Le bulletin de l'APMEP - N° 550

# AU FIL DES MATHS

## de la maternelle à l'université

Édition Octobre, Novembre, Décembre 2023

**Grandeurs**

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

# ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN


***Au fil des maths***, c'est aussi une revue numérique augmentée :
**https://afdm.apmep.fr**

Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

AU FIL DES MATHS



**Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.**
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.


Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Décembre 2023. ISSN : 2608-9297.
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

# Au fil des problèmes

Vous pouvez adresser vos propositions, solutions ou commentaires par courriel à :
frederic.deligt2@gmail.com
ou par courrier à :
Frédéric de Ligt
3 rue de la Pierrière
17270 MONTGUYON
*Pour vos envois, privilégiez le courriel si possible. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler les formules. Merci d'avance.*

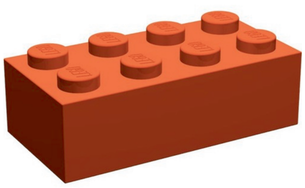
***Frédéric de Ligt***

## 550-1 Un problème indien (Jean-Pierre Friedelmeyer – Osenbach)

Problème inspiré de Brahmagupta (VIIᵉ siècle, né en 598).
Déterminer tous les triangles dont les trois côtés sont mesurés par trois entiers consécutifs et dont l'aire est mesurée par un entier.

## 550-2 La tour infernale

On dispose d'un stock de $N$ briques LEGO® $2 \times 4$, comportant donc chacune huit picots, et toutes de la même couleur.



On pose une première brique sur le plan de travail, picots au-dessus. C'est le socle de la tour. Le seul mouvement qui lui est autorisé est le demi-tour sur ce plan. On empile sur cette brique une seconde brique qui est fixée à la première par **au moins deux picots**. On continue selon la même règle à empiler les briques restantes les unes sur les autres. Chaque étage ne compte qu'une brique et on monte ainsi une tour rigide de briques de hauteur $N$.

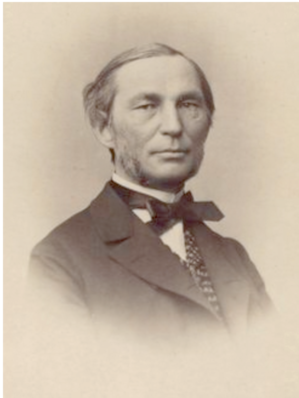
On demande combien de tours rigides de hauteur $N$ on peut ainsi construire. À noter que deux tours sont considérées comme différentes si on ne peut pas déduire l'une de l'autre par un demi-tour du socle.

**Question subsidiaire ouverte :** parmi ces tours rigides de hauteur $N$, combien tiennent vraiment debout, c'est-à-dire que la verticale passant le centre de gravité de la tour tombe sur le socle à l'exception de ses bords ?

Récréations

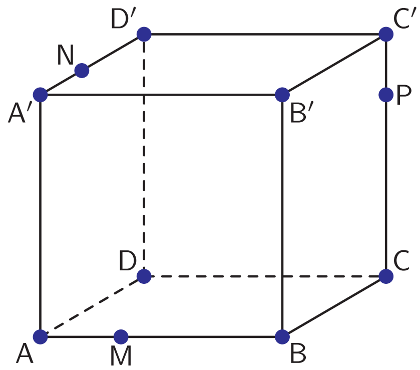
## 550-3 Une minoration (Pafnouti Tchebychev – Saint-Pétersbourg)

La valeur absolue d'un polynôme unitaire de degré $n \geqslant 1$ à coefficients réels a toujours un maximum, sur l'intervalle $[-2\,;2]$, supérieur ou égal à 2.



## 550-4 Construction (Daniel Perrin – Orsay)

On considère un cube ABCDA′B′C′D′ (ABCD et A′B′C′D′ sont deux faces parallèles et [AA′], [BB′], [CC′] et [DD′] sont des arêtes) et on se donne trois points M ∈ ]AB[, N ∈ ]A′D′[ et P ∈ ]CC′[.
Construire à la règle seule la section du cube par le plan (MNP).




## À propos des problèmes parus précédemment

### *548-1 Une question de Charles Hermite*

Il s'agissait de dénombrer les triangles, éventuellement aplatis, à côtés entiers strictement positifs, de périmètre donné. Un triangle scalène comptant pour 6, un triangle isocèle pour 3 et un éventuel triangle équilatéral pour 1.

Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans) utilise l'équivalence entre les inégalités triangulaires et le fait que chacun des côtés doit être inférieur ou égal au demi-périmètre du triangle. Il lui suffit alors de faire varier convenablement les valeurs entières des côtés dans l'expression du périmètre pour parvenir au nombre de solutions quand n est pair ou quand n est impair.

Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques) passe par un changement de variable et deux suites auxiliaires pour parvenir au même résultat.

Enfin Bernard Coutu (Quint-Fonsegrives) donne une interprétation géométrique du problème en considérant qu'il s'agit de dénombrer les points à coordonnées entières contenus dans un triangle équilatéral, intersection d'un plan et d'un dièdre de sommet l'origine du repère. Il projette orthogonalement ce triangle dans le plan $(xOy)$ et obtient un triangle rectangle dont les points à coordonnées entières sont en bijection avec ceux du triangle équilatéral. Le comptage en est facilité et permet de parvenir aux deux expressions.

### 548-2 Vu sur le compte LinkedIn de Vincent Thill

Ludovic Jany (Bolquère) développe $(a+b)^3$, Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans) développe $(a+b+c)^3$ alors que Jacques Vieulet (Ibos) développe de son côté $(a+b+c+d)^3$ puis, chacun à sa manière, par des factorisations partielles et l'utilisation de l'hypothèse $a+b+c+d=0$, aboutit à l'identité proposée. Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques) expédie la question en une seule factorisation que je vous laisse le soin de vérifier :

$$a^3+b^3+c^3+d^3-3(abc+abd+acd+bcd)=(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2-ab-ac-ad-bc-bd-cd)$$

Bernard Coutu (Quint-Fonsegrives) interprète l'identité comme un cas particulier des formules de Newton, formules qui permettent d'exprimer les sommes des puissances des racines d'un polynôme à l'aide des fonctions symétriques élémentaires de ses racines.

### 548-3 Eurêka

Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques) et Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans) ont adopté la même stratégie. Les sacs sont numérotés, mettons de 0 à 5. Une pièce est prélevée dans chacun des six sacs et les six pièces sont pesées ensemble. S'il n'y a pas d'écart avec la masse de six vraies pièces, on en déduit que personne n'a fraudé. En revanche si l'on mesure un écart, celui-ci vaut $n\Delta$, où $n$ est le nombre de fraudeurs et $\Delta$ la différence de masse entre une vraie et une fausse pièce. On effectue une seconde pesée en prélevant $2^i$ pièces dans le sac numéro $i$, $i$ variant de 0 à 5 et en les plaçant toutes sur le même plateau. On mesure à nouveau l'écart avec la masse attendue de 63 vraies pièces, son expression est alors $\Delta \sum_{k\in E} 2^k$, où $E$ est l'ensemble des numéros des sacs contenant des fausses pièces. Le rapport de ces deux expressions permet d'éliminer $\Delta$ et vaut $\frac{1}{n}\sum_{k\in E} 2^k$ avec $n=\operatorname{card}(E)$. Pour les 63 parties non vides différentes de $E$, on obtient 63 valeurs différentes possibles pour ce rapport. Cela permet ainsi d'identifier sans ambiguïté les sacs contenant les fausses pièces.

### 548-4 Une variante du problème du bâton brisé

Une seule réponse juste donnée par Paul Vernhet (Paris) à ce délicat problème de probabilité. Contrairement au cas où l'on casse simultanément le bâton en deux endroits et qui donne $\frac{1}{4}$ comme probabilité de pouvoir former un vrai triangle ; si l'on procède par étapes, on parvient à un résultat plus inattendu. En simplifiant la démarche empruntée par l'auteur, sans rien changer au résultat final, on peut supposer que c'est le morceau de gauche qui est choisi. S'il est le plus long des deux morceaux, il est brisé une seconde fois ; les deux nouveaux morceaux représentent alors des pourcentages complémentaires du morceau de gauche. Cela permet de définir deux lois uniformes sur $[0\,;1]$, indépendantes, que l'on peut représenter sur un carré unité. L'une est associée à la longueur du bâton de gauche et l'autre au pourcentage évoqué précédemment. Pour former un triangle de périmètre 1, il faut et il suffit que chacun des côtés soit inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$. Ces trois conditions sont matérialisées dans le carré par un triangle curviligne d'aire $\ln(2)-\frac{1}{2}\approx 0{,}19$. C'est la probabilité cherchée.

Toutes les contributions de ces auteurs sont consultables sur le site d'*Au fil des maths* à l'adresse : (onglet RÉCRÉATIONS puis suivre AU FIL DES PROBLÈMES).

# Sommaire du nº 550

## Grandeurs






APMEP

www.apmep.fr