Le bulletin de l'APMEP - Nº 550

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Octobre, Novembre, Décembre 2023

Grandeurs

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr

Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

AU FIL DES MATHS

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : *Claire PIOLTI-LAMORTHE*.

Responsable coordinatrice de l'équipe : *Cécile KERBOUL*.

Rédacteurs : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY*.

« Fils rouges » numériques : *Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTEVEZ, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Lionel PRONOST, Agnès VEYRON*.

Illustrateurs : *Éric ASTOUL, Nicolas CLÉMENT, Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET*.

Équipe TEXnique : *Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD*.

Maquette : *Olivier REBOUX*.

Correspondant Publimath : *François PÉTIARD*.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

APMEP

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Décembre 2023. ISSN : 2608-9297.
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

Petite enquête sur… être ou ne pas être…

Deuxième volet de la petite enquête de François Boucher, consacrée ce trimestre aux nombres décimaux.

François Boucher

L'ensemble des décimaux est sans doute le plus mal traité des systèmes de nombres de la scolarité — y compris au supérieur — et donc des élèves. Les enseignants qui ont rencontré une construction de $\mathbb{D}$ à partir de $\mathbb{Z}$ doivent être fort peu nombreux [1]. Pourtant on dispose là d'un système de nombres riche [2].

Pour la bonne intelligence des décimaux, il semble utile de comprendre leur génération à partir des entiers par des divisions par dix, itérables, en lien avec les changements d'unités du système métrique ; c'est le modèle de $\mathbb{D}$ réunion croissante des $\mathbb{D}_n = 10^{-n}\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}$) qui se traduit par l'écriture $m10^{-n}$. Sous-produit : x est décimal si et seulement si $10x$ est décimal. Moins évidente est la génération de $\mathbb{D}$ par des divisions par 2 *ou* 5, tout en prenant conscience que la réunion des $2^{-n}\mathbb{Z}$ — les fameux dyadiques — ne se confond pas avec les décimaux. Cette génération se traduit par l'écriture $m2^{-p}5^{-q}$. Sous-produit : x est décimal si et seulement si $2x$ (respectivement $5x$) est décimal ; mais attention, le seul produit par 2 (respectivement 5) peut échouer à prouver une décimalité ; paradigme : le générateur $0,1$. Le bon critère est : x est décimal si et seulement si ($2x$ ou $5x$) l'est ; grande subtilité.

En langage extra-scolaire, $x \longmapsto rx$ est une bijection de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$ pour $r \in \{2\,;\,5\,;\,10\}$ et donc, par composition, pour tout r de la forme 2^p5^q, p, $q \in \mathbb{Z}$ forme qui donne aussi celle de décimaux inversibles. L'intéressant est que cette condition suffisante est aussi nécessaire.

Diverses représentations (avec unicité [3]) sont disponibles : les graduations d'ordre n d'une droite, l'écriture décimale finie « avec virgule », la décomposition additive partie entière/partie décimale [4] et les fractions décimales, elles-mêmes décomposables en somme de 10^n ($n \in \mathbb{Z}$). Les écritures $\dfrac{m}{10^n}$ avec $10 \nmid m$ ou $\dfrac{N}{2^p5^q}$ avec N premier avec 2 et 5 — la deuxième permettant de caractériser les décimaux non entiers (p ou q strictement positifs) — paraissent à la fois complexes (2 ou 3 paramètres) et subtiles pour utiliser l'unicité ; faut-il les fuir pour autant, surtout au lycée ?

Décimal ou pas ?

Un collégien rencontre sans doute son premier non-décimal officiel avec $\frac{1}{3}$, introduit comme solution de l'équation $3x = 1$ ou comme mesure du partage en 3 d'une grandeur (quelconque) prise comme unité. Une idée importante est qu'une bonne définition contient *toute* l'information sur

1. À moins, qu'un jour de pluie, ils aient lu le bulletin vert 279 (1971) ou, mieux, la brochure Irem [1].
2. Anneau commutatif totalement ordonné, intègre, euclidien (donc principal) dense dans $\mathbb{Q}$ (et $\mathbb{R}$).
3. À l'exception de 0, empêcheur d'unicité bien connu.
4. Source de difficultés ; on pourra consulter l'article *« Nombre et suite de chiffres – Une confusion signifié/signifiant courante et problématique »* de Toromanoff sur le site d'*Au fil des maths*.

ce qu'elle définit et qu'apprendre à l'exploiter fait partie du travail d'élève. Dans le cas de $\frac{1}{3}$, les diverses représentations des décimaux peuvent être utilisées.

Écartons un raisonnement par l'absurde à partir de l'écriture $m10^{-n}$ qui demande de la maturité et peut attendre le lycée.

Partons donc de l'équation $3x = 1$ et procédons par élimination ; les entiers sont éliminés facilement : 3×0 est trop petit, et 3×1 trop grand et au-delà c'est toujours trop grand ; à quoi bon formaliser l'argument ?

On cherche alors un éventuel décimal *non entier* qui conviendrait, décimal qui s'écrira sous la forme « zéro virgule quelque chose »[5] avec un « quelque chose » qui se termine par un chiffre non nul comme toute partie décimale qui se respecte.

Examiner des cas particuliers peut s'avérer utile. La clef est la découverte que la virgule ne disparaît pas avec la multiplication par 3. La raison, simple, est fournie par la table de 3 : il n'est donc pas possible de trouver, après produit par 3, « une virgule suivie de zéros ».

Ce raisonnement sur une partie décimale indéterminée peut s'avérer difficile, mais l'expérimental est fécond. Et il ne s'agit pas d'un raisonnement par l'absurde mais d'un examen de passage collectif auquel tous les candidats ont échoué.

Une autre idée peut être féconde avec des décimaux : la longueur de leur partie décimale qui apparaît dans l'écriture fraction décimale $m10^{-n}$ avec $10 \nmid m$; dit simplement, le nombre de chiffres après la virgule.

C'est aussi le nombre de multiplications par 10 qu'il est nécessaire et suffisant de faire pour obtenir un entier.

Il est alors loisible de réaliser une incursion en absurdie.

Ainsi en supposant que x a une seule décimale, de $3x = 1$ entier, on déduit $3(10x) = 10$; mais 3 ne divise pas 10 donc x n'a pas une unique décimale ; ceci élimine tous les décimaux à un chiffre après la virgule. De même $3(100x) = 100$ permet d'en déduire que deux chiffres décimaux sont exclus pour la même raison. Un « ainsi de suite » triomphal peut conclure : aucun décimal ne peut être solution de l'équation $3x = 1$.

Le parallèle avec le passage à des sous-unités est instructif :

$$\frac{1}{3}\text{ m} = \frac{10}{3}\text{ dm} = \frac{100}{3}\text{ cm} = \frac{1\,000}{3}\text{ mm} = \ldots$$

On n'obtient jamais de mesure entière avec les sous-unités car les puissances de 10 ne sont pas divisibles par 3. On peut alors s'intéresser aux inverses des autres entiers, puis à $\frac{3}{7}$ ou à $\frac{9\,765\,625}{4\,096}$.

Et comment rejeter l'argument d'un élève qui dirait directement : « quand on divise 1 par 3, ça ne s'arrête jamais après la virgule ! » ?

Restons dans les inverses.

Une calculatrice affiche $1{,}012\,5 \times 10^{-9}$ comme résultat du « calcul » de $1 \div 987\,654\,321$; peut-on en déduire que l'inverse de $987\,654\,321$ est décimal ?

Cette question est plus délicate qu'il n'y paraît ; asserter le caractère exact ou inexact d'un *affichage* de calculatrice demande de la prudence : de quoi parle-t-on[6] ?

L'intention est de revenir à la définition de l'inverse (ou en inversant les inverses) et être conduit, moyennant une manipulation de puissances de dix (aïe), à comparer $987\,654\,321 \times 10\,125$ et 10^{13}.

On en déduit *seulement* que le nombre affiché, qui est décimal, n'est pas l'inverse de 987 654 321. On peut poursuivre le travail, ce qui n'est pas très compliqué puisque 987 654 321 est multiple de 3.

Viendra ensuite la recherche (à la machine) des entiers à inverse décimal, question bien classique mais bien difficile par essai-erreur.

Une modeste question sur les sexagésimaux[7], va permettre de réinvestir la question du facteur 3 au dénominateur des fractions.

La durée « officielle » T_S de l'année sidérale est 365 jours 6 heures 9 minutes 9,767 5 secondes. La mesure en jour de cette durée est-elle décimale ? Et sa mesure en seconde ?

Comprendre la question est sans doute le plus difficile : dans ce système multibase de mesure

5. Ce « quelque chose » n'est pas un entier ; mais qui ne lit pas « 0,17 » : « zéro virgule dix-sept » ?
6. On parle de *flottants* et des algorithmes particuliers d'affichage.
7. C'est-à-dire éléments de $\mathbb{Z}[60^{-1}]$, réunion des $60^{-n}\mathbb{Z}$.

des durées (année, mois, jour, heure, minute, ...) le codage des nombres reste décimal.

Cette question somme toute assez simple sur des nombres « complexes » peut être abordée diversement, de la force brute instrumentée au calcul réfléchi économique. Dans une langue d'élève, de « décimal+décimal = décimal », on déduit « décimal+ non-décimal = non-décimal ». Avec un soupçon de décomposition additive, on est alors ramené au problème : les durées 6 h, 9 min et 9,767 5 s sont-elles des fractions décimales du jour ? Réponse positive pour les deux premières (1/4 et 1/160) mais négative pour la dernière, 97 675 n'étant pas multiple de 3, ce qui peut tarder à être perçu.

La deuxième question est un attrape-nigaud. Notons que, heureux hasard, mesurée en seconde, T_S est un sexagésimal (et un décimal)[8]. Préalable d'une question bien plus sérieuse :

Quels sont les (vrais) sexagésimaux qui sont aussi des décimaux ?

Un rationnel (les sexagésimaux le sont) est décimal si et seulement si sa partie fractionnaire est décimale.

Pour commencer, il est loisible d'examiner une partie fractionnaire à un chiffre sexagésimal (codé décimal) comme la durée 3 min 24 s dont la partie fractionnaire est $\frac{24}{60}$; plus généralement soit $\varphi = \frac{a}{60}$ avec $1 \leqslant a < 60$.

Reste à comprendre en examinant au besoin des cas particuliers, voire démontrer, que φ est décimal si et seulement si 3 divise a ...Déjà une jolie question admettant plusieurs niveaux de réponse.

En restant raisonnable, considérons ensuite une partie fractionnaire à deux chiffres « sexagésimaux » :

$$\varphi = \frac{a}{60} + \frac{b}{60^2} = \frac{60a+b}{60^2}$$

avec $0 \leqslant a < 60$ et $0 \leqslant b < 60$.

φ est décimal si et seulement si $\frac{60a+b}{3^2}$ l'est et donc si et seulement si 9 divise $6a + b$. Un autre travail commence ici pour trouver les 400 parties décimales possibles qui pourront être décrites de diverses façons, de la plus naïve (énumération) à la plus savante (paramétrisation).

Bien sûr, on peut vouloir aller plus loin et s'intéresser au cas de trois (ou plus si affinité) sexagésimales. Un programme simple peut aider à y voir clair.

Existe-t-il un décimal dont le carré est 10 ?

L'étude de cette question ne nécessite pas d'avoir fréquenté d'autres nombres que les décimaux[9]. L'usage des calculatrices peut conduire à une réponse positive. Tant mieux. L'utilisation de l'écriture avec virgule nécessite en général de traiter le cas — simple ici — des entiers spécifiquement.

Prenons un décimal non entier ; le dernier chiffre de la partie décimale est, *par exemple*, 7, situé, *par exemple*, en troisième position. Posons la multiplication mentalement : « 7 fois 7 égale 49, je pose 9 et je retiens ... » ; et c'est fini : d'après la règle de positionnement de la virgule, quel que soit la suite des calculs, il y aura dans le produit final un 9 comme sixième et dernière décimale.

Il semble important d'accepter l'idée que le raisonnement précédent est *générique* et y mettre des lettres pour introduire de la généralité ne renforcerait ni la conviction, ni la compréhension mais cela peut constituer un challenge ; tous les décimaux non entiers sont ainsi éliminés.

Cette preuve sur un nombre à virgule particulier est brève et éclairante (et n'est pas une preuve par l'absurde) : *une virgule ne disparaît pas par élévation au carré*, assertion qui contient une première généralité : dix ne joue aucun rôle particulier en dehors du fait de n'être pas un carré parfait. Que faire *après coup* pour viser la généralité de la preuve ?

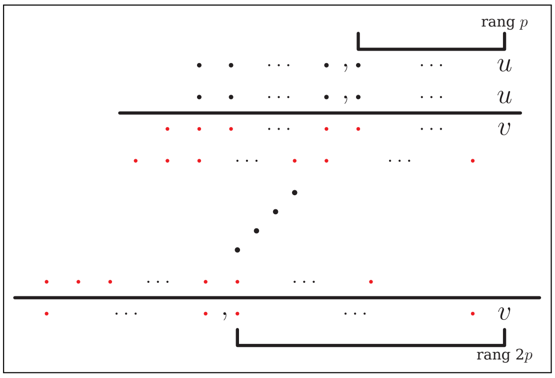
Il est possible de remplacer le décimal à virgule particulier par un décimal à virgule arbitraire d. Le français ainsi que les représentations imagées peuvent suppléer à une formalisation improbable et génératrice de brouillard pour le néophyte.

Soit u le dernier chiffre (non nul donc) de la partie décimale de d et soit $p \geqslant 1$ son rang. Posons la multiplication comme à l'école en mettant des points à la place des chiffres non précisés.

Soit v le chiffre des unités de u^2 ; v n'est pas 0 car u n'est pas zéro (subtilité ! Table de Pythagore au besoin).

8. $T_S = 756\,886\,149$ s 46 t 3 q en important ici illégalement les unités angulaires « tierce » et « quarte » ; chut.
9. Ce qui ne serait pas le cas de la formulation « $\sqrt{10}$ est-il décimal ? ».

Tous les points en rouge repèrent des chiffres qu'il n'est nul besoin de calculer : seuls comptent u, v et le rang de v qui est $2p \geqslant 2$ d'après la règle soigneusement enseignée à l'école [10]… C'est gagné.



Mais, au final, *ceci ne dit rien de plus qu'un exemple*.

Une généralisation naturelle est de remplacer 10 par 17 ou par 11,789, « carré » par « cube » ou une équation polynomiale arbitraire. Confrontés à la question : « l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ possède-t-elle des solutions entières ? Et décimales ? », des élèves de première année de CPGE ont voulu immédiatement savoir comment résoudre une telle équation. Or déjà, « pair et impair » suffisent pour répondre au cas entier. Ce « regard de côté » est une aptitude assez rare mais qui se cultive.

> $a = 2{,}155\,55\cdots$ est-il un nombre décimal ?
> Et $b = 0{,}069\,444\,4\cdots$? Et leur somme ?
> Et leur produit ? Et leur quotient ?

Ici se pose la question de la nature de l'objet désigné par l'écriture $2{,}155\,55\cdots$ avec son infinité *potentielle* de 5. Une modeste clef pour les d.d.i. (développements décimaux illimités) périodiques dont la période est à un chiffre est le rôle « générateur » de $0{,}111\,1\cdots$ et le cas très particulier de $0{,}999\,9\cdots$, deux spécimens qu'il est intéressant d'ajouter. La fréquentation des objets avec un nombre non fini de décimales est certainement à cultiver pour valider leur statut de nombre. Il semble utile de saisir les occasions de travailler sur l'infini, pour faire en sorte, qu'au final, l'analyse ne se réduise pas à une algèbre des limites.

Une écriture comme $2{,}155\,55\cdots$ n'est admise dans le camp des nombres que par un argument d'autorité (professorale). L'institution valide ce diktat didactique en s'appuyant sur la division (posée) des entiers qui ne se termine pas dont l'archétype est : 1 divisé par 3 « donne » comme quotient $0{,}333\,333\cdots$ qui autorise [11]. l'écriture $\frac{1}{3} = 0{,}333\,333\cdots$ (ou $0{,}\overline{3}$) dans laquelle le $\frac{1}{3}$ se lit « 1 divisé par 3 ».

Il est alors possible de conclure au caractère non décimal de l'écriture « à virgule » $0{,}333\,33\cdots$. Poursuivons : par définition légale de $\frac{1}{3}$ on a : $3 \times 0{,}333\,3\cdots = 1$.

Et comme on a bien envie d'écrire $3 \times 0{,}333\,3\cdots = 0{,}999\,9\cdots$, on aurait $0{,}999\,9\cdots = 1$ qui lui est décimal, ou aussi bien en mettant 9 en facteur $9 \times 0{,}111\,1\cdots = 1$ donc (?) $0{,}111\,1\cdots = \frac{1}{9}$ qui lui n'est pas décimal. Troublant à défaut d'être convaincant et encore moins probant.

C'est l'enjeu de ces questions : peut-on calculer et raisonner avec une infinité de décimales (les d.d.i.) comme avec les décimaux ? Et quelle réponse la classe de mathématiques va-t-elle apporter à ces questions ? Les élèves hardis n'hésitent pas à manipuler ce type de « nombres » sans se poser trop de questions. L'intention ici est bien d'éviter le recours aux écritures fractionnaires qui pourront être utilisées *a posteriori* pour validation.

En écrivant $b = 0{,}69 + 0{,}004\,444\cdots$, un petit raisonnement montre qu'il suffit (?) d'examiner la décimalité de $0{,}004\,444\cdots$, soit encore (??) celle de $d = 0{,}444\,4\cdots$.

Toutes sortes d'opérations peuvent être tentées sur d ; ainsi on peut multiplier par un petit nombre, disons 3 ou 9 ; le problème est que l'effectuation classique d'un produit commence par la droite qui, dans ce cas, est dissoute dans le $\cdots$. On peut bien calculer $9 \times 0{,}444\,4 = 3{,}999\,6$, puis $9 \times 0{,}444\,44 = 3{,}999\,96$ et comprendre qu' il y a une retenue 3 qui arrive de l'infini par la droite et donc (!) $9 \times 0{,}444\,4\cdots = 3{,}999\,9\cdots$; on a bien envie d'écrire $3{,}999\,9\cdots = 3 + 0{,}999\,9\cdots = 3 + 1 = 4$; aussi bien, une soustraction dûment posée $4 - 3{,}999\,9\cdots$ donne $0{,}000\,0\cdots$ une fois qu'on a réalisé qu'une retenue de 1 arrive de l'infini par la droite.

10. Sans doute jamais validée.
11. Une lycéenne de Terminale A2 des années quatre-vingt, pétillante d'intelligence, avait innocemment demandé *« mais où est passé le reste ? »*

On aboutit à $0{,}4444\cdots = \frac{4}{9}$ avec une vérification *a posteriori* pour les sceptiques en divisant 4 par 9 ; $\frac{4}{9}$ n'est pas une fraction décimale, assertion qui mérite au moins une fois une explication détaillée.

En réalité, toutes ces opérations demandent justifications — qui viendront plus tard, possiblement jamais, mais, en mathématiques, l'absence d'incohérence est déjà quelque chose.

Bien sûr, divers raccourcis sont possibles[12]. Par exemple, pour des élèves qui, dès le CE1, ont pratiqué le calcul mental par décomposition additive (ou multiplicative) des nombres, écrire

$$\begin{aligned}9 \times 0{,}4444\cdots &= 10 \times 0{,}4444\cdots - 0{,}4444\cdots\\ &= 4{,}4444\cdots - 0{,}4444\cdots\\ &= 4\end{aligned}$$

Waouh ! Et donc (par définition de la fraction !) $0{,}4444\cdots = 4/9$, non décimal, donc aussi $b = \frac{69}{100} + \frac{4}{900} = \frac{25}{36}$ non décimal *via* un petit raisonnement qui mérite d'être explicité.

Et si $0{,}1111\cdots = \frac{1}{9}$ est institutionnalisée, on peut avoir envie de multiplier par 4 pour obtenir directement le résultat.

Une fois acquise l'égalité $0{,}1111\cdots = 1/9$, le cas de tous les d.d.i. périodiques (à partir d'un certain rang) avec une période de longueur 1 se traite facilement. Ensuite, il suffira de s'intéresser à $\frac{1}{99}$ puis à $\frac{1}{999}$ …

Nous verrons dans le complément numérique comment il est possible d'éviter le recours aux écritures fractionnaires qui « tue » la réflexion sur l'infini.

Pour le quotient $\frac{a}{b}$, l'utilisation des formes fractionnaires semble s'imposer. Mais poser la division est tentant. Racontons l'histoire en suivant la variante qui conserve les virgules au dividende et au diviseur — plus délicate à manier mais plus porteuse du sens de ce qui est calculé à chaque étape.

- En $2{,}1\overline{5}$ combien de fois $0{,}69\overline{4}$? Réponse[13] : 3.

3 fois $0{,}69\overline{4}$ égale $2{,}08\overline{3}$, qui, ôté de $2{,}1\overline{5}$, donne $0{,}07\overline{2} < 0{,}69\overline{4}$. La division euclidienne est finie, mais poussons après la virgule.

- En $0{,}07\overline{2}$ (le reste précédent) combien de fois un dixième de $0{,}69\overline{4}$ (on cherche le premier chiffre après la virgule), c'est-à-dire combien de fois $0{,}069\overline{4}$? Réponse : 1 (première décimale).

1 fois $0{,}069\overline{4}$ égale $0{,}069\overline{4}$ qui, ôté de $0{,}07\overline{2}$, donne $0{,}002\overline{7}$.

- En $0{,}002\overline{7}$ combien de fois un centième de $0{,}69\overline{4}$, c'est-à-dire combien de fois $0{,}0069\overline{4}$? Réponse : 0 (deuxième décimale).

- En $0{,}002\overline{7}$ combien de fois un millième de $0{,}69\overline{4}$, c'est-à-dire combien de fois $0{,}00069\overline{4}$? Réponse : 4 (ou peut-être 3) (troisième décimale).

- 4 fois $0{,}00069\overline{4}$ égale $0{,}002\overline{7}$ (avec la retenue 1 qui arrive de l'infini) qui, ôté de $0{,}002\overline{7}$, donne 0 !! Et donc c'est fini.

Ainsi $\frac{a}{b} = 3{,}104$ exhibe sa décimalité. Bien sûr, l'exemple a été fabriqué sur mesure.

On peut aussi bien proposer des sommes non finies et cela avant d'avoir abordé toute étude des suites et de limite.

$a = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$ est-il un décimal ?
Et $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$?

La question n'a pas d'intérêt comme problème si une formule « prête à l'emploi » est disponible. La question est toujours : « que peut-on faire avec une somme non finie ? » Il y a déjà un problème d'existence que la deuxième somme proposée doit mettre en évidence.

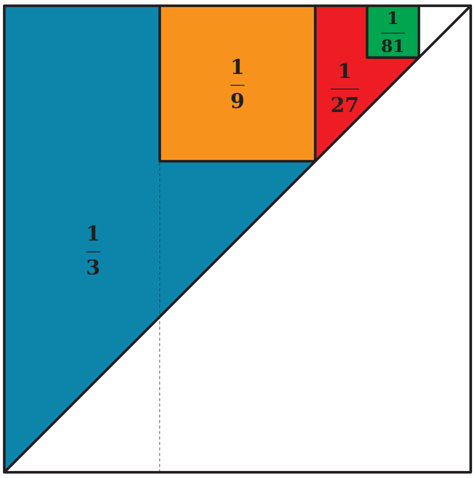
Par exemple, on peut déjà écrire et programmer un algorithme, ce qui devrait fournir rapidement un candidat pour la somme. On peut alors avoir envie de multiplier par $2 = 3 - 1$ (distributivité à gauche !) et simplifier par télescopage à l'infini[14] ?

Ou encore mettre $\frac{1}{3}$ en facteur à l'infini ? Ou bien multiplier par 3 et simplifier à l'infini ?

Ou peut-être contempler la figure page suivante très probante ! Figure qui fournit aussi une preuve visuelle de

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right).$$

12. Fréquents dans les manuels.
13. Bon, on est peut-être au-delà du possible avec des décimaux. Mais « en 2,1 combien de fois 0,7 » semble accessible avec la calculatrice. Soyons optimiste.
14. Curieusement, on trouve souvent dans certains manuels une distributivité à droite bien maladroite, semblant ignorer les vertus du télescopage.



La somme $1-1+1-1+1-1+\cdots$ est célèbre puisqu'Euler a calculé une valeur et trouvé $\frac{1}{2}$. Mais aussi bien, on peut trouver 0 ou 1 ou n'importe quoi d'ailleurs. Il est possible d'en faire un jeu instructif sur le long terme.

Le but de ces questions est de motiver la réponse à venir :

la vérité est dans la limite, quand elle existe.

Existe-t-il des nombres harmoniques $h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ qui sont décimaux ?

Voilà un vrai sujet de recherche. Il y a h_1, h_2 et h_6 ; ensuite un programme en arithmétique exacte n'en trouve pas. Il s'agit donc d'enquêter.

Une évidence : tous les h_n sont des rationnels. D'où (à nouveau) la question : à quelle(s) condition(s) un rationnel est-il un décimal ?

Le point important est de comprendre que la condition suffisante (et nécessaire) pour qu'un rationnel ne soit pas décimal est que, dans l'écriture irréductible du rationnel, le dénominateur comporte au moins un facteur premier distinct de 2 et de 5.

Dans la précédente petite enquête [2], ce point a été acquis de façon élémentaire si n est premier. Dans le cas général, il a été fait appel au postulat de Bertrand. La démonstration de Kürschák, élémentaire, ne permet pas d'obtenir cette information. On pourrait songer remplacer 2 par 3 : une exploration numérique laisse en effet penser qu'à partir du rang 69, 3 serait facteur du dénominateur de h_n mais le petit enquêteur ne sait pas le prouver.

Heureusement, il y a une communauté active [15] : en 1991, deux mathématiciens américains, Eswarathasan et Levine [3], ont démontré — élémentairement mais longuement — que les seuls nombres harmoniques dont le dénominateur n'est pas multiple de 3 sont ceux d'indice : 1, 2, 6, 7, 8, 21, 22, 23, 66, 67 et 68. Il suffit donc de vérifier que, pour $n \geqslant 7$, les dénominateurs des nombres harmoniques correspondants ont un diviseur premier $\geqslant 7$; il se trouve que 7 convient. C'est gagné.

Voilà une belle collaboration de diverses sources d'information ; cela s'appelle enquêter.

Quelques développements supplémentaires figureront dans le complément numérique du troisième volet.

Références

[1] Bernard Revranche. *Sur les nombres décimaux…* . IREM de Poitiers, octobre 1979.

[2] François Boucher. « Être ou ne pas être… un entier ». In : Au fil des maths (septembre 2023). .

[3] Arrulapah Eswarathasan et Eugène Levine. « p-Integral harmonic sums ». In : *Discrete Mathematics* 91. Nº 3 (12 septembre 1991). , p. 249-257.

François Boucher, à la retraite depuis quelques années, s'intéresse encore aux mathématiques et à leur enseignement.

boucherf@free.fr

15. Et des moteurs de recherche redoutables d'efficacité.

Sommaire du nº 550

Grandeurs

APMEP

www.apmep.fr