyramide se calcule par une intégrale le long de sa hauteur.



Par le même chemin on comprend également que l'aire d'un triangle vaut $\frac{Bh}{2}$: le 2 est celui de la troisième ligne du triangle de Pascal. On en déduit aussi qu'en dimension 4, l'hypervolume d'une hyperpyramide doit être égal à $\frac{Bh}{4}$, avec le 4 de la cinquième ligne et ainsi de suite pour les dimensions supérieures.

Ce type de chemin mental nous aide à mieux comprendre, mais semble impossible à définir rigoureusement. Peut-on dire que tous les 3 des mathématiques sont les mêmes ? Ou bien existe-t-il des 3 fondamentalement différents ? Ces questions n'ont pas vraiment de sens. Et pourtant nous les comprenons, nous ressentons ce qu'elles veulent dire. Elles sont, à mon avis, un parfait exemple du fait que comprendre les mathématiques n'est pas une chose mathématique.

Perplexités

Cachées au plus profond des montagnes de l'analyse se trouvent les grottes de la perplexité. S'y terrent les résultats les plus intrigants qui soient. Ce sont des mathématiques dont je comprends souvent (au moins de façon superficielle) les énoncés, mais dont je n'arrive absolument pas à concevoir par quel enchaînement d'idées, même géniales, elles ont pu être produites par un cerveau humain.

Voici un résultat de théorie des nœuds dû à John Conway que j'ai découvert récemment. Un des enjeux de cette théorie est de trouver le moyen de savoir si deux nœuds donnés sont égaux ou non, c'est-à-dire s'il est possible de transformer l'un en l'autre sans couper la ficelle. Dans un article de 1970, Conway décompose les nœuds en « tangles » (ou enchevêtrements) qui sont composés de deux ficelles (avec quatre bouts libres donc) qui s'emmêlent. Voici quelques exemples de tangles donnés dans l'article :

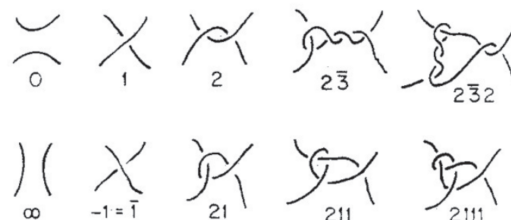


FIG. 1

Illustration John Conway, image issue de son article.

Les notations en dessous correspondent à un code inventé par Conway pour désigner chaque tangle. Les tangles 1 et -1 sont donnés sur la deuxième colonne et les suivants se déduisent par les opérations suivantes :

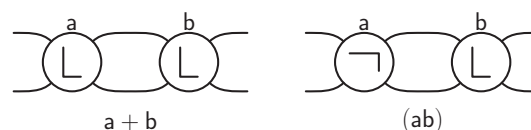


Illustration John Conway, image issue de son article.

Sur ces schémas, chaque tangle est défini par un rond dans lequel est inscrit un L indiquant son orientation. Ainsi pour former le tangle $a + b$ à partir des tangles a et b , on les place l'un à côté de l'autre (sans changer leur orientation) et on relie leurs fils comme indiqué. Vous pouvez par exemple vérifier à partir de cette règle qu'on a bien $1 + 1 = 2$. Pour former ab en revanche (qui ne désigne pas le produit, mais la concaténation de a et b), le tangle a doit subir une symétrie avant d'être relié au b .

Chaque tangle est ainsi associé à une suite de nombres. Et, à partir de cette suite de nombres, il est possible de construire une fraction continue. Par exemple, les deux tangles les plus à droite ci-dessus et notés respectivement 2111 et $2(-3)2$ correspondent aux fractions suivantes :

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} \quad 2 + \frac{1}{-3 + \frac{1}{2}}$$

Le théorème de Conway affirme alors que les deux tangles sont égaux (c'est-à-dire qu'il est possible



de transformer l'un en l'autre en manipulant les ficelles, mais sans les couper) si et seulement si les fractions continues associées sont égales !

Les deux fractions ci-dessus sont effectivement égales car elles valent $\frac{8}{5}$; leurs tangles associés sont donc égaux.

Je trouve ce résultat absolument magnifique autant qu'il me plonge dans la plus grande perplexité. À quel moment et dans quelles conditions, en suivant quel chemin, une connexion s'est-elle créée dans l'esprit de Conway entre les nœuds et les fractions rationnelles ? Comment l'idée d'un pont comme celui-ci est-elle survenue dans son esprit ? Même en ayant le résultat sous les yeux, je ne parviens pas à imaginer ce qu'a pu être ce cheminement.

Terra incognita

Il y aurait bien d'autres choses à rajouter sur cette carte, mais nous allons arrêter ici notre périple. Il reste toutefois une dernière chose indispensable à ajouter. Pour pouvoir dire « *je ne comprends pas ce truc* », encore faut-il être parvenu à formuler « *ce truc* » ! **Savoir qu'on ne comprend pas quelque chose est déjà un bon début, un premier pas vers la compréhension.**

Mais au-delà de ces régions se trouvent des étendues bien plus vastes encore dont nous ignorons tout. Des *terra incognita* dont nous ne savons pas encore à quoi elles ressemblent, qui n'ont été ni explorées, ni même observées. La plus grande partie des mathématiques reste encore à découvrir.



Illustrations de l'article : Chloé Bouchaour.

Mickaël Launay est mathématicien youtubeur, animateur de la chaîne Micmaths .

launaymickael@gmail.com

© APMEP Mars 2024

Sommaire du n° 551



Maths en 3D

Éditorial

Opinions

Mission « Exigence des savoirs »
— Bureau national

Catégorisons des formes en maternelle
— Valentina Celi

Cartographie des mathématiques que je ne comprends pas — Mickaël Launay

Avec les élèves

Semaine des maths à l'école — Charlotte Digne

Signons les maths — Amélie Cazottes

La voiture autonome — Laurent Didier

✦ Apprentissage des solides à l'école maternelle
— Élise Curien & Sandrine Lemaire

✦ Le mètre cube — Anne-France Acciari

✦ Les débuts de la géométrie en Sixième
— Lise Malrieu

1 Ouvertures

✦ Fabrication de très grandes boîtes avec une feuille A4
— Florence Soriano-Gafiuk & Manuella Freyermuth 53

3 ✦ Des photophores en dodécaèdre régulier
— Marie Lhuissier 60

6 Petite enquête sur être ou ne pas être un rationnel
— François Boucher 65

14 Récréations

Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 71

Des problèmes dans nos classes — Valérie Larose 74

25 ✦ La croix et le papillon — Olivier Longuet 75

30 ✦ Le temps des cerises
— Séverine Verneyre & Karim Zayana 79

35 Au fil du temps

42 Hommage à Gilles Cohen — Alice Ernoult 84

Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau 85

45 Matériaux pour une documentation 87

✦ Troisième degré en 3D — Marie-Line Moureau 91



CultureMATH

