

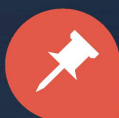
Le bulletin de l'APMEP - N° 549

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Juillet, Août, Septembre 2023

Faites parler les nombres ! ⁷



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>



Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents via une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufilesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est jointe la plaquette
Visages 2023-2024 de l'APMEP.

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Lionel PRONOST, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Éric ASTOUL, Nicolas CLÉMENT, Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL, Sixtine MARÉCHAL, Jean-Sébastien MASSET.

Équipe T_EXnique : Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Septembre 2023. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau



*Vous pouvez adresser vos propositions, solutions ou commentaires par courriel à :
 frederic.deligt2@gmail.com
 ou par courrier à :
 Frédéric de Ligt
 3 rue de la Pierrière
 17270 MONTGUYON*

Pour vos envois, privilégiez le courriel si possible. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler les formules. Merci d'avance.

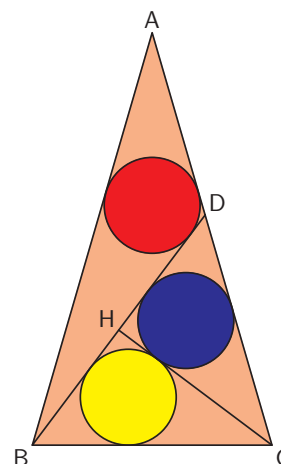
Frédéric de Ligt

549-1 Un joli sangaku

Ce problème était accroché en 1806 au sanctuaire d'Atsuta, dans la préfecture d'Aichi au Japon. La tablette qui contenait ce seul problème et pas de solution a été perdue. Il a été conservé grâce aux notes d'un mathématicien japonais de l'époque.

Le triangle ABC est isocèle, les cercles inscrits dans chacun des trois triangles ont le même rayon r et H est le pied de la hauteur issue de C du triangle BCD. Il est demandé d'exprimer r en fonction de CH.

Dans le bel ouvrage *Sacred Mathematics* (Princeton University Press), H. Fukagawa et Y. Rothman donnent une solution plutôt compliquée p. 212 à p. 216 et demandent au lecteur d'en trouver une plus simple. Je passe donc le message.



549-2 À confirmer (Vincent Thill-Migennes)

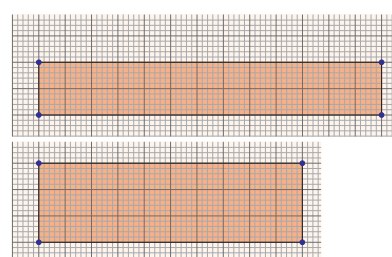
Montrer que l'identité suivante est vraie pour tout réel $a \geq 1$:

$$\sqrt[3]{a + \left(\frac{a+8}{3}\right)\sqrt{\frac{a-1}{3}}} + \sqrt[3]{a - \left(\frac{a+8}{3}\right)\sqrt{\frac{a-1}{3}}} = 2.$$

549-3 L'amitié entre rectangles ça existe ! (Jean-Christophe Laugier-Rochefort)

On fixe une unité de longueur et on considère l'unité d'aire associée. On appelle « rectangle entier » un rectangle dont les mesures de la longueur et de la largeur sont des entiers non nuls. Deux rectangles entiers sont « amis » si la mesure du périmètre de l'un est égal à la mesure de l'aire de l'autre. Par exemple les deux rectangles ci-contre sont amis puisque $2 \times (13 + 2) = 10 \times 3$ et $2 \times (10 + 3) = 13 \times 2$.

Combien y a-t-il de rectangles amis ?





549-4 Les poids (Daniel Perrin-Orsay)

Les questions suivantes sont un prolongement du troisième exercice du concours René Merckhoffer (pour les élèves de Quatrième) de 2022 : les nombres considérés sont des entiers écrits selon la numération décimale et le poids d'un nombre est la somme de ses chiffres.

- Combien y a-t-il de nombres n de poids donné p ?
- Et si on n'utilise pas le chiffre 0 ?
- Quel est le plus petit nombre de poids donné p ?
- On se donne plusieurs chiffres (entre 0 et 9). Quels sont les poids que l'on peut obtenir avec les nombres écrits uniquement avec les chiffres donnés ?

À propos des problèmes parus précédemment

Pierre Renfer (Saint-Georges-d'Orques) propose une solution en cinq couleurs pour le problème de Hadwiger-Nelson sous contrainte (544-4), de mon côté j'en propose une avec seulement quatre couleurs. Descendre jusqu'à trois semble impossible, mais cela reste à prouver. Solutions à retrouver sur le site.

547-1 Portion de lunule

Quatre angles d'attaque pour résoudre cette question. La lunule complète a une aire bien connue égale à l'aire du triangle isocèle rectangle. Une étude sur une moitié de la figure suffit. La façon la plus directe et la plus classique, utilisant la propriété de l'angle au centre et le fait que deux triangles de même base et de même hauteur ont la même aire, a été celle empruntée par Jean Lefort (Wintzenheim), Marie-Nicole Gras (Le Bourg-d'Oisans) et Yves Farcy (Saint-Pons-de-Thomières), ce dernier ayant illustré sa réponse de nombreuses figures pour aider à suivre son raisonnement. Gérard Anselme (Valleiry), Jean Moussa (Arcueil) et Jacques Vieulet (Ibos) ont choisi, par une méthode semblable, de montrer l'égalité des aires complémentaires, à savoir de la portion de lunule MLDC et du triangle NOI. Pierre Renfer (Saint-Georges-d'Orques) et Maurice Bauval (Versailles) ont utilisé les coordonnées polaires et le calcul intégral pour parvenir au résultat. Enfin, Ludovic Jany (Bolquère) a calculé explicitement les expressions des aires de la portion de lunule et du triangle pour établir leur égalité.

547-2 Fatale erreur

Tous les courriers reçus montrent qu'une infinité de solutions existe, chacun exhibant une ou plusieurs familles particulières. Seul Daniel Djament (Pré-Saint-Gervais) les a toutes réunies en deux familles infinies comportant chacune deux paramètres :

$$(b, q, r) = (nm, (mn - n - 1)m + 1, mn - n) \quad (1)$$

ou

$$(mn + 1, (mn - n + 1)m, nm + 1 - n) \quad (2)$$

avec $m, n \geq 1$.

Les nombres b et q pouvant être échangés avec cependant la restriction que r doit rester inférieur à b , contrainte qui disparaît avec q .

Ainsi Vincent Thill (Migennes) et Gérard Anselme (Valleiry) proposent la famille (1) avec le couple de paramètres $(m, n) = (3, n)$, Jean Moussa (Arcueil) et Maurice Bauval (Versailles) la famille (2) avec



$(m, n) = (2, n)$, Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques) et Patrick David (Cergy) les familles (1) et (2) avec $(m, n) = (2, n)$, Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans) la famille (1) avec $(m, n) = (m' + 1, n)$, Christophe Rivière (Dieppe) les familles (1) et (2) avec $(m, n) = (m' + 1, 2)$, $(1, n)$ et $(m, 1)$, $m' \geq 1$.

547-3 Partage d'un quadrilatère

Jean Moussa (Arcueil), Jean-Matthieu Bernat et Pascal Humberger (La Rochelle), Daniel Perrin (Orsay), Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques) et Gérard Anselme (Valleiry) proposent une construction dans le cas où la droite de partage passe par le côté opposé à [AD]. Dans le cas où cette droite coupe deux côtés consécutifs, Daniel Perrin et Jean-Matthieu Bernat présentent en plus une construction alternative. La majorité des solutions procèdent de l'idée d'obtenir un triangle de sommet P, de même aire que le quadrilatère, pour ensuite tracer la médiane issue de P. L'outil de la géométrie élémentaire principalement utilisé est celui qui assure que l'aire d'un triangle n'est pas modifiée quand un sommet se déplace parallèlement à sa base.

Marie-Nicole Gras (Le Bourg-d'Oisans) a cherché une solution en passant par des calculs de distances et d'aires. Cela lui a permis d'obtenir une construction simple quand la droite de partage coupe le côté [BC] mais l'expression obtenue dans les deux autres cas s'avère peu pratique pour la réalisation d'un tracé.

Enfin, comme à son habitude, Daniel Perrin, dans un courrier de quatorze pages, donne une solution très complète et argumentée des constructions qu'il présente. Il enchaîne ensuite sur une autre façon de réaliser ces tracés en utilisant une méthode de rectification. Sa communication s'achève par la présentation d'un texte inédit qu'il a rédigé en 2000 avec Jean-Claude Duperret et Jean-Pierre Richeton (président de l'APMEP 1996-1998) pour la commission Kahane dont ils étaient membres. Il y est question de ce partage proposé en situation de recherche et érigé en prototype.

547-4 Urne et jetons

La solution à cette question a été trouvée dans la plupart des cas en calculant la probabilité de l'évènement contraire, à savoir la probabilité de n'obtenir aucune paire de jetons complémentaires. Ainsi Pierre Renfer (Saint-Georges-d'Orques), Marie-Nicole gras (Le Bourg-d'Oisans) et Gérard Anselme (Valleiry) donnent la valeur minimale de 7 tirages pour avoir au moins 90 % de chances de tirer deux numéros complémentaires.

Jean Moussa (Arcueil) part sur une majoration des probabilités des évènements successifs, en affaiblissant le modèle pour simplifier les calculs, et obtient ainsi une minoration du nombre cherché. Il conclut que cet entier est au moins égal à 7.

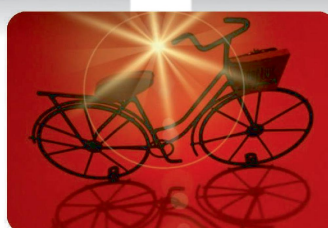
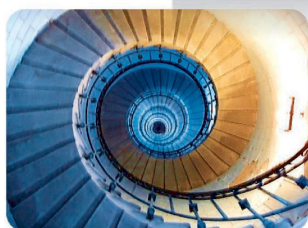
Toutes les contributions de ces auteurs sont consultables sur le site d'*Au fil des maths* à l'adresse : [onglet RÉCRÉATIONS puis suivre AU FIL DES PROBLÈMES](#).





Journées Nationales
du 21 au 24 octobre 2023

Maths en



Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public
« De la maternelle à l'université »

Sommaire du n° 549



Faites parler les nombres !

Éditorial

Opinions

Hommage à Pierre Legrand — Christiane Zehren

✦ Faites parler et écrire les nombres en unités de numération ! — Catherine Houdement & Frédéric Tempier

✦ Calculer ou faire parler les nombres ? — Éric Trouillot

✦ Nombre et suite de chiffres — Jean Toromanoff

✦ Construire la suite des nombres au cycle 1 — Serge Petit

Avec les élèves

Le pari des mois des anniversaires — Jean-François Kentzel

✦ Foot-thèque en cycle 3 — Sandrine Lemaire & Christine Monnoir

✦ Les premiers nombres, on en parle en PS — Laurence Le Corf

Les *sacamaths* — Nathalie Braun & Houria Lafrance

1 Ouvertures

3 Petite enquête sur être ou ne pas être un entier — François Boucher 58

Les amidakujis — Alice Ernoult & Stéphane Gaussent 65

L'aiguille de Buffon, encore et encore — Ivan Boyer & Karim Zayana 75

14 Récréations

Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 81

✦ La table d'addition magique — Sébastien Reb 84

Des problèmes dans nos classes — Valérie Larose 86

✦ Calcul sans peine — Olivier Rioul 88

Au fil du temps

Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau 90

Matériaux pour une documentation 92



CultureMATH

