

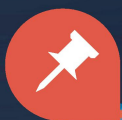
Le bulletin de l'APMEP - N° 550

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Octobre, Novembre, Décembre 2023

Grandeurs



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>



Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufilesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » **numériques** : Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTEVEZ, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Lionel PRONOST, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Éric ASTOUL, Nicolas CLÉMENT, Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET.

Équipe T_EXnique : Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Décembre 2023. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet


ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau



Boucle d'or et les modèles en barres

S'appuyer sur un album de littérature de jeunesse pour explorer les potentialités des représentations des quantités par des lignes (ou des barres) droites... Christine Chambris nous présente une activité originale pour la formation des enseignants du premier degré, en lien avec l'introduction récente des modèles en barres pour la résolution des problèmes arithmétiques¹.

Christine Chambris

Pour tenter de s'attaquer aux difficultés des élèves en résolution de problèmes arithmétiques, le ministère a publié en 2018 *La résolution de problèmes à l'école élémentaire* [1], texte qui a introduit « des représentations sous forme de schémas bien adaptés » c'est-à-dire sous forme de lignes, représentations massivement promues depuis 2020, dans trois *Guides* , pour le CP, le CM et le collège, avec des lignes remaniées sous la forme de rectangles allongés.

Les *modèles en barres* reviennent ainsi dans l'enseignement de l'arithmétique scolaire en France après en avoir disparu il y a un peu plus de 50 ans [2]. Il ne s'agit pas d'un retour *stricto sensu*, mais plutôt de l'importation, massive et rapide, d'une pratique vivant ailleurs et qui constitue de fait ici une innovation pédagogique. Ces modèles semblent nous arriver *via* Singapour et sa « méthode » [3]. Ce système de représentation semble bien ancré dans d'autres systèmes éducatifs, par exemple au Japon [4] ou encore en Chine [5]. Il fait l'objet de recherche, comme innovation, au Québec [6]. Il a des noms variés : *tape* (bande) *diagram* au Japon, *schéma range-tout* chez Polotskaia [6], *model method* ou *bar model* à Singapour dont la traduction a donné *modèle en barres*.

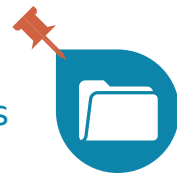
Au-delà de l'épaisseur des lignes qui peut varier, les normes retenues pour les représentations pour le champ additif semblent partagées, ce qui ne semble pas être le cas pour le champ multiplicatif.

L'injonction institutionnelle à enseigner (avec) les modèles en barres crée de nouveaux besoins de formation. Dans ce contexte, depuis la rentrée 2019, je conduis des actions variées : accompagnement de formatrices (spécialistes en mathématiques ou généralistes, dont des RMC²), formations continues d'enseignantes.

La mise en œuvre des formations permet d'avoir des indices sur la réception de l'injonction par les collègues de « terrain » et de repérer des malentendus. Soyons claire : d'une part, élaborer une modélisation, avec des barres, d'un problème d'arithmétique ne consiste pas à remplir des cases ; d'autre part, ces représentations en barres ont pour but d'aider les élèves à modéliser le problème afin de le résoudre. Ce n'est pas la résolution du problème qui est censée aider à trouver le modèle ! Ces éléments permettent de clarifier progressivement les besoins de formation et de faire évoluer les premiers contenus.

1. Remerciements à Hélène Sencerin (du stage RMC 91), au groupe IREM Calcul mental – Quantités en Contexte (IREM de Paris) avec Agnès Batton, Myriam Becqueriaux, Michèle Couderette, Guylaine Freguis, Alexandra Radovanovic ainsi qu'aux participantes aux formations pour les questions, les suggestions et les échanges qui ont permis à la tâche de voir le jour et d'évoluer.

2. Référentes Mathématiques de Circonscription.



Cet article vise à partager une activité de formation. Plutôt que de s'attaquer frontalement aux malentendus, elle a été conçue afin de permettre aux enseignantes d'appréhender ce que sont ces barres, supposées les aider à aider les élèves à résoudre des problèmes arithmétiques. Son but est d'aider à percevoir comment des lignes peuvent représenter des quantités³. Mise en œuvre à plusieurs reprises, elle a évolué grâce au travail réalisé collectivement pendant les formations, ce dont ce texte souhaite aussi témoigner.

Un pas de côté : Boucle d'or et les trois ours

L'activité est une invitation à faire un pas de côté et à oublier provisoirement la résolution des problèmes. Elle se déroule comme suit. Un texte est lu puis reste affiché. La recherche, d'abord individuelle, permet de produire de premiers essais, ensuite, en petits groupes, elle vise non pas à produire la *bonne* représentation mais au contraire à explorer davantage les possibles. Une fois les productions des groupes affichées, nous les discutons collectivement, puis nous mettons à distance les représentations produites.

La tâche proposée en formation

La consigne est la suivante : *Représenter, par des lignes droites, les grandeurs d'un texte*. Le texte choisi est un extrait du classique *Boucle d'or et les trois ours*.

« En arrivant dans la salle à manger elle remarqua sur la table trois bols de soupe. Elle s'approcha du grand bol, celui du grand ours, goûta la soupe et la trouva bien trop chaude. Elle s'approcha alors du moyen bol, celui du moyen ours, goûta la soupe et la trouva bien trop salée. Elle s'approcha enfin du petit bol, celui du petit ours, goûta la soupe et la trouva tellement à son goût qu'elle la mangea jusqu'à la dernière goutte. »

Au cours des premières mises en œuvre, le texte était accompagné de son illustration dans l'album. Toutefois, ce choix a été revu car l'interprétation de l'image prend le pas sur celle du texte⁴. La consigne a évolué et le mot « grandeurs » a notamment été introduit. Même si ce mot désigne une notion mathématique, ce qui est attendu est une interprétation naïve du mot : ce qui est plus ou moins grand.

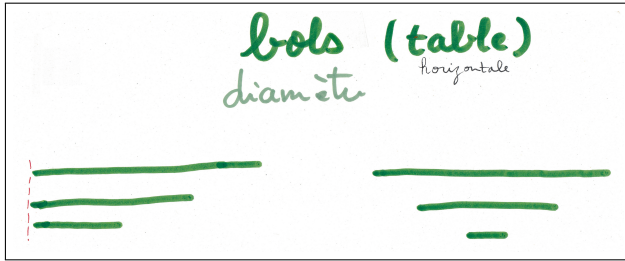
Des exemples de productions

Il y a toujours un suspens quand on propose une situation d'enseignement ouverte. L'expression « les grandeurs du texte » sera-t-elle comprise ? Les productions seront-elles convaincantes ? Des encouragements suffisent en général pour que les plus perplexes se lancent et rejoignent celles qui cherchent déjà à représenter, avec des lignes droites, ce qui peut être plus ou moins grand dans ce texte. La contrainte devient souvent stimulante.

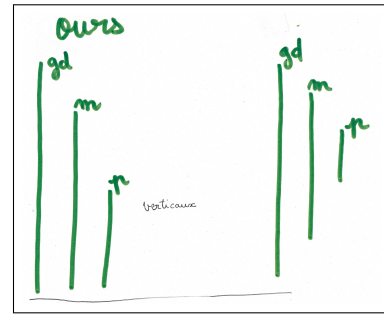
Conformément à ce que j'avais imaginé au préalable, les bols, les ours et les quantités de soupe avant et après le passage de Boucle d'or sont effectivement représentés. Cependant, d'autres « grandeurs », non anticipées, apparaissent comme on l'entrevoit sur certaines affiches.

3. Quantités de soupe, comme quantités de billes.

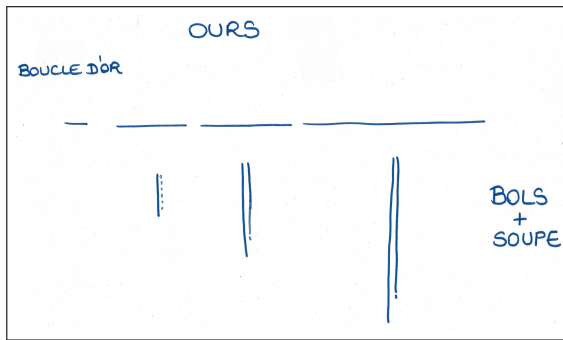
4. Dans l'édition du Père Castor, une multitude d'objets en trois tailles figurent sur l'illustration.



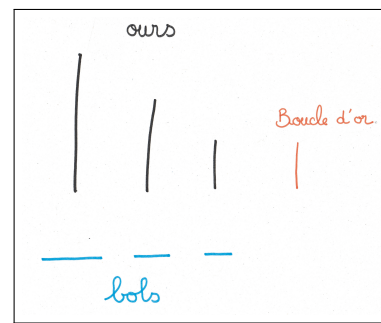
Affiche 1.



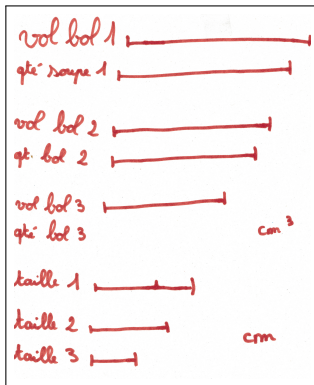
Affiche 2.



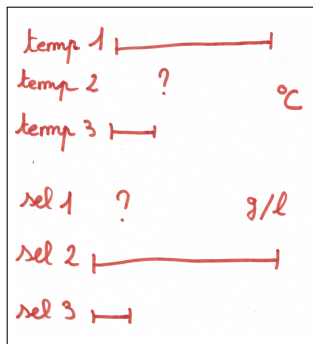
Affiche 3.



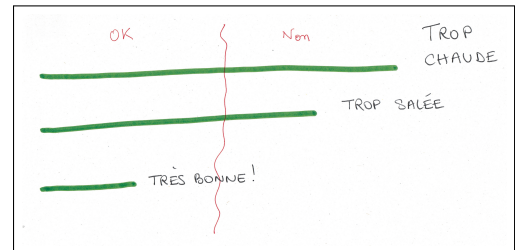
Affiche 4.



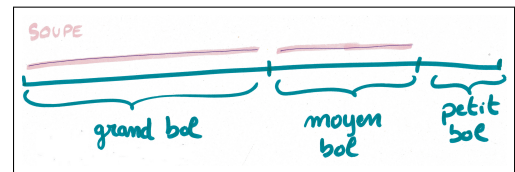
Affiche 5.



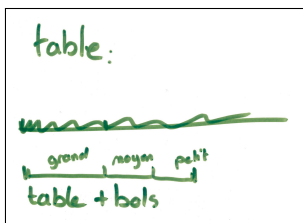
Affiche 6.



Affiche 7.



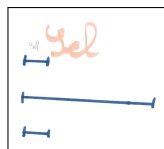
Affiche 8.



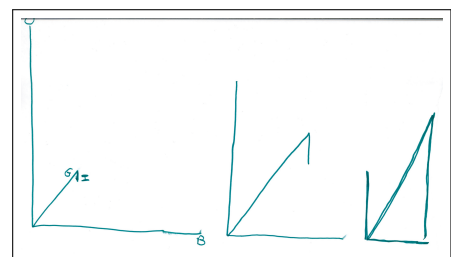
Affiche 9.



Affiche 10.



Affiche 11.



Affiche 12.



Faire parler les productions : ce qui est représenté

Nous constatons d'abord collectivement que tout le monde a réussi à représenter des grandeurs du texte par des lignes droites. Je demande ensuite aux unes d'interpréter les productions des autres. Cette modalité permet le plus souvent de constater que le système de signes utilisé est peu ambigu. Nous étudions aussi plus finement certaines représentations.

Comparer des quantités

Certaines enseignantes incluent Boucle d'or dans la représentation où les tailles des ours sont comparées (Aff. 3 et Aff. 4), d'autres non (Aff. 5 et Aff. 12). Toutes ne font cependant pas les mêmes choix interprétatifs. Sur l'affiche 3, Boucle d'or est la plus petite alors qu'elle a la même taille que le petit ours sur l'affiche 4. Cet élément n'apparaît pas dans l'extrait proposé mais la suite de l'histoire, probablement connue, suggère que Boucle d'or est plus petite ou de la même taille que le petit ours car son lit lui convient.

Nous étudions de façon approfondie les représentations de la *grandeur des « bols »*. Des participantes comparent les bols les uns avec les autres (Aff. 1 et Aff. 4) quand d'autres proposent des représentations qui impliquent d'autres « objets ». Par exemple, les auteures de l'affiche 9 tentent de représenter le fait que la table est suffisamment grande pour accueillir tous les bols quand d'autres comparent les bols et les quantités de soupe (Aff. 3, Aff. 5 et Aff. 8). Cette observation permet de *prendre conscience* que les bols peuvent être comparés selon différents points de vue (leur « aire », leur contenance), non comparables entre eux⁵, souvent restés non identifiés (sauf Aff. 5 et Aff. 6). C'est en général au cours de la discussion que la plupart des précisions sont apportées relativement à *ce qui est représenté*⁶.

Des participantes s'attachent à représenter le fait que la soupe est trop chaude (température) ou trop salée (salinité). Ces caractéristiques ne sont évoquées que pour une des trois soupes. Il faut donc considérer l'implicite du texte et faire une inférence pour identifier leurs « tailles »⁷ dans les autres soupes, afin de pouvoir représenter une comparaison entre au moins deux tailles. En particulier, puisque la soupe du petit ours est « tellement à son goût », c'est qu'elle n'est pas trop chaude et pas trop salée, donc moins chaude que celle du grand ours et moins salée que celle du moyen ours. Certaines productions utilisent alors un point d'interrogation concernant le sel ou la température pour la troisième soupe (Aff. 6), quand d'autres interprètent différemment le texte et tranchent en lui attribuant la même taille que celle de la soupe du petit ours (Aff. 11), avec un argument, discuté, du type *puisque'on ne dit rien c'est qu'elle est comme il faut*.

Certaines essaient de représenter *quelque chose*, sans y parvenir. L'affiche 7 « n'a pas de logique » selon son auteure. La mise en commun a permis à une autre participante de mettre un mot sur ce qui est représenté : le « rejet ». Parfois d'ailleurs la « préférence » (de Boucle d'or pour une soupe) est représentée (Aff. 12, le I pour Intensité du plaisir, petite ligne verticale). Même si la « préférence », comme le « rejet », ne seront pas facilement mathématisables, celles qui les reconnaissent ou les représentent identifient aussi d'autres quantités (taille des ours ou autres).

Dans toutes ces représentations, la ligne apparaît comme un premier niveau d'abstraction des grandeurs. Ces lignes sont plus ou moins longues. De façon unanime, les lignes les plus longues représentent les grandeurs les plus grandes. C'est un signe partagé pour représenter des quantités, qui semble donc peu ambigu.

5. même en renversant son bol !

6. Le but de l'activité reste néanmoins d'ouvrir la réflexion plutôt que de viser une improbable exactitude.

7. Le mot « taille » prend un sens étendu par rapport l'usage courant qui est en général restreint à des caractéristiques spatiales.



Une quantité composée de plusieurs autres

En mettant bout à bout des lignes, les représentations des affiches 8 et 9 introduisent un mode de représentation qui montre des quantités composées de plusieurs autres. Il en va ainsi du volume total de soupe servie (Aff. 8), de la grandeur de la surface totale des bols (Aff. 9) ou encore du temps dans lequel la scène se déroule (productions individuelles non reproduites). L'affiche 9 tente de combiner une comparaison avec une composition (la grandeur de la surface de la table et sa relation avec la surface cumulée des bols). Dans ce cas, la discussion a permis d'envisager deux points de vue possibles, la comparaison des grandeurs de la surface de la table et de la surface cumulée des bols, la grandeur de la surface de la table restante quand les bols sont posés⁸.

La représentation de la variation des quantités de soupe fait l'objet de discussions. Parfois, seule la quantité finale est représentée (Aff. 5 et Aff. 8), d'autre fois c'est la quantité bue. Cette représentation est associée à celle du volume du bol. Il s'agit alors de représenter la capacité du bol (plus grande) et le volume restant ou bu (nécessairement plus petit). Dans ce cas, ni la quantité initiale⁹, ni la troisième quantité (ce qui est bu ou restant) ne sont représentées. Nous passons alors du temps à discuter la représentation des variations sur une seule ligne (Aff. 3 et Aff. 10), qui permet de représenter à la fois la quantité initiale, la quantité bue et la quantité restante. Cette représentation (Aff. 10) d'une transformation négative concentre des informations implicites mais semble être interprétée sans difficulté par celles qui ne l'ont pas produite.

Ce moment de partage est réjouissant. Il montre la créativité du groupe et aussi la puissance d'expression du matériau, très rudimentaire, que sont les lignes droites.

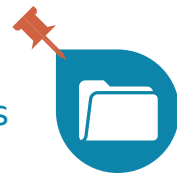
Une activité de lecture particulière ?

Revenons sur l'activité de lecture. Une fois « les bols » et « les ours » représentés, le travail repose sur des interprétations, plus ou moins élaborées, du texte. Certaines enseignantes estiment qu'une telle activité pourrait être pertinente pour travailler avec les élèves l'implicite dans la compréhension d'un texte, en particulier pour les élèves les plus fragiles. L'implicite qui est travaillé est de nature mathématique, sur les quantités (ce qui peut être plus ou moins grand). C'est une interprétation quantitative du texte qui est nécessaire.

Le travail engage en effet possiblement le lecteur dans l'identification de caractéristiques quantitatives en partie explicites, par exemple les quantités de soupe bues ou leurs températures, quand d'autres doivent être créées, par exemple la grandeur de la surface de la table en interprétant quantitativement une relation spatiale. Le travail de clarification de *ce qui est représenté* permet ainsi d'affiner le regard mathématique. Ce travail me semble particulièrement important et il pourrait être intéressant d'introduire un temps individuel pour amener chacune à spécifier ou à désigner *ce qui est représenté*. Il est possible que s'y joue ce qui ne se passe pas, par exemple, quand des élèves, aux prises avec une surface, confondent aire et périmètre. Identifier les relations entre les quantités d'un même type, par exemple la salinité, nécessite d'adopter un point de vue particulier sur le monde et de réaliser des inférences plus ou moins complexes [7]. Identifier des caractéristiques quantitatives et des relations entre leurs « tailles » sont ainsi deux activités au cœur de la production des lignes. Elles sont constitutives de l'activité de modélisation en mathématiques.

8. Dans des formations ultérieures, il m'est arrivé de relancer la recherche en demandant s'il serait possible de « représenter sur la table trois bols de soupe » et d'étayer éventuellement en suggérant ces points de vue.

9. J'ai d'abord cru que les participantes assimilaient la quantité initiale à celle du bol mais les remarques « on ne connaît pas la quantité de départ » et les affiches suggèrent que la quantité initiale, implicite, n'est pas représentée.



Des lignes pour exprimer les quantités : potentialités et normes

Le travail collectif se poursuit en discutant d'un ensemble de sujets liés aux propriétés et potentialités des représentations des quantités par les lignes et des besoins éventuels de normalisation de ces représentations. Le premier sujet discuté est en général celui de l'abstraction.

Concret versus abstrait

Toutes les quantités, indépendamment de leurs réalisations matérielles, sont représentées par le même signe, les lignes. Cette remarque est fondamentale. C'est l'affirmation que, pour un type de quantité, les tailles peuvent se représenter par un unique système de signe : des lignes droites, plus ou moins longues. Les lignes sont clairement des représentations *abstraites* pour les quantités. La congruence entre la longueur des lignes et la taille de la quantité (plus la quantité est grande plus la ligne qui la représente est longue) semble rendre cette abstraction accessible. Il faut alors se souvenir que le moyen habituellement utilisé pour représenter les grandeurs est le *nombre*. Cela fait alors consensus que comparer les signes « 3 » et « 8 » est plus abstrait que comparer deux lignes (fig. 13). Les lignes apparaissent ainsi comme des moyens abstraits mais rudimentaires qui permettent de comparer des quantités, autrement dit, comme le nombre mais en plus simple.



Figure 13. Des quantités plus ou moins grandes : deux représentations.

Les productions font souvent apparaître des lignes verticales pour les ours et horizontales pour les bols (Aff. 1, Aff. 2, Aff. 4). Ce choix reflète que les uns se tiennent debout quand les autres sont posés sur la table horizontale. D'autres se

jouent de cette contrainte spatiale (Aff. 9, Aff. 3, et dans une certaine mesure la représentation de droite de l'Aff. 2). Comme il faut apprendre que la taille n'est pas spatialement orientée, on pourrait contraindre davantage le second temps de la recherche au risque de réduire la créativité, ou proposer un temps supplémentaire, en imposant que les lignes soient toutes horizontales (ou toutes verticales). Ceci pourrait favoriser l'abstraction de la quantité et la prise de conscience que la signification de la ligne (l'ours est plus ou moins grand) ne dépend pas de son orientation (horizontale ou verticale).

Quelle norme pour représenter la comparaison ?

Il semble clair pour les personnes qui produisent et lisent les lignes que ce qui est grand doit être représenté par une ligne grande. Représenter plusieurs tailles pour une caractéristique donnée passe donc par la production de plusieurs lignes de longueurs différentes. Si ce choix est unanime, l'organisation spatiale des lignes est, elle, appréhendée de façons variées par les participantes.

Certaines choisissent de grouper par *type de quantité* (Aff. 1, 2 ; Aff. 5, 6). Les affiches 1 et 2 présentent à la fois une représentation standardisée, une ligne en pointillés à gauche ou continue en bas (le sol probablement, sur l'affiche 2) pour signifier une origine commune, et une juxtaposition de lignes (partie droite des affiches), non ambiguë du fait d'une sorte d'emboîtement.

D'autres groupent *par personnage* (Aff. 3, 4, 12). Les solutions imaginées ont en commun de donner une même direction aux lignes qui représentent le même type de quantité et une organisation spatiale identique pour les différents personnages.

Cette diversité permet de discuter sur la difficulté éventuelle à distinguer les tailles relatives des lignes en fonction de l'organisation spatiale de celles-ci. Lorsque les lignes sont éloignées ou



dans le prolongement l'une de l'autre, comparer un type de quantité pour plusieurs personnages est moins immédiat.

Représenter la composition de quantités et représenter des variations

Parmi les représentations produites, plusieurs sont celles de quantités cumulées : la quantité totale de soupe servie, la place occupée par l'ensemble des bols ou encore le temps pendant lequel la scène se déroule. Le moyen inventé à cette fin est toujours le même : la mise bout à bout de lignes. Ainsi, cette mise bout à bout représente sans ambiguïté la composition de quantités, autrement dit qu'une quantité est composée de plusieurs autres.

La représentation des variations des quantités de soupe (type Aff. 10) s'appuie sur un code qui semble non ambigu et partagé avec celui de la composition. Il est possible que, pour être produite, elle nécessite d'interpréter la variation comme une composition : ce qui est enlevé est une partie de ce qui est là au début. Il en va de même pour ce qui reste. C'est peut-être un niveau d'abstraction supplémentaire.

Raisonnement sur les représentations

Ces représentations sont déjà des premières modélisations des relations entre quantités, par un moyen rudimentaire qui est la ligne. Une fois les représentations produites, il devient possible de les utiliser pour *raisonner* et mettre au jour de nouvelles relations.

En particulier, l'étude de la représentation de la variation des quantités de soupe a une bonne potentialité pour amorcer la réflexion des participantes sur les raisonnements. Sur la représentation, il est aisé de voir que la quantité de soupe bue adjointe à la quantité de soupe restante est aussi la quantité de soupe initiale. Cette

relation n'a rien *a priori* d'évident. Elle est pourtant fondamentale. En continuant d'explorer la représentation, une autre relation essentielle devient visible : la quantité de soupe bue s'obtient en enlevant, à la quantité initiale, la quantité de soupe restante. Voir cette relation dans la représentation nécessite de s'abstraire encore davantage du contexte qui a permis de produire les représentations, car il est paradoxal d'enlever ce qui reste pour voir ce qu'on a enlevé. C'est de ces relations multiples, formulées d'abord avec des mots, que pourra émerger la modélisation des relations entre quantités par des égalités entre expressions arithmétiques.

L'écart entre des quantités et la norme pour représenter la comparaison

Étudier le problème « *comment* l'un est-il plus grand que l'autre ? » amène à s'intéresser à ce qui dépasse, à *ce qui diffère* entre deux tailles pour un même type de quantité, à leur *écart*. La figure 14 présente la trace d'une discussion : trois productions (reconstituées de mémoire) pour représenter l'écart entre deux quantités de billes¹⁰ et la conclusion qui a suivi.

Jacques a 7 billes. Kim a 4 billes.

Comment représenter l'écart ?

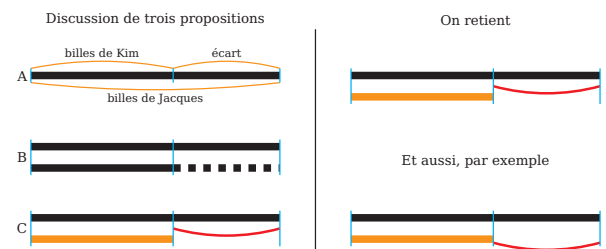


Figure 14. Diapositive de synthèse communiquée aux participantes après une formation.

Produire ces représentations s'appuie probablement sur une connaissance préalable de la composition et de la comparaison, en l'occurrence, savoir comparer deux quantités de billes.

10. Notons au passage que le travail réalisé au préalable apporte une réponse à la question souvent posée du discret. Ce ne sont pas les billes qui sont représentées mais leur quantité, qui peut être représentée par une ligne droite comme les autres types de quantités.



Sur la production A, la petite quantité apparaît comme une partie de la grande. Sur la production B, l'écart apparaît comme une quantité ajoutée à la quantité la plus petite. La production C articule les codes de la comparaison et de la composition. Elle combine ces codes en constituant un nouveau code qui est la norme retenue pour représenter la comparaison. Cette norme résout les difficultés déjà signalées. La position de l'arc pour désigner « l'écart » (partie droite) n'est pas normalisée.

On peut voir les alternatives comme des moyens pour signifier *ce qui est en plus* (haut), *en moins* (bas), ou encore *l'écart* sans référence à l'une ou l'autre quantité (non représenté).

Une conséquence de cette norme est que, dans la représentation d'une composition, les longueurs relatives des parties ne sont pas significatives. Si une quantité est impliquée dans plusieurs relations, *contrairement aux représentations spontanément produites* (Aff. 8), plusieurs représentations normées sont *a priori* nécessaires, une pour chaque relation.

Une question cruciale permet de matérialiser l'écart :

« *Quelle quantité doit-on ajouter à la petite quantité pour la rendre grande comme la grande quantité ?* » ou, avec un autre point de vue, « *Quelle quantité doit-on enlever à la grande quantité pour qu'elle soit grande comme la petite quantité ?* »

Cette question articule variation et comparaison. La production B (fig. 14) fournit la représentation d'une solution élémentaire à la première question ¹¹.

Signalons que si ces problèmes se posent et se résolvent assez simplement pour les quantités qu'on peut qualifier d'additives, comme les *quantités de soupe*, il n'en va pas de même pour d'autres comme la *préférence*.

Conclusion provisoire

Le travail réalisé en formation avec et autour de Boucle d'or clarifie la signification des lignes (ou des barres) utilisées pour la résolution de problèmes arithmétiques. En appui sur des normes de représentation qui semblent intuitives, les lignes droites permettent de modéliser les quantités et les relations entre elles. La portée de ces représentations est grande puisqu'elles couvrent les structures additives de composition et transformation d'état d'une part, de comparaison d'état d'autre part [8].

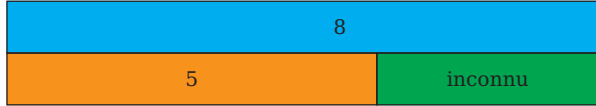
Dans les travaux de recherche évoqués en introduction, la composition et les variations sont toujours représentées par une ligne (ou bande) simple, la comparaison est toujours représentée par deux lignes (ou bandes) parallèles avec une origine commune, l'écart est le « vide » repéré au bout de la ligne la plus courte sur la ligne la plus longue (cf. figure 14, « On retient »). Ces choix sont consistants avec les représentations des relations entre quantités spontanément produites par les enseignantes avec l'activité Boucle d'or, quand bien même elles ont au cours d'une année antérieure été formées avec la « double barre », voire l'enseignent à leurs élèves.

En effet, curieusement, plusieurs ressources institutionnelles ont fait le choix d'une représentation *unique*, la « double-barre », pour les problèmes additifs (figures 15a et 15b) et le schéma est incidemment présenté comme un tableau à compléter [9].

11. Les chapitres 6 et 7 de l'ouvrage de Polotskaia et collègues [6] proposent des situations pour motiver l'apprentissage et rendre disponibles chez les élèves les solutions et les représentations de ces deux problèmes qui lient composition, comparaison et variation.

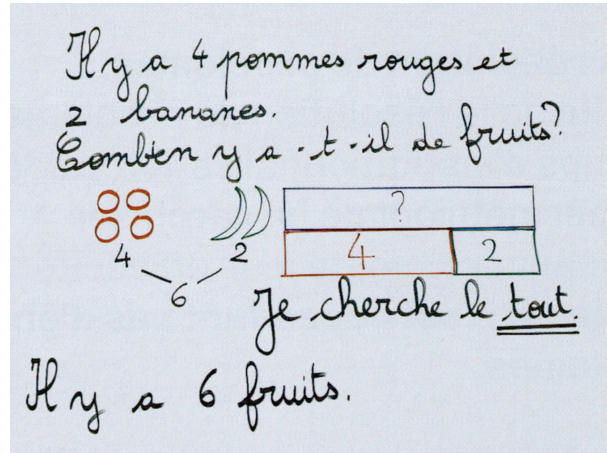


Modélisation pour ces quatre exercices

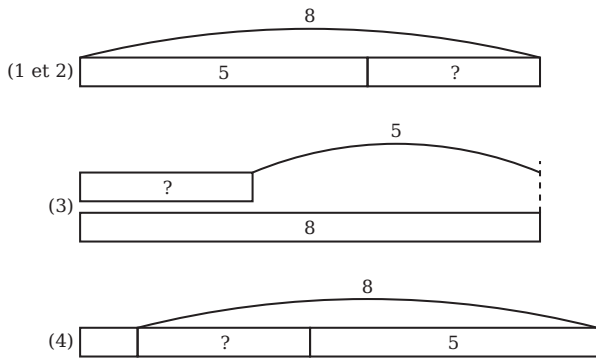


- Exemple 1 : J'ai 8 billes. Je perds 5 billes. Combien ai-je de billes ?
- Exemple 2 : J'ai 8 billes en tout, des billes rouges et des billes bleues. Cinq billes sont rouges. Combien ai-je de billes bleues ?
- Exemple 3 : J'ai 8 billes, mon ami en a 5 de moins. Combien de billes a-t-il ?
- Exemple 4 : J'ai gagné 8 billes puis j'ai perdu 5 billes. Combien ai-je gagné de billes ?

(a) « Moment 4 : Les règles de construction du schéma en barres » M@gistère PNF-RMC [9].



(b) Un « bilan de savoir » (Guide CP [10, p. 101]).



(c) Proposition de schémas alternatifs pour les énoncés du M@gistère et du guide CP.

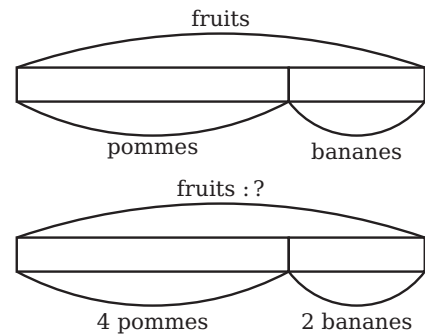


Figure 15. Schémas en barres « institutionnels » (15a et 15b) et alternatifs (15c).

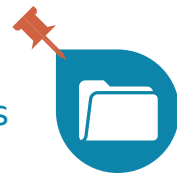
Ces éléments suggèrent que l'importation des *modèles en barres* n'a pas intégré la signification profonde des barres. Les barres ne représentent pas clairement des *quantités et leurs relations*.

Ce point, crucial, a conduit à la conception de la situation de formation présentée dans ce texte. Elle semble permettre de lever certains malentendus. Le pas de côté qui se réalise avec Boucle d'or semble amener les enseignantes à questionner leur pratique. *En fait, avec la double barre, la quantité totale est représentée deux fois* (fig. 15b), *je comprends ce qui me gênait*. Elle semble permettre d'entrer dans une problématique « quantitative » et d'affiner le questionnement en ce sens. Des raisonnements sur ces représentations,

suggérés précédemment, permettent de *modéliser* (avec des nombres et des opérations) les *quantités et leurs relations sous la forme d'une égalité dont un membre est le « résultat »*¹².

En formation, l'activité permet d'introduire des barres comme moyen de représenter les quantités et les relations entre elles ainsi que des normes de représentation, en partie intuitives. Ces barres ont par ailleurs une familiarité avec la représentation d'objets longs que nous n'avons envisagée, ici, qu'à la marge et qui mériterait aussi une exploration en vue de l'établissement des mêmes normes. Quoi qu'il en soit, si l'on souhaite que

12. Formule proposée par Elena Polotskaia, professeure de didactique des mathématiques à l'Université du Québec en Outaouais.



tous les élèves disposent de ce moyen de modélisation pour résoudre des problèmes arithmétiques, les enseignantes devront développer des compétences variées pour concevoir des séquences d'enseignement à cette fin, bien au-delà de la connaissance de ces normes.

Références

- [1] Ministère de l'Éducation nationale. « La résolution de problèmes à l'école élémentaire ». In : *BOEN* (26 avril 2018).
- [2] C. Chambris. « L'enseignement des maths à l'école et la méthode de Singapour ». In : *Bulletin de liaison de la CFEM* n°44 (2017). , p. 13-18.
- [3] B. Kaur. « The why, what and how of the 'Model' method : a tool for representing and visualising relationships when solving whole number arithmetic word problems ». In : *ZDM Mathematics Education* n°51 (2019), p. 151-168.
- [4] A. Murata. « Mathematics teaching and learning as a mediating process : The case of tape diagrams ». In : *Mathematical Thinking and Learning* 4. N°10 (2008), p. 374-406.
- [5] M.-G. Bartolini Bussi. « Introduction to the problem of curricula all over the world. » In : *Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège* (2012).
- [6] E. Polotskaia, C. Gervais et A. Savard. *Représenter pour mieux raisonner. Résolution de problèmes écrits d'addition et de soustraction*. Québec : JFD Éditions, 2019.
- [7] E. Falardeau. « Compréhension et interprétation : deux composantes complémentaires de la lecture littéraire ». In : *Revue des sciences de l'éducation* 3. N°29 (2003), p. 673-694.
- [8] G. Vergnaud. « Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques : un exemple, les structures additives ». In : *Grand N* n°38 (1986), p. 21-40.
- [9] *M@gistère du plan national de formation - formation continue des RMC sur la résolution de problèmes*. 2020-2021.
- [10] Ministère de l'Éducation nationale. « Pour enseigner les nombres, le calcul et la résolution de problèmes au CP ». In : *Guide* (juin 2021).



Christine Chambris est professeure des universités à CY Cergy Paris Université. Elle est membre du laboratoire de didactique André Revuz (LDAR).

christine.chambris@u-cergy.fr

© APMEP Décembre 2023

Sommaire du n° 550



Grandeurs

Éditorial

Opinions

Hommage à Michel Soufflet

✦ Estimer la mesure de longueurs à l'école élémentaire — Pascal Sirieix

✦ Quel sens mathématique pour les grandeurs ? — Richard Cabassut

Avec les élèves

✦ Archimède au collège ? Eurêka ! — Henrique Vilas-Boas

✦ Grandeurs et Démesures — Faustine Leclerc, Loubna Aït-Hatrit & Christine Garcia

✦ Curvica — Jean Fromentin & Nicole Toussaint

Scratchons l'escargot ! — Claire Pradel

Voyage mathématique en Égypte ancienne — Françoise Marchesseau

1 Ouvertures 50

3 Petite enquête sur être ou ne pas être un décimal — François Boucher 50

3 Des équations polaires à la trisection des angles — André-Jean Glière 56

4 ✦ Boucle d'or et les modèles en barres — Christine Chambris 64

10 Récréations 74

19 Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 74

Des problèmes dans nos classes — Valérie Larose 77

19 Au fil du temps 79

25 Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau 79

33 Matériaux pour une documentation 81

37 ✦ Les maths en Quatrième à partir des grandeurs — Romain Boucard 87

44 Un regard du XIX^e siècle sur les mathématiciennes — Michel Sarrouy 91



CultureMATH

