Le bulletin de l'APMEP - Nº 550

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Octobre, Novembre, Décembre 2023

Grandeurs

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr

Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

AU FIL DES MATHS

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : *Claire PIOLTI-LAMORTHE*.

Responsable coordinatrice de l'équipe : *Cécile KERBOUL*.

Rédacteurs : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY*.

« Fils rouges » numériques : *Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTEVEZ, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Lionel PRONOST, Agnès VEYRON*.

Illustrateurs : *Éric ASTOUL, Nicolas CLÉMENT, Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Jean-Sébastien MASSET*.

Équipe TEXnique : *Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD*.

Maquette : *Olivier REBOUX*.

Correspondant Publimath : *François PÉTIARD*.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Décembre 2023. ISSN : 2608-9297.
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

Archimède au collège ? Eurêka !

Henrique Vilas-Boas poursuit sa quête des mathématiques envisageables au collège à partir du célèbre tableau L'école d'Athènes *de Raphaël*[1].

Que j'aime à faire apprendre ce nombre utile aux sages !
Immortel Archimède, artiste ingénieur
Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
3,141 592 653 589 793 238 462 6

Maurice Decerf

Henrique Vilas-Boas

Archi connu et pourtant méconnu

Dans le tableau de Raphaël, il y a une ambiguïté dans l'identification du personnage qui tient un compas dans sa main droite. Il s'agit soit d'Euclide soit d'Archimède, qui ont vécu probablement à la même période.

Si, dans le tableau, ils adoptent la même posture de géomètre qui, pour Archimède, renvoie peut-être à la légende sur sa mort, la postérité de leur histoire est radicalement différente. Là où, pour la biographie d'Euclide, il n'y a presque rien [2], celle d'Archimède est abondamment nourrie [3] avec des versions divergentes, voire contradictoires en fonction de l'auteur qui en a écrit les lignes[2]. Ces nombreuses hagiographies ont donné naissance à une foule d'anecdotes qui peuplent l'imaginaire collectif sur la vie du savant. Il suffit d'évoquer une baignoire, un miroir, une couronne, une vis [4]… pour aussitôt reconnaître l'image d'un savant hors norme : *« l'immortel Archimède »*. Mais à y regarder de plus près, à l'instar de Léonard de Vinci, c'est plutôt l'ingénieur et le mécanicien qui sont mis en avant, le géomètre et l'arithméticien étant en retrait dans les récits.

Dans les programmes, esprit d'Archimède es-tu là ?

À la différence d'Euclide dont on peut identifier un nombre considérable de propositions dans les programmes du collège [2], il n'est pas facile d'exhumer des propositions et encore moins des démonstrations du mathématicien Archimède.

1. H. Vilas-Boas. « *L'École d'Athènes* s'invite au collège ». In : *Au fil des maths* n° 541 (2021).
2. Bernard Vitrac cite plusieurs biographes d'Archimède : l'historien Polybe (200–120 av. J.-C.), Vitruve (80–15 av. J.-C.), Diodore de Sicile (90–30 av. J.-C.), Plutarque de Chéronée (46–125 apr. J.-C.), Pappus (290–350 apr. J.-C.), Proclus (412–485 apr. J.-C.), Montucla (1725–1799 apr. J.-C.).

En effet, les œuvres du savant ne sont généralement pas présentées sous forme de traités didactiques, mais plutôt de mémoires scientifiques hors de portée d'un enseignement ordinaire.

Il se trouve que, dans certains de ses travaux, Archimède adopte une méthode originale qui consiste à évaluer la mesure de l'aire d'une figure en la considérant comme limite d'autres figures que l'on sait mesurer, appelée la méthode d'exhaustion. Cette conception sera reprise et développée bien plus tard, lors des temps modernes, et à l'origine de progrès mathématiques remarquables [5].

Extrait du livre d'Archimède : « De la mesure du cercle » Traduction par F. Peyrard.

C'est ainsi que, dans son ouvrage *De la mesure du cercle* où il cherche à mesurer l'aire et le périmètre d'un disque en itérant un processus de calcul, il obtient ainsi un encadrement du nombre π aussi précis que souhaité [6].

Il est à noter que le nombre π n'est pas explicité par Archimède [7], il apparaît de manière implicite comme dans les *Éléments* d'Euclide sous forme de rapports de deux grandeurs, longueurs ou aires.

Depuis les travaux d'Antiphon, contemporain de Socrate et d'Eudoxe de Cnide qui seront repris dans le livre V des *Éléments* d'Euclide, la détermination de l'aire d'une courbe plane par exhaustion a beaucoup stimulé la sagacité des géomètres du Monde entier. Ainsi, s'inscrivant dans la lignée des travaux précédents, la quadrature de la parabole par Archimède [8] est un exemple célèbre de ses plus belles découvertes mathématiques [5]. On trouve aussi cette méthode d'exhaustion dans son ouvrage *De la sphère et du cylindre*, où il détermine des rapports entre volume d'une boule, d'un cylindre et d'un cône de même hauteur et de même rayon, en mobilisant par ailleurs le concept de pesée [9].

Une sensibilisation à la méthode d'exhaustion est possible dans le cadre du thème « grandeurs et mesures » au collège. Je propose ci-après un retour d'expérience d'une séquence comprenant trois temps forts proposés à des élèves de Cinquième, pour approcher l'aire des figures non rectangulaires. Les deux premières tâches sont présentées ci-dessous ; vous trouverez la dernière dans la version numérique de l'article.

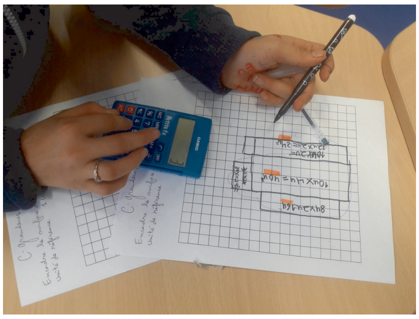
Tâche 1 : encadrer l'aire de sa main [10]

Cette tâche est donnée à des élèves de Cinquième et aussi à des élèves UPEAA-NSA [3]. C'est l'occasion de revenir sur les concepts de grandeur, de mesure et d'unité de mesure, qui sont complexes et difficiles à appréhender pour les élèves. Toutefois, le but de cette séance est de mobiliser le concept d'encadrement et l'écriture symbolique d'une mesure d'aire à partir de mesures de longueur.

Dans un premier temps, les élèves sont amenés à se questionner sur la manière de mesurer l'aire de leur main. L'idée d'une projection sur une feuille en détourant le contour vient facilement. Les élèves perçoivent aussi rapidement que la forme de la main est compliquée et qu'on ne pourra pas en déterminer une valeur exacte. J'introduis l'idée qu'ils vont encadrer la forme de leur main par deux polygones, l'un intérieur et l'autre extérieur au contour de la main, dont on pourra déterminer les aires à l'aide d'une unité de référence. Je fais écrire aux élèves cette unité de référence $1\,(\text{cm})^2$, au lieu des $1\,\text{cm}^2$ usuels, conscient que cela soulève un problème d'écriture profondément inscrit dans la culture scolaire [4].

3. Unité pédagogique pour élèves allophones arrivants, non scolarisés antérieurement.
4. En effet, $1\,\text{cm}^2$ est une écriture impropre comme le souligne le vademecum des RMC à Lyon p. 16.

On pourrait engager une discussion très intéressante sur le choix de détourer une main aux doigts solidaires ou une main avec les doigts écartés, néanmoins je fais le choix de demander aux élèves de garder les doigts serrés. En effet, d'une part le modèle « doigts serrés » est plus facilement calculable avec un polygone convexe, d'autre part, certains élèves éprouvent des difficultés concernant le choix de la ligne au plus près du contour de la main. Pour cela, le choix du modèle des doigts écartés, bien que très pertinent pour une discussion sur l'équivalence entre l'aire de la main « doigts écartés » et l'aire de la main « doigts serrés », complique considérablement la question du contour qui n'était pas la visée principale dans la démarche que je propose.

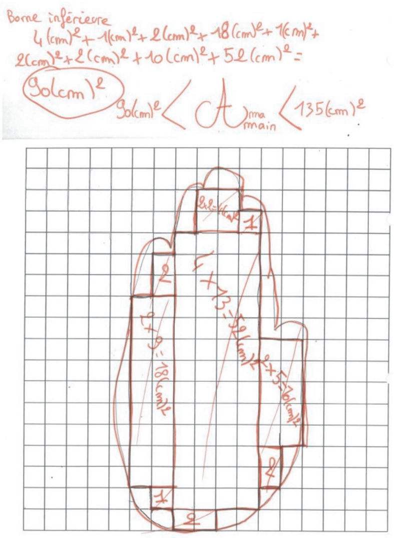


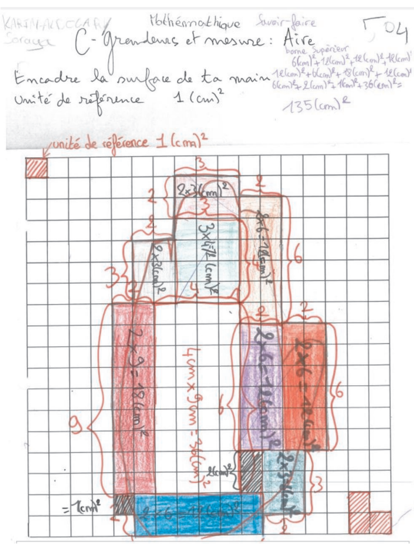
Dans la photographie ci-dessus Mariana, élève UPEAA-NSA propose un premier pavage par des rectangles de la forme de sa main. Elle calcule ensuite l'aire de chacun des rectangles à l'aide de sa calculette. Pour ne pas ajouter de difficultés aux UPEAA-NSA, nous n'avons pas cherché à encadrer la forme de la main.

De nombreux élèves démarrent leur travail par un comptage facile mais assez coûteux des unités d'aire. Par anticipation, je leur montre que l'on peut chercher les plus grands rectangles possibles à l'intérieur du polygone qui approche le contour de la main et calculer leur aire. Les élèves doivent communiquer leur calcul dans le registre symbolique à l'intérieur de chaque rectangle. Cette exigence de l'écriture des unités de mesure en intermédiaire fait encore débat dans la communauté (par exemple je fais écrire $6\,\text{cm} \times 12\,\text{cm} = 72\,(\text{cm})^2$ plutôt que $6 \times 12 = 72\,\text{cm}^2$) mais je la trouve fort utile quand on souhaite mener des calculs cohérents sur les unités de mesure.

Cette écriture renforce l'idée qu'une grandeur mesurable est caractérisée par une valeur numérique et une unité de mesure qui sont parfaitement indissociables ; en effet, attribuer une valeur numérique à une grandeur sans en préciser l'unité n'a aucun sens [11]. Toutefois l'alourdissement de l'écriture n'est pas négligeable et peut s'avérer parfois complexe à exiger et à manipuler (par exemple dans la communication des calculs issus de la proposition 47 du livre 1 des *Éléments* d'Euclide, le fameux théorème de Pythagore).

Toutes mesures déterminées par les élèves sont reportées dans un tableur.





Dans la copie ci-dessus Soraya, élève de Cinquième, propose un premier pavage par des rectangles intérieurs au contour de sa main (figure de gauche). Elle trace ensuite d'autres rectangles pour déterminer une borne supérieure (figure de droite).

L'ordre de grandeur de l'aire d'une main de collégien est proche de 100 $(\text{cm})^2$, un étonnement la première fois où j'ai proposé cette tâche. J'ai ensuite utilisé cet étalon régulièrement pour leur dire qu'ils ont à moindres frais un outil à portée de main, c'est le cas de le dire, pour mesurer l'aire de toutes sortes de surfaces : la couverture d'un carnet de correspondance, une table, un hublot… Les élèves trouvent très amusant de mesurer avec leur main tout ce qui les entoure.

	Mesure intérieur de l'aire de la main (cm)²	Moyenne entre l'aire intérieur et extérieur (cm)²	Mesure extérieur de la main (cm)²
élève 1	93	105,5	118
élève 2	96	116,5	137
élève 3	98	111,5	125
élève 4	79	87,5	96
élève 5	105	114	123
élève 6	126	131	136
élève 7	105	119,5	134
élève 8	84	99	114
élève 9	73	81	89
élève 10	102	131,5	161
élève 11	107	111	115
élève 12	130	137,5	145
élève 13	87	101	115
élève 14	74	82	90
élève 15	107	112	117
élève 16	112	131	150
élève 17	90	95	100
élève 18	132	137	142
élève 19	106	114	122
élève 20	107	124	141
élève 21	114	119,5	125
élève 22	72	83	94
Surface moyenne de la main d'un élève (cm)²	100	111	122

Enfin, lors de la phase d'institutionnalisation, je propose une petite démonstration de conversion d'unités d'aire aux élèves qui permet aussi de manipuler l'écriture symbolique des unités de mesure : $100\,(\text{cm})^2 = 100\,\text{cm} \times \text{cm} = 10\,\text{cm} \times 10\,\text{cm} = 1\,\text{dm} \times 1\,\text{dm} = 1\,\text{dm} \times \text{dm} = 1\,(\text{dm})^2$.

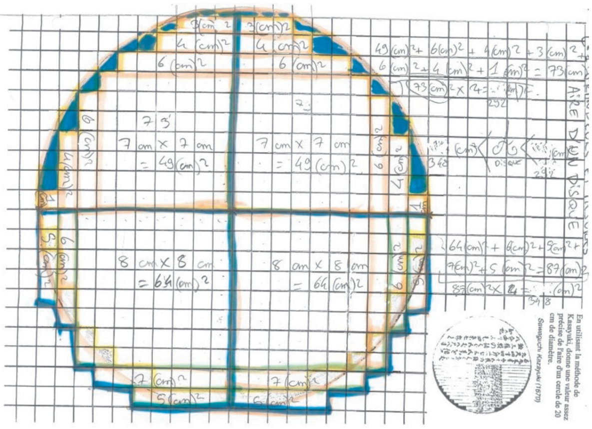
Tâche 2 : encadrer l'aire d'un disque [12]

Les élèves sont amenés à encadrer l'aire d'un disque de 10 cm de rayon, je fais référence au mathématicien japonais Sawagushi Kazayuki [13, p. 56]. Ce mathématicien utilise la même méthode que précédemment. Par symétrie, il considère seulement la moitié du disque. Dans cette logique, certains de mes élèves vont même jusqu'à considérer le quart du disque. L'encadrement est plus aisé à mobiliser sur le disque, sa forme est moins irrégulière que la main. Un tableau est généré et donne un premier encadrement de l'aire du disque proche de 314 $(\text{cm})^2$. Je dis aux élèves que la méthode utilisée pour la main et pour le disque est très facile à mobiliser et qu'elle sera approfondie au lycée, toutefois elle trouve ici ses limites (sans trouver la limite !). En effet, si on modifie la mesure du rayon, il serait trop coûteux de mobiliser cette méthode « à chaque fois ».

J'introduis dès lors une façon différente de découper le disque, plus proche au final de la méthode d'Archimède [5]. Il s'agit de partager en plusieurs secteurs le disque et de réarranger ces secteurs. J'insiste sur la démarche visuelle qui n'est pas une démonstration satisfaisante pour les mathématiciens, mais sensibilise les élèves à une approche qui permet de construire une expression universelle pour calculer l'aire d'un disque de rayon quelconque, en s'appuyant sur la connaissance du périmètre du cercle. Pour les Cinquièmes de notre collège, je réintroduis l'expression du périmètre du cercle en fonction de π via une mini-conférence proposée par un binôme d'élèves, en amont ou en aval du travail sur l'aire du disque. Cela permet à la fois de décliner quelques légendes sur le mathématicien Archimède et d'introduire l'expression du périmètre. Avec l'inscription de l'hexagone dans le cercle, on montre qu'un minorant du nombre π est 3, très

5. On en trouve de nombreuses animations sur l'internet et même certaines avec des pizzas.

utile pour le calcul mental et qui donne lieu à plusieurs entraînements de calculs approchés d'aires et de périmètres de disques avec les élèves.



Dans la copie ci-dessus Maelia, élève de Cinquième, propose un pavage inscrit dans la moitié supérieure du disque et un pavage circonscrit dans la moitié inférieure du disque.

	A	B	C	D
1		Mesure intérieur de l'aire du disque (cm)²	Moyenne entre l'aire intérieur et extérieur (cm)²	Mesure extérieur de l'aire du disque (cm)²
2	élève 1	308	316	324
3	élève 2	298	309	320
4	élève 3	292	303	314
5	élève 4	288	314	340
6	élève 5	288	304	320
7	élève 6	288	314	340
8	élève 7	288	304	320
9	élève 8	288	304	320
10	élève 9	288	314	340
11	élève 10	292	316	340
12	élève 11	290	315	340
13	élève 12	288	311,5	335
14	élève 13	290	320	350
15	élève 14	290	310	330
16	élève 15	290	315	340
17	élève 16	288	306	324
18	élève 17	300	310	320
19	élève 18	290	315	340
20	élève 19	288	310	332
21	Surface moyenne du disque par la méthode de Sawaguchi Kazayuki	290	311	331

Le tableau généré par un tableur.

La tâche 3 consiste à encadrer l'aire de l'Antarctique : elle est détaillée dans la revue numérique.

Grâce à ces activités mobilisant la méthode d'exhaustion, il est possible de travailler avec les élèves la délicate question des valeurs exactes et approchées. L'idée de l'encadrement permet de rendre compte que la valeur cherchée ne sera jamais connue mais peut-être affinée le mieux possible. Cela donne aussi dès lors plus de puissance à la recherche d'une formule close comme celle du périmètre et celle de l'aire du disque.

Explorer d'autres pistes archimédiennes ?

Les objets d'intérêt d'Archimède sont encore particulièrement stimulants et peuvent donner lieu à un travail ancré dans l'histoire des mathématiques.

Dans le cadre du thème « nombres et calculs », une piste de travail au collège peut s'appuyer sur l'*Arénaire* [14], traité écrit par Archimède pour le roi Gélon, où il est question de déterminer le nombre de grains de sable [15] *« répandu dans toute la Terre, habitée* […] *mais aussi qui puissent remplir tout l'Univers »* [16] ; le savant veut y contrer l'idée de Pindare, que l'on retrouve aussi dans la Bible, de la non-dénombrabilité des grains de sable. Ce travail peut croiser la légende de l'échiquier de Sissa [17] et la question de la sémiotisation symbolique des grands nombres.

Comme autre thème possible, on pourrait citer aussi les polyèdres semi-réguliers d'Archimède, son *stomachion* [18, p. 54-56] ou sa spirale, autant de pistes de travail possibles au collège.

L'exploration du tableau de Raphaël continue, nous nous retrouverons dans un prochain numéro avec Ptolémée, géographe et mathématicien. Nous montrerons comment les questions qu'il a abordées ont pu initier un travail sur la cartographie.

Références

[1] H. Vilas-Boas. « *L'École d'Athènes* s'invite au collège ». In : *Au fil des maths* nº 541 (2021).

[2] H. Vilas-Boas. « À bas Euclide ? » In : *Au fil des maths* nº 543 (2022).

[3] B. Vitrac. « Les géomètres de la Grèce antique ». In : *Les génies de la science* (2004), p. 72-81.

[4] C. Houzel. « Mathématiques en Méditerranée. Introduction ». In : *Brochure APMEP-régionale APMEP Aix Marseille* nº 1001 (2013), p. 15.

[5] É. Callandreau. *Célèbres problèmes mathématiques. La quadrature de la parabole.* . Albin Michel, juillet 1949, p. 303-304.

[6] A. Aragnol. « Mathématiques en Méditerranée. Introduction ». In : *Brochure APMEP-régionale APMEP Aix Marseille* nº 1001 (2013), p. 76.

[7] J.-L. Chabert et al. *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce.* Belin, 2010, p. 161-167.

[8] H. Lehning. « Archimède, le quadrateur. Histoire des mathématiques de l'Antiquité à l'an mil, à la découverte des origines ». In : *HS Bibliothèque Tangente* nº 30 (2007), p. 80-83.

[9] V. Pantaloni. *Archimède et le volume de la sphère. Site personnel.* . 2012.

[10] F. Gleba. « Un travail hors-la-classe : superficie de votre main d'après une idée d'Y. Monka ». In : *Prise d'initiative pour tous et travail hors la classe au collège*. . Académie de Créteil, 2015, p. 188-195.

[11] N. Buiron, J. Favergeon et O. Scoefs. *Grandeurs, dimensions et unités, définition d'une grandeur. Université de technologie de Compiègne*. . 2016.

[12] T. Chevalarias et al. *Enseigner les mathématiques en Sixième à partir des grandeurs : les aires*. . IREM de Poitiers, octobre 2010.

[13] M. Gaud. « Grandeurs et géométrie. Mathématiques en cycle 3 ». In : *Actes du colloque du réseau des IREM* (2017). , p. 43-60.

[14] É. Callandreau. *L'arénaire d'Archimède*. Albin-Michel, 1949, p. 14.

[15] P. Cibois. « Archimède compte les grains de sable de l'Univers ». In : *Hypothèses. La question du latin* (janvier 2013). .

[16] I. Vardi. « Archimède. Les mathématiciens, de l'Antiquité au XXIe siècle ». In : *Pour la science* (2007). Sous la dir. de Belin, p. 6-11.

[17] Site Maths 93. *Le problème de l'échiquier de Sissa*. . 15 mai 2014.

[18] F. Lavallou. « Le *stomachion*, le plus vieux puzzle du monde ! » In : *Hors-série Tangente* nº 64 (septembre 2017). Un article plus complet, mais en anglais, est accessible sur `Publimath` .

*Mise en scène sommaire de l'*École d'Athènes *avec des élèves UPEAA-NSA.*
En bas à gauche de la photographie, Pythagore est représenté par un élève venant du Tchad. Au centre gauche, Platon est représenté par une élève venant de Syrie. Au centre droit, Aristote est représenté par une élève venant d'Afghanistan. En bas à droite, Archimède est représenté par un élève venant du Sénégal. En arrière-plan, les solides de Platon.

Henrique Vilas-Boas est chargé d'étude au centre Alain Savary à l'Institut français d'éducation, a été enseignant de mathématiques en REP+ pendant vingt ans et ancien formateur académique éducation prioritaire au centre académique Michel Delay.

hvilas-boas@ac-lyon.fr

Sommaire du nº 550

Grandeurs