Le bulletin de l'APMEP - N° 550

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Octobre, Novembre, Décembre 2023

Grandeurs

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L’ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d’honneur : Christiane Zehren

Au fil des maths, c’est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr

Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l’équipe d’*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille Génin mcgenin@wanadoo.fr

AU FIL DES MATHS

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : *Claire Piolti-Lamorthe*.

Responsable coordinatrice de l’équipe : *Cécile Kerboul*.

Rédacteurs : *Vincent Beck, François Boucher, Richard Cabassut, Séverine Chassagne-Lambert, Frédéric De Ligt, Mireille Génin, Cécile Kerboul, Valérie Larose, Alexane Lucas, Lise Malrieu, Marie-Line Moureau, Serge Petit, Daniel Vagost, Thomas Villemonteix, Christine Zelty*.

« Fils rouges » numériques : *Gwenaëlle Clément, François Couturier, Jonathan Delhomme, Nada Dragovic, Fanny Duhamel, Laure Étevez, Marianne Fabre, Yann Jeanrenaud, Armand Lachand, Lionel Pronost, Agnès Veyron*.

Illustrateurs : *Éric Astoul, Nicolas Clément, Stéphane Favre-Bulle, Pol Le Gall, Olivier Longuet, Jean-Sébastien Masset*.

Équipe TEXnique : *Sylvain Beauvoir, Laure Bienaimé, Isabelle Flavier, Philippe Paul, François Pétiard, Guillaume Seguin, Sébastien Soucaze, Sophie Suchard*.

Maquette : *Olivier Reboux*.

Correspondant Publimath : *François Pétiard*.

Votre adhésion à l’APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l’abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l’APMEP.

APMEP

Mise en page : François Pétiard
Dépôt légal : Décembre 2023. ISSN : 2608-9297.
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

Quel sens mathématique pour les grandeurs ?

Les physiciens, les mathématiciens, les programmes, parlent de grandeurs. Mais pour le commun des professeurs de mathématiques, rechercher une définition « propre » de ce concept est une épreuve redoutable. Cet article, qui ne manque pas de subtilités, vous apportera des éléments de réponse.

Richard Cabassut

Le mathématicien Grothendieck [1, p. 20] rappelait à propos de sa scolarité : *« Ce qui me satisfaisait le moins, dans nos livres de maths, c'était l'absence de toute définition sérieuse de la notion de longueur (d'une courbe), d'aire (d'une surface), de volume (d'un solide) »*. Comme beaucoup d'enseignants des générations post-Grothendieck [1], je n'ai pas eu d'enseignement sur les grandeurs dans ma scolarité et au cours de mes études : j'ai eu droit aux espaces mesurés, avec les exemples emblématiques des cardinaux et des probabilités dans le secondaire, et la théorie de la mesure dans le supérieur. J'ai eu affaire aux équations aux grandeurs en physique et c'est seulement quand il m'a fallu former des professeurs d'école que j'ai découvert les grandeurs. J'ai alors mesuré la difficulté à trouver des définitions mathématiques à propos des notions attachées aux grandeurs.

Le but de cet article est de proposer des définitions mathématiques des grandeurs, des grandeurs repérables et des grandeurs mesurables, inspirées par une littérature qui n'est pas toujours consensuelle [2].

Nous proposons une réflexion sur le sens des définitions mathématiques autour du thème des grandeurs et mesures [3] à adapter [4] pour l'enseignement ou la formation d'enseignants.

Rappelons le travail pionnier de l'APMEP [6, p. 12] qui définissait en ces termes la notion de Grandeur : *« Partons de l'exemple bien connu de la longueur des segments* [5]*. Dans un ensemble de segments, la relation qui a pour lien verbal "est superposable à" est une relation d'équivalence (du moins si l'on convient qu'un segment est superposable avec lui-même). Les segments de même classe sont dits de même longueur "ℓ" et l'on dit de chacun des segments de cette classe que sa longueur est ℓ. Le lien verbal peut se dire "a même longueur que". Le mot longueur ne désigne ni un ensemble de points, ni un nombre »*. Les auteurs expriment un lien entre grandeur et classe d'équivalence, leur exemple de départ concerne la longueur. Nous nous proposons de mener plus loin la réflexion de ce groupe en proposant une définition du concept même de grandeur, dans le cas général. Notre propos sera illustré tout au long de ce texte par le concept de longueur.

Sens mathématique versus sens extra-mathématique

Le domaine dit « des grandeurs » est présent dans les programmes d'enseignement dès l'école primaire. Ce domaine permet d'aider l'élève à

1. Grothendieck est né en 1928 alors que je suis né trente ans plus tard.
2. Chamorro [2, p. 224] définit une grandeur mesurable comme une structure de monoïde commutatif archimédien alors qu'en France les définitions de Perrin [3], Chevallard & Bosch [4], DGESCO [5] sont différentes.
3. Cette réflexion prend appui sur un atelier animé aux journées de Jonzac dont le titre était : « Grandeurs et mesures : où se cache le sens ? » Il s'agissait d'un clin d'œil au thème des journées : *« Où se cachent les mathématiques ? »*
4. Le but de l'article n'est pas de proposer ces adaptations : nous nous contenterons de citer quelques ressources.
5. Extrait de la note figurant dans la brochure : *« Dans ce qui suit, nous ne considérons que des segments fermés ; mais cela est sans incidence sur notre propos car les quatre segments ayant les mêmes extrémités* A *et* B *(à savoir* [AB],]AB[, [AB[*et*]AB]*) ont aussi la même longueur »*.

construire le sens mathématique : « *L'étude des quatre opérations (addition, soustraction, multiplication, division) commence dès le début du cycle 2 à partir de problèmes qui contribuent à leur donner du sens, en particulier des problèmes portant sur des grandeurs ou sur leurs mesures* » [7, p. 22]. Et réciproquement les modèles mathématiques permettent de résoudre les problèmes sur les grandeurs, donc de les éclairer grâce au sens du modèle mathématique : « *utiliser des outils mathématiques pour résoudre des problèmes concrets, notamment des problèmes portant sur des grandeurs et leurs mesures* »[6] [8, p. 23].

Un autre mathématicien [9] témoignait : « *Je me souviens très bien ; en classe de Quatrième, le professeur avait posé un problème concernant la roue d'un char cerclée par un forgeron. Il avait donné toutes les dimensions, la densité du métal, le prix du métal, etc. et il fallait calculer le prix du cerceau. Pour moi il était clair, parce que j'avais vu des charrons à l'œuvre, que le cerceau était un parallélépipède rectangle qu'on repliait pour en faire un cerceau. Par conséquent j'ai calculé son volume de cette manière. Il est clair qu'à peu près la totalité de la classe avait procédé en calculant la différence de volume de deux cylindres qui limitent le cerceau. Et le professeur, qui évidemment avait donné ce problème en application des calculs de volumes de cylindres, a été amusé de trouver une autre version et ne m'a pas pénalisé, mais non plus félicité* ». Les deux modèles[7] du volume du cerceau métallique de la roue proposés ici s'appuient sur des références distinctes : l'un, le volume d'un parallélépipède rectangle, est inspiré d'une expérience extra-mathématique dans la vie réelle des charrons, l'autre, la différence de volumes de deux cylindres, est inspiré par un cours de mathématiques sur les cylindres. Et chacun des modèles se justifie suivant l'expérience à laquelle il se réfère, l'un ne présentant pas de limite théorique liée à l'épaisseur du métal, l'autre si. Nous allons donc interroger les définitions mathématiques que nous proposerons, du point de vue mathématique et du point de vue de la situation extra-mathématique où elles s'appliquent, sans entrer dans les spécificités de chaque grandeur, pour lesquelles nous proposerons des références [5, 10].

La notion de grandeur

« La grandeur qui sert de modèle est la longueur, avec sa représentation sur une droite » [3]. C'est pourquoi nous accompagnerons ces définitions de l'exemple de la longueur des segments semi-ouverts [AB[sur une droite donnée[8] en écrivant entre parenthèses et en italique l'illustration sur cet exemple.

Le sens mathématique : un ordre total sur des éléments équivalents

Dans un ensemble X (ensemble des segments semi-ouverts [AB[sur une droite donnée[9]) la notion de grandeur est définie si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

1. Il existe une relation d'équivalence, notée $\sim$, et « $x \sim y$ » se lira « x **a même grandeur que** y » ([AB[*a même longueur que* [CD[). La classe d'équivalence de x par cette relation, que l'on pourra noter[10] $\mathrm{G}(x)$, sera appelée **la grandeur de** x. L'ensemble des classes d'équivalence $\mathrm{G}(x)$ sera noté G *(dans l'exemple des segments semi-ouverts* [AB[*supportés par une même droite donnée, si* [AB[*et* [A′B′[*ont même longueur,*

6. Ces citations des programmes illustrent la dialectique entre sens mathématique et sens extra-mathématique présente dans ces programmes, sans prétendre référer à toutes les occurrences de la notion de grandeur des programmes, de la maternelle au lycée. De même nous ne nous intéressons pas au point de vue très intéressant du physicien.
7. Le modèle de la différence de deux volumes de deux cylindres a une valeur plus générale que celui du charron.
8. Nous prenons des segments semi-ouvert [AB[sur une même droite pour éviter les problèmes de juxtapositions pratiques de segments de directions différentes, ou le problème d'une extrémité commune entre deux segments fermés juxtaposés. L'illustration est prise pour sa valeur inspirante et non pas problématique. De même, pour tout point A, le segment [AA[, qui est l'ensemble vide, sera considéré sans questionnement extra-mathématique, tout comme il est considéré dans la théorie des ensembles.
9. Le segment [AA[vide a pour longueur 0.
10. Une notation plus rigoureuse serait $\mathrm{G}_\sim$ pour rappeler que la classe d'équivalence est attachée à la relation d'équivalence mais pour éviter une notation trop lourde on y renoncera.

on pourra adopter indifféremment les notations suivantes : $G([AB[) = G([A'B'[)$. Il est usuel de noter AB *à la place de* $G([AB[)$*, et donc d'écrire* AB = A′B′*).*

2. Sur l'ensemble des classes d'équivalence G pour $\sim$, il existe une relation d'ordre total, notée $\leqslant$, et « $G(x) \leqslant G(y)$ » se lira « $G(x)$ **est moins grand que** $G(y)$ » (AB *est moins grand que* CD).

Sous ces deux conditions, on dit que sur l'ensemble X il existe une espèce de [11] grandeur G et chaque élément x de X a la grandeur $G(x)$ associée à G.

Il est courant d'étendre à X la relation d'ordre de G et de déclarer « x est moins grand que y si $G(x)$ est moins grand que $G(y)$ », ce qui constitue un abus de langage parfois gênant : dire que x est égal à y pour la grandeur considérée si $G(x) = G(y)$, alors que x est distinct de y comme éléments de X (*par exemple, deux segments distincts d'une même droite :* [AB[*et* [CD[*avec* A ≠ C *et* B ≠ D*, pourront être dits égaux si* $G([AB[) = G([CD[)$).

Ainsi l'extension à X de la relation d'ordre sur G n'est pas une relation d'ordre sur X : il manque la propriété d'antisymétrie. Cela amène à des ambiguïtés de langage inextricables, voire incorrectes : on dit ainsi que deux segments sont égaux pour signifier qu'ils ont même longueur, que deux secteurs angulaires sont égaux pour dire qu'ils ont même angle, tout comme on parle de cas d'égalité des triangles pour dire qu'ils sont isométriques.

Jusqu'à présent, le sens de la notion de grandeur provient de sa définition mathématique, à l'aide d'une relation d'équivalence et d'une relation d'ordre. Bien entendu pour un élève de l'école primaire, on pourra se contenter d'une définition allégée : pour un objet [12], une grandeur de cet objet est une propriété de l'objet qui permet de comparer des objets relativement à cette grandeur, c'est-à-dire de reconnaître les objets qui sont « pareils » pour cette grandeur et de les ranger du plus petit au plus grand. À l'école primaire, il suffit de remplacer le mot « grandeur » par longueur, masse, volume, température, date, etc. et dans l'expression « est plus grand que » le mot « grand » par long, lourd, volumineux, chaud, ancien, etc. Rouche [11] propose une définition différente, qui tient compte du sens extra-mathématique, et notamment des manipulations, mobilisées par ou pour les élèves, mais en les exprimant mathématiquement.

Le sens extra-mathématique : une procédure pratique pour comparer des objets

Le sens extra-mathématique est donné par la procédure pratique qui permet de comparer des objets. En effet, la définition mathématique précédente est une définition formelle qui n'indique pas comment sont définies les relations d'équivalence et d'ordre total [13], c'est-à-dire comment savoir si deux objets sont équivalents ou si l'un est plus petit que l'autre pour la grandeur considérée.

Pour la longueur de segments, la procédure pratique consiste à distinguer deux cas. Le premier cas envisage la comparaison directe : un des segments est inclus dans l'autre et sera défini moins long que l'autre. Le second cas envisage la comparaison indirecte : il suffit de déplacer l'un des segments vérifiant le premier cas et de l'inclure dans l'autre segment, (ou inversement) sous l'hypothèse de conservation des longueurs par un déplacement.

Pour les aires de surfaces planes, l'inclusion d'une surface dans l'autre permet la comparaison directe.

11. Dans le langage courant on utilise souvent le même terme pour désigner la grandeur et l'espèce de grandeur. Par exemple, les termes longueur, aire, volume, masse, durée, etc. désigneront aussi bien des espèces de grandeurs de classes d'objets, que la grandeur d'objets d'une même classe particulière.

12. Pour l'élève on remplace le terme élément de la théorie des ensembles par le terme objet qui fait référence à des éléments de l'espace fréquenté par l'élève, ces objets pouvant être concrets (par exemple des objets physiques de l'espace familier) ou abstraits (par exemple des figures planes étudiées à l'école).

13. Et ceci pour une raison simple : il n'y a pas de définition universelle mais une définition spécifique à chaque espèce de grandeur.

Le déplacement d'une surface offre dans certains cas une possibilité de comparaison indirecte (sous réserve de la conservation des aires par un déplacement). Dans d'autres cas, le découpage et le recollement permettent une comparaison des aires (sous réserve de la compatibilité des aires avec les découpages et réunions sans chevauchement). Ces procédures extra-mathématiques de déplacement ou de découpage-recollement peuvent être théorisées mathématiquement [3] mais ce n'est pas l'objet de cet article.

Pour les masses, une balance de Roberval permet la comparaison. Pour les volumes de solides immergeables dans un récipient, le repère des niveaux d'eau des solides immergés permet la comparaison.

Parmi les procédures pratiques, il y a l'estimation, peut-être trop négligée dans l'enseignement [12], qui mobilise des connaissances familières pour comparer la grandeur d'un objet à la grandeur correspondante d'un référent familier. Les programmes de l'école primaire indiquent pour le cycle 2 : « *pour comprendre les situations et valider leurs résultats ils* [les élèves] *doivent aussi donner du sens à ces grandeurs (estimer la longueur d'une pièce ou la distance entre deux arbres dans la cour, juger si un livre peut être plus lourd qu'un autre, etc.) en s'appuyant sur quelques références qu'ils se seront construites* » [7, p. 26] et précisent au cycle 3 « *estimer en prenant appui sur des références déjà construites : longueurs et aire d'un terrain de basket, aire d'un timbre-poste, masse d'un trombone, masse et volume d'une bouteille de lait, etc.* » [8, p. 31].

Quand la procédure de comparaison des grandeurs utilise un instrument : repérage et mesurage

Il existe divers instruments de repérage : repères pour la hauteur de crue d'une rivière, calendriers pour le temps chronologique, thermomètres pour la température. Ils permettent de mémoriser la comparaison entre grandeurs sans calcul. Les instruments de mesurage, comme le rapporteur pour l'amplitude de l'angle, le chronomètre pour la durée, la balance pour la masse, etc. vont ouvrir la voie aux calculs entre grandeurs.

Réfléchissons maintenant sur les définitions mathématiques de repère ou mesure dont le repérage et le mesurage sont les procédures pratiques de détermination.

Grandeur repérable

Le sens mathématique d'un repère numérique : la numérisation des grandeurs compatible avec l'ordre

Bien entendu un repérage peut ne pas recourir à des nombres, comme des niveaux de crues ou des calendriers (jours et mois). Dans ces exemples, un axe orienté, sur lequel les repères seront inscrits, suffit à modéliser la relation d'ordre total. Pour certaines grandeurs comme la température et le temps chronologique, on utilise très souvent un repère numérique. Ces repères permettront d'effectuer certains calculs, comme la moyenne, mais l'addition de deux valeurs numériques repérées n'aura généralement pas de sens. Ainsi, mélanger un litre d'eau à 25 °C et un litre d'eau à 35 °C donne bien deux litres d'eau, mais pas à 60 °C !

Proposons [14] la définition mathématique suivante d'une espèce de grandeur repérée numériquement, appelée couramment « grandeur repérable ». Avec les notations précédentes, une espèce de grandeur G est repérable si et seulement s'il existe une application de l'ensemble des grandeurs G dans $]-\infty\,;+\infty[$ **strictement croissante** [15] qui, à toute grandeur $\mathrm{G}(x)$, associe un réel noté $\mathrm{R}(\mathrm{G}(x))$, appelé repère de $\mathrm{G}(x)$ et, par extension, repère de x. Cette application respecte donc l'ordre sur les grandeurs du fait de sa stricte croissance. *Si x a même grandeur que y, alors x a même repère que y. Si x est moins grand que y, alors le repère de x est moins grand que le repère de y (sur l'exemple des longueurs, un premier repère R_1 pourrait associer à AB sa longueur en cm tandis qu'un second repère R_2 pourrait lui associer sa longueur en pouce).*

Cette définition ne précise pas comment les repères sont construits. Une même espèce de grandeur peut avoir plusieurs repères différents, comme l'illustrent les exemples historiques des calendriers pour la date [13] ou des degrés Celsius, Kelvin ou Fahrenheit pour la température.

Le sens à l'école primaire et au collège

Alors que les documents officiels de l'école primaire sont peu diserts sur les grandeurs repérables, le guide du collège [14, p. 161] évoque en ces termes cette notion : « *Certaines grandeurs physiques* [16] *ne sont pas mesurables, car l'échelle numérique associée, pour les caractériser, dépend du choix d'une origine (comme la température thermométrique Celsius, la date calendaire). Dans ce cas, ces grandeurs sont dites repérables, et on devrait dire au quotidien "repérer une température" plutôt que "mesurer une température". Point de vigilance : passer de 10 °C à 20 °C, ce n'est pas doubler la température, car dans l'échelle Fahrenheit on passe de 50 °F à 68 °F qui n'est pas un doublement* ».

Grandeur mesurable : vers le calcul sur les grandeurs avec la numérisation des grandeurs conservant l'addition et l'ordre

Le sens mathématique

L'idée est de mobiliser les nombres afin de pouvoir communiquer à propos d'une espèce de grandeur, ce que l'on appelle usuellement « mesurer ». C'était déjà le cas avec des repères. Mais, inspirée par ce qui se fait pour l'espèce de grandeur longueur, l'idée serait de définir une addition qui permettrait de comparer plus précisément deux grandeurs x et y. Par exemple si $x < y$, combien de fois faut-il additionner x à elle-même pour obtenir une grandeur qui sera proche de y, ou plus grande que y, soit $y < nx$. Examinons les conditions suivantes inspirées de Perrin [3] que devrait vérifier une grandeur mesurable.

14. Nous n'avons pas trouvé de définition de grandeur repérable dans les documents officiels consultés et la proposition faite ici essaie d'être compatible avec le discours de ces documents officiels.
15. Mathématiquement, la croissance assure la conservation avec l'ordre strict et la stricte croissance assure l'injectivité.
16. Ici, il s'agit d'espèces de grandeurs physiques.

1. G est une espèce de grandeur sur un ensemble X, que l'on supposera non réduite à un seul élément.

2. Sur l'addition des grandeurs :
(inspirons nous de l'exemple des longueurs des segments semi-ouverts [AB[*supportés par une même droite donnée (donc tous les points sont alignés sur cette droite). Comment définir* AB + CD *? Si t est la translation envoyant* C *en* B *et* D *en un point que l'on note* D′*, alors* t([CD[) = [BD′[. *Comme la translation conserve les longueurs,* CD = BD′. *On définira alors :* AB + CD = AD′ [17]*).*
Sur G, il existe une addition, notée +, interne [18] (*illustrée* [19] *sur les longueurs par* AB [20] + BC = AC*), associative* [21] (pour les longueurs : AB + (BC + CD) = (AB + BC) + CD*), avec un élément neutre noté* 0 [22] (AA = 0*)* [23] *et commutative* [24] (AB + BC = CB + BA*).*

   Sur les liens entre l'ordre et l'addition :
L'addition est compatible avec l'ordre (*pour les longueurs : si* AB < CD *et si* BE < DF *alors* AB + BE = AE*,* CD + DF = CF *et* AE < CF).
0, élément neutre de l'addition, est le plus petit élément de G [25]

3. Il existe une soustraction des grandeurs : Si G(x)<G(y) alors il existe G(z) tel que G(x) + G(z) = G(y) (*pour les longueurs : si* AB < CD*, on envoie par translation* C *en* A *et* D *en* D′ *et on a alors* AB < AD′. *On prend alors* z = [BD′[*et* G(z) = BD′ *avec* AB + BD′ = AD′ = CD).

4. Il existe une division des grandeurs par un entier : étant donné G(x), pour tout entier naturel non nul n il existe une grandeur G(y) telle que G(x) = G(y) + G(y) + ... + G(y) (n fois) que l'on notera G(x) = nG(y) et on note encore G(y) = $\frac{1}{n}$G(x) (*pour les longueurs, ceci correspond à la possibilité de sous-division d'une unité choisie et ouvre la voie aux nombres rationnels et à l'infiniment petit)* [26].

5. Axiome d'Archimède : pour toute grandeur non nulle G(x) et pour tout autre grandeur G(y), il existe un entier naturel n tel que G(y) < nG(x) (*pour les longueurs : pour* AB *non nul et* CD *non nul, il existe un entier n tel que* CD < nAB). Ce dernier axiome ouvre la voie à l'infiniment grand : il n'y a pas de plus grande grandeur G(y) puisque on peut trouver n tel que G(y) < nG(x) et, comme la loi + est interne, nG(x) est une grandeur supérieure à G(y).

6. Axiome de la borne supérieure : tout sous-ensemble majoré de G admet une borne supérieure. Cet axiome ouvre la voie aux limites et va permettre de considérer [0 ; +∞[comme modèle d'espèce de grandeurs mesurables.

Définition

Toute espèce de grandeur vérifiant les conditions 1 à 6 est une espèce de grandeur mesurable.

17. On s'assure que cette définition est indépendante des représentants choisis.
18. La somme $g_1 + g_2$ de deux grandeurs g_1 et g_2 est encore une grandeur. Nous n'écrivons pas les quantificateurs pour ne pas alourdir la note de bas de page.
19. Nous n'écrivons pas les quantificateurs pour ne pas alourdir l'illustration.
20. On rappelle que AB désigne la classe d'équivalence de tous les segments de même longueur que celle de [AB[.
21. $g_1 + (g_2 + g_3) = (g_1 + g_2) + g_3$.
22. $g_1 + 0 = 0 + g_1 = g_1$. Cet élément neutre est difficile à concevoir pratiquement : il correspond à la grandeur d'un objet difficilement représentable : le cardinal d'un ensemble vide, la longueur nulle d'un segment dont les deux extrémités sont confondues, l'aire d'un triangle aplati, le volume d'une sphère de rayon nul, la masse nulle d'un solide inexistant.
23. Algébriquement ces conditions de loi interne, associative, avec élément neutre décrivent que (G, +) est un monoïde.
24. $g_1 + g_2 = g_2 + g_1$.
25. Cette condition n'était pas nécessaire dans le repérage mais est indispensable ici si on veut construire les rationnels ou les réels positifs comme modèles des grandeurs mesurables.
26. Chamorro [2] ne retient pas cette condition 4 comme obligatoire pour sa définition de grandeur mesurable, ce qui lui permet de récupérer le cardinal des ensembles finis comme grandeur mesurable.

Mesure d'une grandeur

On appelle mesure de l'espèce de grandeur G toute application m de G dans $[0\,;+\infty[$ [27], strictement croissante (c'est-à-dire : si $G(x) < G(y)$ alors $m(G(x)) < m(G(y))$) et conservant l'addition (c'est-à-dire : si $G(x) + G(y) = G(z)$ alors $m(G(x)) + m(G(y)) = m(G(z))$) [28].

Existence d'une mesure m telle que $m(u) = 1$ où u est une grandeur non nulle

Propriétés :

a. Si u est une grandeur non nulle de l'espèce de grandeur mesurable G, alors il existe une unique mesure m_u pour laquelle u est de mesure 1. u est appelé unité de grandeur associée à la mesure m_u.
b. L'application m_u précédente est bijective [29].
c. Tout autre mesure m' de (l'espèce de) grandeur G est proportionnelle à m_u. Si k est le réel positif coefficient de proportionnalité tel que $m' = km_u$ alors l'unité u' de m' vérifie $u' = \frac{1}{k}u$.
   Pour la démonstration, nous renvoyons le lecteur à Bourbaki [15, p. 12-16].
   Ce qu'il faut retenir c'est la bijection conservant l'addition et l'ordre entre G et $[0\,;+\infty[$.
   $[0\,;+\infty[$ est en quelque sorte un modèle pour l'espèce de grandeur, c'est-à-dire que, mathématiquement, on peut remplacer le traitement d'additions, de comparaisons et de passage à la borne supérieure sur les grandeurs par des traitements correspondants sur les réels.

Et toutes les espèces différentes de grandeurs différentes utilisent le même système de nombres, $\big([0\,;+\infty[,\ +,\ \leqslant\big)$.

Cependant, si un même nombre réel exprime la mesure de grandeurs d'espèces différentes (une longueur, une aire, un volume, une durée, un écart de température), il n'y a *a priori* pas de relation de sens mathématique entre ces grandeurs. On pourra éventuellement trouver *a posteriori* des relations mathématiques entre espèces de grandeurs, comme par exemple entre volume et longueur.

Lorsqu'un repère est représenté par une graduation régulière, par exemple la température ou la date, l'écart de deux grandeurs repérables de la même espèce peut permettre de définir une grandeur mesurable (par exemple l'écart de températures, ou l'écart de dates appelé encore la durée).

Le sens extra-mathématique de l'addition de grandeurs

Le document ressource des actuels programmes de l'école primaire précise « *La masse de deux objets distincts réunis est égale à la somme des masses de chacun de ces objets* […]. *Toutes les grandeurs géométriques rencontrées au cycle 3 vérifient ces propriétés, on peut ajouter de la même façon les longueurs de deux segments mis bout à bout, les aires de deux surfaces qui ne se recouvrent pas ou encore deux angles adjacents. Ces opérations associées à des manipulations ou à des tracés permettent de renforcer le sens des grandeurs étudiées et préparent aussi les activités de mesurage par report d'une unité* […]. *Ce n'est pas le cas pour d'autres grandeurs, par exemple pour la température : si l'on met ensemble 1 L d'eau à 20 °C et 1 L d'eau à 30 °C, on n'obtient pas 2 L d'eau à 50 °C* ».

On voit dans ce propos que c'est le sens extra-mathématique qui inspire, pour chacune des espèces de grandeurs, avec des manipulations ou des expériences, le sens de l'addition mathématique.

Réciproquement, le sens mathématique peut inspirer le sens extra-mathématique. Ainsi pour les

27. Une mesure d'une grandeur est par définition un nombre positif. On peut définir des grandeurs scalaires auxquelles pourront être associés des nombres positifs ou négatifs, par exemple en physique la charge électrique.
28. Avec pour conséquence que $m(0) = m(0+0) = m(0) + m(0)$. Comme 0 est le seul nombre réel vérifiant $x + x = x$ (il suffit de soustraire x de chaque côté pour le voir), on en déduit que $m(0) = 0$.
29. Ce résultat montre que la mesure des grandeurs mesurables n'est pas bornée (du fait de la bijection avec $[0\,;+\infty[$ et plus généralement du fait de l'axiome d'Archimède) alors que la mesure des espaces mesurés, comme les mesures de probabilités, peut être bornée. De même l'addition sur les grandeurs vérifie $A + A = 2A$ alors que la réunion dans une tribu vérifie $A \cup A = A$. Il convient donc de bien distinguer mesure des grandeurs et mesure des espaces mesurés.

grandeurs écart de températures et durée, qui sont des écarts de grandeurs repérables (la température ou la date), l'écart entre deux repères numériques peut être représenté par un intervalle de nombres qui nous renvoie au modèle précédent des segments. Même des grandeurs mesurables non géométriques, comme l'écart de température ou la durée, peuvent être reliées à la grandeur géométrique longueur de segment, qui nous a servi de modèle dans notre construction.

Conclusion : le lien problématique entre sens mathématique et sens extra-mathématique

Le mathématicien inspiré par le monde extra-mathématique (comme nous l'avons illustré ici avec la longueur d'un segment) a construit une théorie mathématique des grandeurs mesurables, qui a permis la construction de l'ensemble des réels [16, p. 33-40]. Mais bien vite les développements mathématiques ont étendu la mesure à des espaces autres que les espaces physiques, par exemple les espaces de probabilités. Dans les espaces physiques, l'expérience et la manipulation permettent une représentation et une inspiration pour donner du sens à l'addition et à la mesure des grandeurs. Dans les espaces de probabilités, les représentations et les expériences sont plus difficiles que dans l'espace extra-mathématique à trois dimensions du monde physique. Il faut souvent modéliser pour se représenter ou expérimenter. Par exemple, prendre au hasard dans un ensemble continu, peut donner lieu à plusieurs interprétations de mesure de probabilité, comme l'illustre le paradoxe de Bertrand, alors que nous avions trouvé un seul modèle de mesure (à un facteur multiplicatif près) pour les grandeurs mesurables : le sens mathématique peut être *a priori* contre-intuitif par rapport au sens extra-mathématique. D'ailleurs, historiquement, la découverte des nombres complexes ou des géométries non euclidiennes sont parties du développement du sens mathématique par rapport au sens extra-mathématique. Certes la frontière entre les deux mondes n'est pas claire et se déplace suivant les époques, les lieux et les cultures. Mais le débat entre formaliste et platonicien persiste : les mathématiques sont-elles découvertes par l'homme dans le monde extra-mathématique, ou sont-elles une création de l'homme qui sert à comprendre ce monde extra-mathématique ?

Rouche [11, p. 34-35] résume bien la problématique à propos des grandeurs : « *Il y a une distance appréciable entre les grandeurs telles qu'on les observe et les manie dans le quotidien et les grandeurs amenées à travers une axiomatique [...]. Cet exemple des grandeurs illustre le fait que les mathématiques ne sont pas "dans la nature". On ne peut les découvrir seulement en manipulant et en observant. Les concepts doivent être construits dans leur technicité logique comme instrument de démonstration* [...]. *Ceci n'implique nullement que les manipulations et observations n'y aient pas de rôle dans la pensée mathématique : elles sont la source initiale des intuitions sans lesquelles cette pensée demeurerait immobile* ».

Références

[1] A. Grothendieck. *Récoltes et semailles*. Gallimard, 13 janvier 2022.

[2] M. del C. Chamorro. *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid : Pearson Educacion, 2006.

[3] D. Perrin. *Mathématiques d'école. Nombre, mesure et géométrie*. Cassini, 2005, p. 136-205.

[4] Y. Chevallard et M. Bosch. « Les grandeurs en mathématiques au collège : Partie II Mathématisations ». In : *Petit x* nº 59 (2002), p. 43-76.

[5] DGESCO. *Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e, et 3e du collège – Grandeurs et mesures au collège*. Ministère de l'Éducation nationale, 2007.

[6] APMEP, éd. *Brochure APMEP, Collection « Mots »*. T. 4 : *Grandeur. Mesure*. Nº 42. 1982.

[7] Ministère de l'Éducation nationale. « Cycle 2 ». In : *BOEN* Nº 30 (26 juillet 2018).

[8] Ministère de l'Éducation nationale. « Cycle 3 ». In : *BOEN* Nº 30 (26 juillet 2018).

[9] G. Reeb. « Le parcours d'un mathématicien ». In : *Journal* L'Ouvert (septembre 1994). Sous la dir. d'IREM de Strasbourg. Nº spécial G. Reeb, p. 1.

[10] ÉDUSCOL. *Grandeurs et mesures au cycle 2*. Ministère de l'Éducation nationale, 2016.

[11] N. Rouche. « Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique ». In : *Repères IREM* nº 15 (1994).

[12] P. Sirieix. « Estimer la mesure de longueurs à l'école élémentaire ». In : *Au fil des maths* nº 550 (décembre 2023), p. 4.

[13] J. Lefort. *La saga des calendriers ou le frisson millénariste*. Belin, 1999.

[14] DGESCO. *La résolution de problèmes mathématiques au collège*. Ministère de l'Éducation nationale, 2022.

[15] Bourbaki. *Éléments de mathématique. Topologie générale*. Springer, 2007. Chap. 5–10.

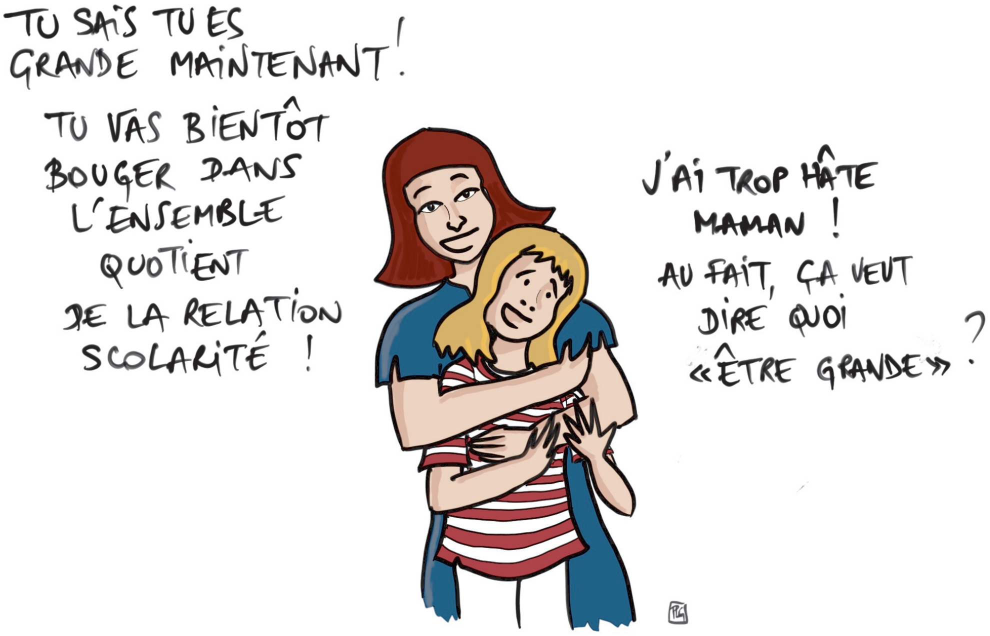
[16] M. Fréchet. *Paroles de mathématiciens. Histoire des mathématiques par les textes*. Bréal, 2022.

[17] Bourbaki. *Éléments de mathématique. Intégration*. Springer, 2007. Chap. 1–4.

[18] ÉDUSCOL. *Grandeurs et mesures au cycle 3*. Ministère de l'Éducation nationale, 2016.

Richard Cabassut, maître de conférences honoraire en didactique des mathématiques à l'université de Strasbourg, collabore à l'équipe d'*Au fil des maths*.

richard.cabassut@gmail.com



Sommaire du nº 550

Grandeurs