Le bulletin de l'APMEP - N° 550

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Octobre, Novembre, Décembre 2023

Grandeurs

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr

Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

AU FIL DES MATHS

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : *Claire PIOLTI-LAMORTHE*.

Responsable coordinatrice de l'équipe : *Cécile KERBOUL*.

Rédacteurs : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY*.

« Fils rouges » numériques : *Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTEVEZ, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Lionel PRONOST, Agnès VEYRON*.

Illustrateurs : *Éric ASTOUL, Nicolas CLÉMENT, Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET*.

Équipe TEXnique : *Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD*.

Maquette : *Olivier REBOUX*.

Correspondant Publimath : *François PÉTIARD*.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Décembre 2023. ISSN : 2608-9297.
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

Grandeurs et Démesures

Comment deux classes de collège, dont une d'élèves allophones, peuvent-elles collaborer tout au long d'une année scolaire autour d'un projet commun ? Les auteures de cet article nous proposent ainsi plusieurs activités qu'elles ont menées dans leurs collèges de REP+ sur le thème des grandeurs.

Faustine Leclerc, Loubna Aït-Hatrit & Christine Garcia

Contexte

En 2022-2023, une quarantaine d'élèves de Quatrième et d'élèves allophones NSA (Non Scolarisés Antérieurement) ont vécu une année scolaire articulée autour du thème « Grandeurs et Démesures » dans notre collège en réseau d'éducation prioritaire renforcé.

L'aboutissement de ce projet, en lien avec une paysagiste [1] et un compositeur [2], a été la visite en fin d'année du Couvent de la Tourette [3], élaboré en grande partie par Le Corbusier [1] et Xenakis [2].

Tout au long des deux premiers trimestres précédant ce temps fort, les élèves ont été immergés dans l'univers des grandeurs et mesures en lien avec l'histoire, l'espace et l'art [3].

Par exemple :

- chercher et construire des polyèdres réguliers en faisant référence à Platon ;
- calculer les notes de la gamme pythagoricienne en confrontant leur sonorité harmonieuse à nos oreilles à la musique stochastique créée par Xenakis ;
- mesurer des grandeurs réelles dans leur environnement quotidien aussi bien avec leur corps qu'avec le système métrique ;
- ou encore calculer des grandeurs inaccessibles à la manière de Thalès.

Rencontres autour de recherches mathématiques

Entre novembre et mars, les élèves allophones et les élèves de Quatrième se sont retrouvés à trois occasions pour vivre des recherches communes en mathématiques. Ils ont ainsi pu, d'une part, travailler sur l'acquisition des connaissances nécessaires au projet et des attendus institutionnels en termes d'« Espace » et « Grandeurs et Mesures » et, d'autre part, découvrir des mathématiciens de l'Antiquité.

Le travail décrit dans cet article s'inscrit dans un processus initié depuis plusieurs années par Henrique Vilas-Boas [4]. Il écrit en particulier : « *Nous ancrons nos projets au cœur de l'Histoire en puisant dans les ressources de la période antique. Précisément dans la période dite classique durant laquelle l'apparition de la démonstration chez les philosophes grecs concorde avec la naissance du concept de démocratie.* [...]. *Notre conviction, c'est qu'avec de tels projets interdisciplinaires axés sur les mathématiques, nous contribuons à apporter une idée de la démocratie à portée de la classe.* » [4]

1. missionnée par la CAUE Rhône Métropole *Conseil d'Architecture, d'Urbanisme et de l'Environnement*.
2. missionné par le GRAME *Générateur de Ressources et d'Activités Musicales Exploratoires.*
3. Le Corbusier (urbaniste et architecte, 1887-1965) et Iannis Xenakis (architecte et compositeur, 1922-2001) ont tous deux étroitement collaboré à l'élaboration du Couvent de la Tourette, édifié en 1956-57 à Éveux dans le Rhône.
4. Henrique Vilas-Boas est chargé d'étude à l'Institut Français de l'Éducation et ancien enseignant de mathématiques de l'établissement co-concepteur du projet « Grandeurs et Démesures ».

Les solides de Platon

La première séance de recherche commune a été construite à partir d'une expérimentation menée en cycle 3 l'année précédente et accompagnée par le groupe DREAMaths de l'IREM de Lyon, autour de la construction d'une séquence complète sur les solides de l'espace, à partir de la recherche du problème des Dés du Sorcier [5].

Le contexte ludique du problème initial a été adapté à l'âge plus avancé des élèves concernés : au lieu d'un sorcier jetant des sorts avec des dés ayant des formes de polyèdres réguliers, il s'agissait pour les élèves de répondre à un défi lancé par Platon directement. Après l'introduction de la séance à l'aide d'une frise chronologique permettant de le repérer dans l'Antiquité par rapport à aujourd'hui, une des enseignantes présentes a mis en scène à l'oral le défi (figure 1).

Chers élèves et chères élèves, pouvez-vous dire combien de polyèdres réguliers existent ?
Un polyèdre régulier est constitué de plusieurs faces régulières (polygones réguliers : côtés et angles égaux). De plus, ces faces doivent être toutes identiques entre elles (même forme et même taille). Enfin, de chaque sommet part un nombre identique de faces.
Travaillez ensemble, écoutez les idées des uns et des autres, raisonnez et cherchez !

Figure 1. *Le défi.*

En amont de la recherche commune, les prérequis suivants avaient été travaillés avec les élèves allophones seuls :

- une modélisation d'un terrain de sport rectangulaire ayant permis d'introduire les notions de polygone, d'angle droit, de longueurs égales en plus de celles de rectangle et de carré ;
- une recherche sur les patrons du cube, pour appréhender le passage du plan à l'espace, ainsi que le vocabulaire associé aux solides de l'espace (arête, face, sommet, ...) ;
- un travail spécifique sur le préfixe « poly » en classe de Français Langue Étrangère, ainsi que des réinvestissements réguliers sur le vocabulaire découvert en classe de mathématiques.

Les élèves de Quatrième avaient quant à eux réinvesti la classification des solides (polyèdres, non polyèdres, vocabulaire, ...) par la manipulation de solides usuels, pendant l'heure précédant la recherche commune.

La phase de recherche a été réalisée en îlots au sein desquels élèves allophones et Quatrièmes, mélangés, disposaient du matériel Polydron© pour construire leur réflexion à partir de la manipulation. Les élèves allophones avaient préalablement utilisé les pièces Polydron© pour travailler sur les patrons du cube et se sont donc vus valorisés dès l'entrée en recherche pour leur maîtrise de ce matériel.

Les cinq polyèdres réguliers ont été trouvés par les élèves. Le dodécaèdre (figure 2), le cube ou hexaèdre et le tétraèdre (figure 3) sont illustrés ; le cas limite, avec des hexagones, a pu être exploré (figure 4).

Figure 2.

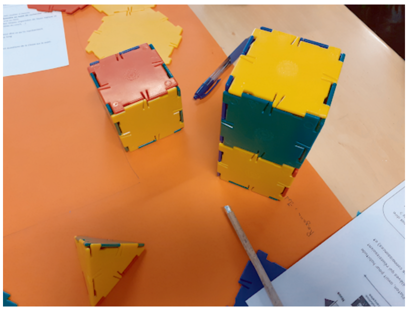


Figure 3.

Figure 4.

D’autres polyèdres non réguliers ont fait l’objet de débats lors de la restitution orale de chacun des îlots. Par exemple, le pavé droit construit certes uniquement avec des carrés, mais dont certaines faces avec 2 carrés alignés étaient en fait des rectangles (figure 3).

Voici un bilan intermédiaire de recherche co-construit avec les élèves (figure 5) au fur et à mesure des premiers débats.

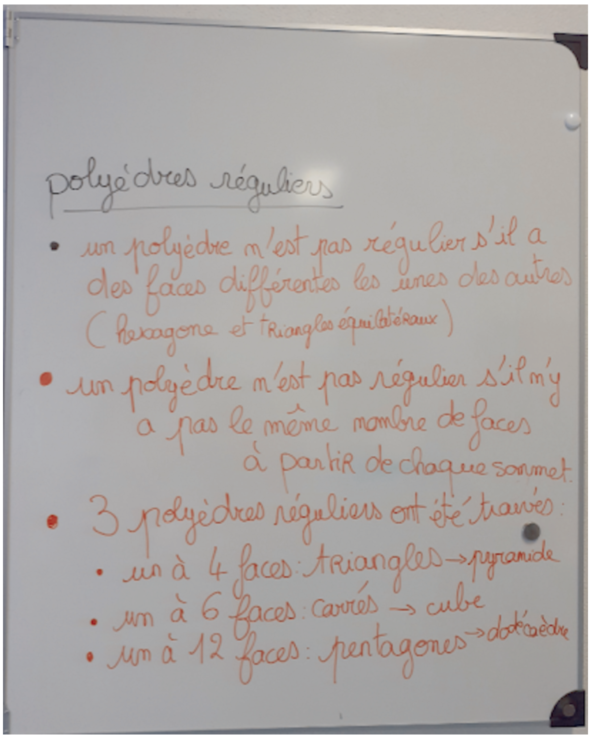


Figure 5. *Bilan intermédiaire de recherche.*

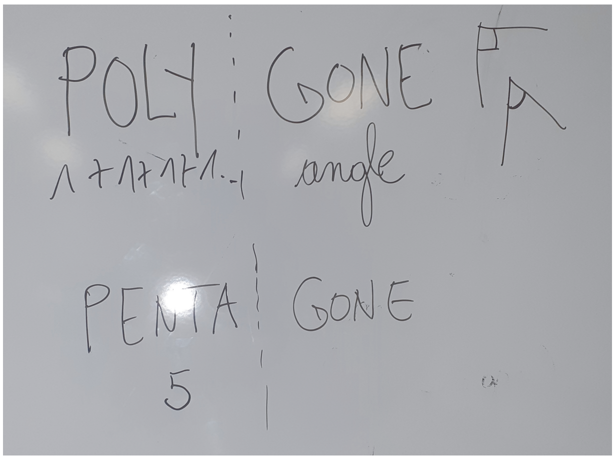


Figure 6.

Cette séance commune a permis d’introduire la séquence de Quatrième sur les solides de l’espace avec un prolongement sur les cônes et pyramides.

Pour les élèves allophones, ce sont le vocabulaire et l’étymologie grecque qui ont fait l’objet d’un prolongement (figure 6).

Il s’agissait ici de corréler :

- la figure plane avec le suffixe « gone » pour « angle » ;
- le solide de l’espace avec le suffixe « èdre » pour « face » ;

- le préfixe grec (« poly », « penta » ou « hexa », ...) avec la quantité.

Nom	Face	Sommet	Arête	Représentation
Cube (ou hexaèdre) 6	6	8	12	
Dodécaèdre 2 + 10 12	12	20	30	

Figure 7.

Le bilan de recherche co-construit avec les élèves allophones s'est focalisé sur deux des solides de Platon, tels que décrits dans le tableau (figure 7) :

- le cube, que les élèves avaient préalablement manipulé à plusieurs reprises et qu'ils s'étaient entraînés à décrire chacun leur tour en le tenant dans la main devant la classe ;
- le dodécaèdre qui les a occupés pendant un temps significatif de la recherche commune et dont la face pentagonale avait suscité un intérêt tout particulier.

Plusieurs élèves allophones ont spontanément retrouvé les mots « sommets » ou « arêtes », et même le préfixe « hexa » à l'occasion d'activités ultérieures, notamment pour décrire les « sommets » ou « côtés » de polygones. Ils ont en revanche manifesté des difficultés à assimiler le préfixe « do-déca », quand bien même le parallèle entre « do-déca » en grec et « duo-decim » en latin (abordé en début d'année scolaire pour donner du sens à la construction du mot « dou-ze ») a été proposé par les enseignantes.

La gamme pythagoricienne

La deuxième séance de recherche commune a été construite autour de la gamme pythagoricienne et des fractions : appropriation des doubles et des moitiés à partir de la manipulation des cordes d'une guitare pour les élèves allophones, jusqu'aux multiplications avec des fractions pour les élèves de Quatrième.
La séance a été introduite à partir de l'image de Gaffurio (figure 8) et de la légende du mathématicien grec Pythagore qui aurait étudié les liens entre des sons et les dimensions des objets à partir desquels ces sons étaient émis [6].

Image de Gaffurio fin du 15e siècle

Figure 8.

En amont, les prérequis suivants avaient notamment été travaillés avec les élèves allophones :

- associer à des octaves (intervalles entre deux notes de musique correspondant au même son) des doubles et moitiés de longueur de cordes de guitare manipulées en classe (figure 9) ;

- verbaliser les mots « double » et « moitié » en s’appuyant sur une démonstration avec une corde, devant leurs camarades ;
- rédiger plusieurs phrases en ayant à utiliser les mots « double » et « moitié » à bon escient.

Figure 9. *Manipulation des cordes d’une guitare.*

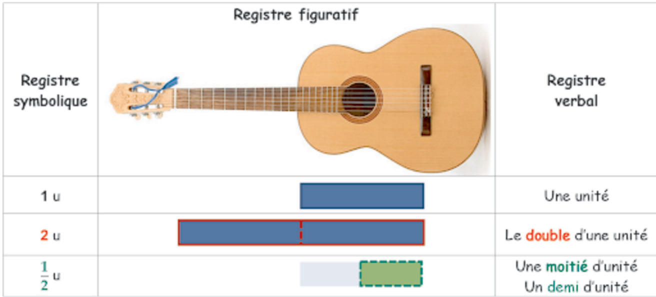


Figure 10.

Le tableau (figure 10) avec la bande unité et la guitare a été travaillé en amont avec les élèves allophones qui l’ont ensuite présenté, avec le soutien des enseignantes, en introduction à la recherche commune.

De leur côté, les élèves de Quatrième avaient réinvesti les attendus des années précédentes relatifs aux fractions pendant les rituels de début de cours précédant la recherche commune.

La séance commune s’est poursuivie avec la diffusion d’une vidéo de ScienceEtonnante [7], commentée avec les élèves, illustrant les doubles et moitiés de fréquences sonores et leur lien avec les octaves musicales (figure 11).

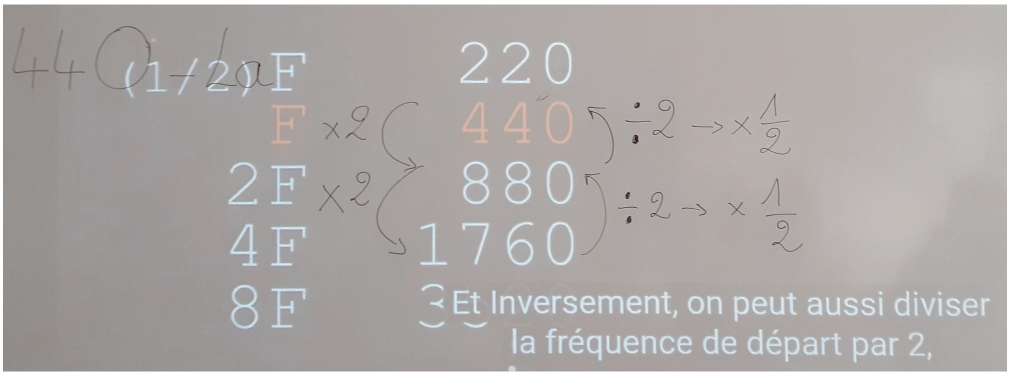


Figure 11.

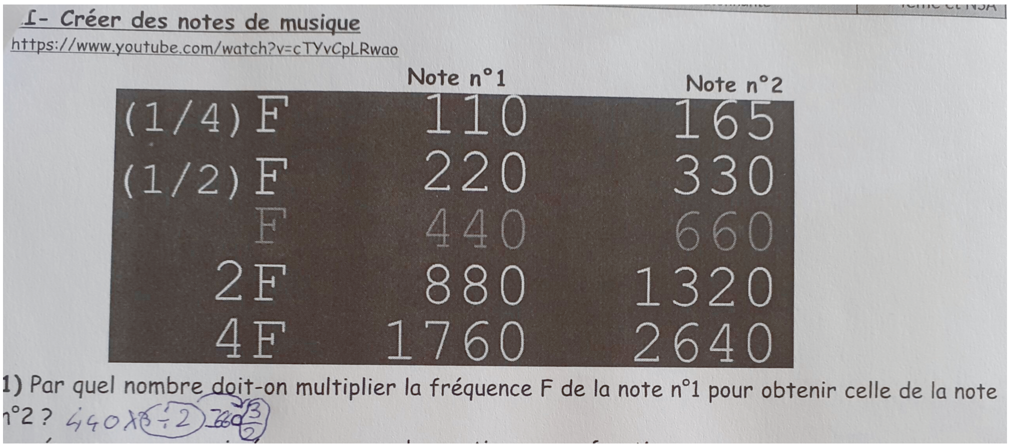
Tandis que certains élèves de Quatrième faisaient le lien entre cette approche par les fréquences et leur cours de sciences physiques, les élèves allophones ont exprimé *a posteriori* leur besoin de revenir sur le raisonnement exposé.

Ensuite, un défi a été lancé aux élèves consistant à découvrir le facteur — une fraction — par lequel multiplier la fréquence d’une note pour obtenir la fréquence de la note située à la quinte (intervalle entre deux notes de musique, qui, jouées simultanément, sonnent agréablement à nos oreilles).

L’activité proposée s’est poursuivie avec des calculs de fréquences de notes correspondant à une succession de quintes, conduisant à des multiplications de fractions, à la base de la construction de la gamme pythagoricienne. Cette fin de tâche n’a pas pu être réalisée pendant la recherche commune.

En classe de mathématiques dédiée aux élèves allophones, un temps d’écoute a été proposé en prolongement de la recherche commune pour comparer une musique accompagnée par des quintes « agréable à l’oreille » à une composition musicale « stochastique » de Xenakis, moins familière à l’oreille.

Malgré les potentiels significatifs de cette recherche musicale, les enseignantes ont convenu qu'elle nécessitait plus de temps en classe et que la manipulation des fractions attendue en l'état rendait difficile l'entrée en activité des élèves allophones en même temps que ceux de Quatrième (figure 12).



I- Créer des notes de musique

https://www.youtube.com/watch?v=cTYvCpLRwao

	Note n°1	Note n°2
(1/4) F	110	165
(1/2) F	220	330
F	440	660
2F	880	1320
4F	1760	2640

1) Par quel nombre doit-on multiplier la fréquence F de la note n°1 pour obtenir celle de la note n°2 ? 440 × 3 ÷ 2

Figure 12.

Hauteur inaccessible avec Thalès

La troisième et dernière séance de recherche commune avait pour cible de travailler la proportionnalité en géométrie. En amont de la recherche commune :

- les élèves allophones avaient été confrontés à la proportionnalité avec une recette de crêpes à adapter à différentes quantités de personnes, puis avec l'agrandissement d'un puzzle géométrique avec un facteur 2 conduisant à utiliser un tableau de proportionnalité et son coefficient ;
- les élèves de Quatrième avaient réinvesti et développé leurs connaissances sur la proportionnalité en résolvant des problèmes variés (incluant des échelles du plan et des triangles semblables) grâce aux différentes stratégies accessibles en milieu de cycle 4.

La séance a été introduite à partir de la légende autour du mathématicien grec Thalès telle que présentée par Thérèse Eveilleau [8] (figure 13).

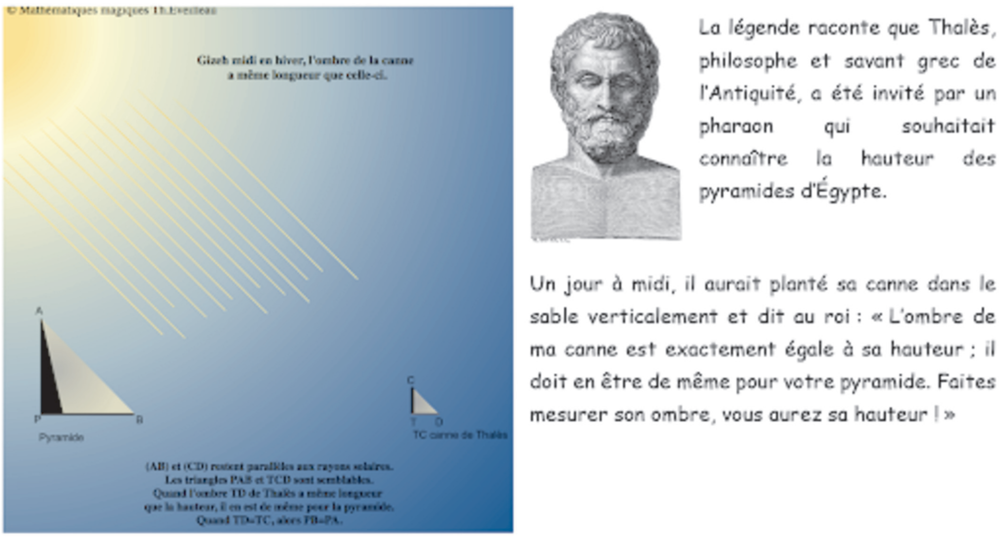


Figure 13.

La classe, répartie selon les mêmes îlots que pour les recherches précédentes, avait pour objectif de déterminer la hauteur d'un immeuble particulièrement haut dans la proche périphérie du collège (figures 14 et 15), sans pouvoir la mesurer dans son intégralité.

Figure 14.

Figure 15.

Figure 16.

Une partie des îlots a travaillé à partir d'une photographie et de mesures prises à proximité directe de l'immeuble pour estimer sa hauteur : en raisonnant par proportionnalité entre des longueurs mesurées sur la photographie et des longueurs mesurées réellement sur certains objets extérieurs (figure 16).

L'autre partie des îlots a travaillé à partir d'une image GPS du secteur sur laquelle était précisée l'échelle du plan.

Qu'il s'agisse de mesurer des longueurs réelles avec des instruments de mesures ou de commencer à compléter un tableau de proportionnalité, les élèves allophones ont pu systématiquement entrer en activité à leur niveau au sein des groupes d'élèves de Quatrième.

La confrontation des deux méthodes a permis de donner du sens à l'approche de Thalès. Pendant le débat, certains élèves ayant des proches résidant dans l'immeuble en question ont validé les estimations proposées par leurs camarades en la comparant avec la hauteur supposée réelle de l'immeuble. Ils avaient calculé cette dernière à partir de leurs connaissances sur le nombre précis de paliers dans l'immeuble et de leur estimation pragmatique de la hauteur d'un palier, sans oublier les combles.

Conclusion

Tous les élèves impliqués dans le projet « Grandeurs et Démesures » ont cherché ensemble des mathématiques à trois reprises pendant l'année scolaire, afin de développer les connaissances mathématiques et les compétences transversales nécessaires à la découverte du monument architectural retenu pour le projet.

Dès l'issue de la première recherche, les élèves de Quatrième ont manifesté leur volonté de réitérer cette modalité de travail avec les élèves allophones ainsi que leur intérêt pour les « légendes mathématiques » de l'Antiquité associées.

Les groupes mixtes Quatrièmes / allophones constitués pour la première recherche en îlots ont été en général conservés pendant toute l'année, créant des liens coopératifs significatifs entre eux. En particulier, à plusieurs occasions, des élèves allophones ont repris avec bienveillance mais fermeté le comportement inapproprié de certains camarades de Quatrième dans leur groupe respectif, sans que les enseignantes aient besoin d'intervenir. Ou encore, des élèves de Quatrième ont pris sous leur aile l'élève allophone de leur groupe pour lui faire répéter sa contribution orale afin de préparer la restitution des travaux de recherche par les élèves devant le personnel de l'établissement.

Le défi particulièrement motivant pour les enseignantes impliquées dans le projet a été de co-construire des activités de recherche en mathématiques alimentant les besoins du projet, tout en respectant les contraintes de temps et de programme des niveaux hétérogènes concernés, et de les inscrire dans la durée de l'année scolaire en faisant sens vis-à-vis des apprentissages des élèves.

Si les activités proposées pourront indéniablement être bonifiées, elles constituent une base de travail robuste qui a donné aux trois enseignantes l'envie de poursuivre la riche aventure du co-enseignement des mathématiques dans l'interdisciplinarité.

Références

[1] F. Aoustin. « Le Corbusier et le Modulor ». In : *Tangente, l'aventure mathématique. Mathématiques & Architecture*. HS nº 60 (juin 2016).

[2] N. Verdier et G. Cohen. « Iannis Xenakis ». In : *Tangente, l'aventure mathématique. Maths & Musique*. HS nº 11 (2002).

[3] *Padlet - icône Calendrier : suivi des activités mathématiques UPE2A-NSA / 4ᵉ*. . 2022-2023.

[4] H. Vilas-Boas. « L'École d'Athènes s'invite au collège ». In : *Au fil des maths* nº 541 (juillet-septembre 2021). .

[5] M.-L. Gardes et F. Leclerc. *Les mercredis de l'APMEP*. . 22 juin 2022.

[6] B. Parzysz. *Musique et mathématique*. Brochure nº 53. . APMEP, 1984.

[7] ScienceEtonnante. `Science étonnante`. . 6 juin 2017.

[8] T. Éveilleau. *Thalès et la pyramide*. . 26 avril 2018.

Faustine Leclerc est enseignante de mathématiques en REP+. Elle est membre du groupe DREAMaths de l'IREM de Lyon.
Loubna Aït-Hatrit est enseignante de Français Langue Étrangère en REP+ depuis plus de dix ans, auprès d'élèves allophones non scolarisés antérieurement.
Christine Garcia est enseignante de mathématiques en REP+.

faustine-manon.leclerc@ac-lyon.fr
loubna.ait-hatrit@ac-lyon.fr
christine.garcia2@ac-lyon.fr

Sommaire du nº 550

Grandeurs

CERCLE DE RECHERCHE ET D'ACTION PÉDAGOGIQUES

CultureMATH

MATh.en.JEANS

APMEP

www.apmep.fr