

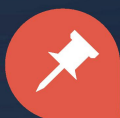
Le bulletin de l'APMEP - N° 549

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Juillet, Août, Septembre 2023

Faites parler les nombres ! ⁷



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>



Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents via une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufilesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est jointe la plaquette
Visages 2023-2024 de l'APMEP.

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Lionel PRONOST, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Éric ASTOUL, Nicolas CLÉMENT, Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL, Sixtine MARÉCHAL, Jean-Sébastien MASSET.

Équipe T_EXnique : Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Septembre 2023. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau



L'aiguille de Buffon, encore et encore

Tel le phénix des probabilités, ce grand classique des aiguilles de Buffon renaît cette fois-ci dans une version moderne conforme au programme de Terminale.

Ivan Boyer & Karim Zayana

Dans la lignée du paradoxe de Bertrand¹ [1] et des méthodes de Monte-Carlo [2], le problème de Buffon [3] appartient à la branche dite géométrique des probabilités. Énoncé en 1777, il fit l'objet de plusieurs démonstrations, volontiers techniques, parfois tortueuses, occasionnellement lacunaires ou fausses [4]. À l'aide d'un changement de paradigme, nous le traiterons ici avec le seul bagage mathématique d'un élève de Terminale [5, 6]. Notre approche, assez intuitive, sera complétée de simulations réalisées en Python. L'ensemble questionne l'approximation du nombre π , l'inégalité de concentration, l'histoire des sciences, la faisabilité d'une expérience, etc. et ne demande pour support que quelques croquis et scripts très simples. Aussi pourra-t-il servir de brique à la préparation du grand oral du futur bachelier sous la houlette de son professeur.

L'histoire revisitée

**Quelque chose vient de tomber
Sur les lames de ton plancher**
*C'est toujours le même film qui passe
T'es toute seule au fond de l'espace
T'as personne devant...*

C'est en portant un cigare [7] à ses lèvres que Francis laissa choir une boîte de 240 allumettes. À peine son contenu s'éparpillait-il en gros tas sur le parquet que Spinee (prononcer Spini) [8], le fidèle compagnon du chanteur, y donnait un bon coup de patte. Le labrador achevait ainsi de tout disperser dans la pièce. L'artiste aux quinze disques d'or, à l'époque inconnu du grand public, sortit pelle et balai. Tout en nettoyant le studio, fredonnant la mélodie qui ferait bientôt sa gloire [9], il entreprit de compter chaque allumette gisant à cheval sur deux lattes. Patiemment. Encore et encore. Il en (re)trouva 54, qu'il rapporta au total de 240. Soit la fraction

$$\frac{54}{240} = 0,225$$

un nombre que Francis trouva étonnamment proche du quotient

$$\frac{2\ell}{\pi a} \approx 0,2122$$

où $\ell = 5$ cm désignait la taille des allumettes et $a = 15$ cm la largeur des lattes.

Sans le savoir, notre vedette nationale venait de reproduire l'expérience que Buffon² imaginait quelque deux-cent-cinquante ans plus tôt avec des aiguilles.

1. Joseph BERTRAND, mathématicien français du XIX^e siècle. Outre son paradoxe probabiliste, il s'est intéressé aux séries et intégrales qui portent son nom ainsi qu'à la distribution des nombres premiers.

2. Georges de BUFFON, naturaliste français du XVIII^e siècle. Il s'est intéressé aux mathématiques pour leurs applications en médecine et en sciences sociales. Outre l'expérience de l'aiguille décrite ici, il est également connu pour avoir tenté de dater la Terre en étudiant le refroidissement de boulets chauffés à blanc.



Modélisation

Emboîtons les pas de Francis et du comte de Buffon : à notre tour, penchons-nous sur la probabilité qu'une aiguille de longueur ℓ tombée sur le sol rencontre une rainure. Ajoutons comme hypothèse l'inégalité $\ell < a$, du reste plausible et satisfaite au paragraphe précédent. Aussi, quand elle rencontre une rainure, l'aiguille n'en rencontre-t-elle qu'une, ce qu'on peut coder par une variable aléatoire témoin R à valeurs dans la paire $\{0, 1\}$. Signalons à toutes fins utiles que, le cas échéant, la rencontre entre l'aiguille et la rainure peut être de trois types, recensés sur la figure 1 :

- l'aiguille croise franchement la rainure en l'enjambant. Elle est donc à cheval sur deux lattes ;
- l'aiguille s'étend sur la rainure ;
- l'aiguille n'est au contact de la rainure que par l'une de ses extrémités.

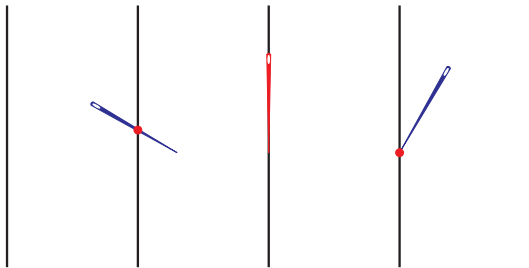


Figure 1. Les trois croisements possibles. Les deux derniers sont négligeables au sens probabiliste du terme.

Toutefois, si l'on néglige l'épaisseur des traits, nous pourrions considérer que les deux dernières éventualités ne sont pas vraisemblables : on les qualifie justement de négligeables et leur probabilité est nulle.

Ces informations en tête, il s'agit donc d'établir que

$$\mathbb{P}(R = 1) = \frac{2\ell}{a\pi}. \quad (1)$$

Comme R est une variable de Bernoulli³, cette formule revient à prouver que

$$E(R) = \frac{2\ell}{a\pi}. \quad (2)$$

Ceci s'avérera plus aisé car nous bénéficierons, à bon escient, des propriétés de l'espérance.

Le parquet sera vu comme un réseau au motif périodique. L'aiguille, une fois lancée, chute n'importe où à sa surface, et dans une direction absolument quelconque.

Le modèle habituel consiste à adjoindre à l'aiguille deux paramètres pour en décrire la position (modulo la lame) : un angle θ et un écart x comme sur la figure 2, tous deux uniformément distribués — le premier, par symétries-translations, sur l'intervalle $]0; \frac{a}{2}]$ et le second, pour la même raison, sur l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}]$.

3. Jakob BERNOULLI vécut en Suisse au XVII^e siècle et fut le premier d'une lignée de mathématiciens.

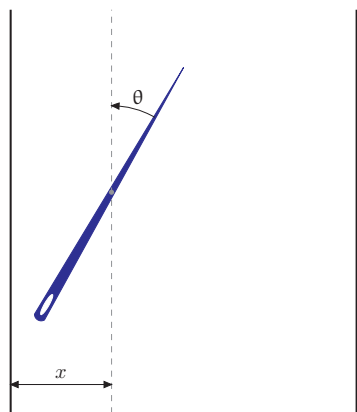
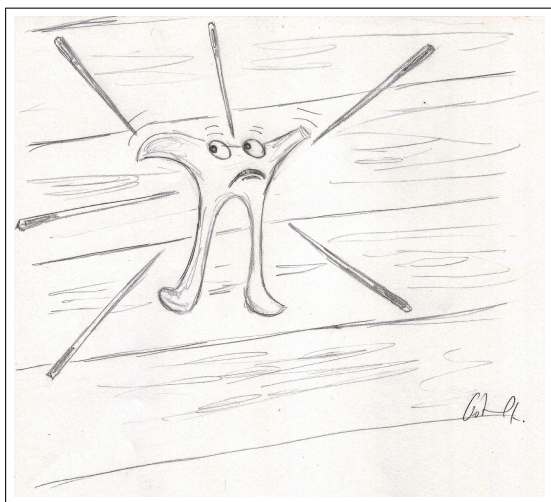


Figure 2. La mise en équation de la preuve « classique ». Le paramètre θ mesure l'écartement angulaire de l'aiguille à la direction des lames. Le paramètre x mesure l'écartement du centre de l'aiguille à la rainure la plus proche.

Nous allons raisonner autrement, à partir d'une aiguille fixe et en faisant plutôt vibrer le sol de façon totalement erratique (translations, rotations). Les mouvements étant relatifs, cette approche duale revient au même.



La preuve

Adoptons toujours notre point de vue : c'est donc le parquet qui tremble (par la pensée) un peu dans tous les sens. Mais imaginons cette fois deux aiguilles fixes, en suspension (de sorte qu'elles n'accrochent pas au sol). Dans un premier temps du moins, ne prêtons aucune attention à leurs placements respectifs. Notons R_1 et R_2 les variables aléatoires binaires associées à chacune.

Bien entendu, elles peuvent être étroitement dépendantes. Quoi qu'il en soit, leurs espérances sont égales à l'espérance générique $E(R)$ et par linéarité de l'espérance nous aurions donc

$$E(R_1 + R_2) = 2E(R).$$

Ce qui vaut pour 2 aiguilles vaudrait pour n . Avec n aiguilles fixes et sans même nous préoccuper de leur disposition, nous aurions cette fois

$$E(R_1 + R_2 + \dots + R_n) = nE(R). \quad (3)$$

Juxtaposons maintenant les n aiguilles habilement, comme autant de côtés d'un polygone régulier.

Ce dernier s'inscrit naturellement dans un cercle (figure 3). Son périmètre étant voisin de $n\ell$, son diamètre D_n vaut, en bonne approximation :

$$D_n \approx \frac{n\ell}{\pi}.$$

Plus précisément et avec un zeste de trigonométrie,

$$D_n = \frac{\ell}{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}. \quad (4)$$

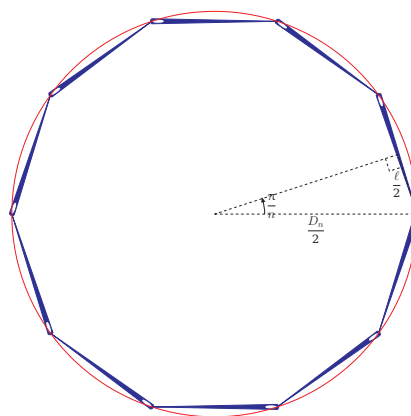


Figure 3. Disposition des aiguilles en cercle. Dans notre approche, les aiguilles sont statiques. C'est le sol qui bouge aléatoirement.

Posons le polygone et son cercle circonscrit sur le sol. Dans la mesure où aucun côté ni sommet n'est vraisemblablement pris dans une rainure, la somme

$$R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

représente exactement le nombre de fois que le



polygone est intercepté. C'est aussi « presque » le nombre de fois que le cercle rencontre le parquet : il peut y avoir deux ou quatre intersections de plus, lorsque les premières et dernières rainures intersectent un arc, sans couper d'aiguille, comme l'illustre la figure 4.

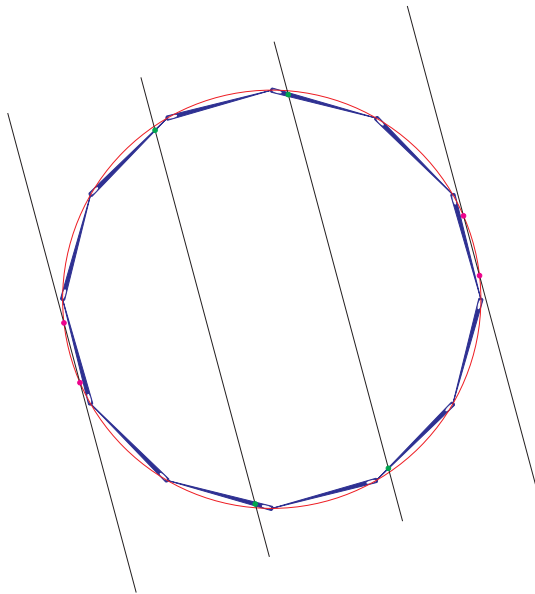


Figure 4. Les points en magenta ne correspondent pas à des intersections d'aiguilles, contrairement aux verts.

Il y a l'espace pour $\frac{D_n}{a}$ lattes sous le cercle, ce qui représente aussi « presque » le nombre entier de rainures recouvertes, qui l'approche par défaut ou par excès d'une unité au plus. En le doublant, on estime alors d'une deuxième façon le nombre de fois que le cercle est rencontré. En joignant les deux bouts nous obtenons

$$R_1 + R_2 + \dots + R_n = \frac{2D_n}{a} + \varepsilon \quad (5)$$

où le réel ε agrège une incertitude comprise entre -6 et 2 . Si bien que

$$\frac{1}{n} \times (R_1 + R_2 + \dots + R_n) = \frac{2\ell}{an \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} + \frac{\varepsilon}{n}. \quad (6)$$

Passons à l'espérance ainsi qu'à la limite.

Automatiquement,

$$\frac{1}{n} E(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{2\ell}{an \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)} \rightarrow \frac{2\ell}{a\pi}.$$

Comme annoncé : $\mathbb{P}(R = 1) = E(R) = \frac{2\ell}{a\pi}$

phénomène que Francis constata donc en vertu de la loi des grands nombres.

Et si l'on change la disposition ?

Nous l'avons souligné, la disposition initiale des aiguilles ne modifie pas le résultat. Elle facilite en revanche plus ou moins les calculs à mener. Dans la configuration du problème, le cercle cumulait deux atouts : une invariance par translation ainsi qu'une invariance par rotation. Si l'on met par exemple les aiguilles en file indienne, on conserve le premier avantage mais on perd le second. On doit donc paramétrer le tremblement du sol avec l'angle $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}]$ du parquet comme on le voit sur la figure 5.

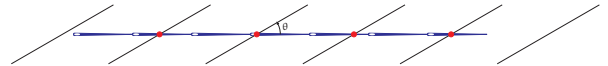


Figure 5. L'angle θ entre le parquet et les aiguilles, ici disposées en ligne droite.

S'il est ici plus simple de compter les intersections, au nombre de $\frac{n\ell \sin(\theta)}{a} + \varepsilon$ où ε est borné, nous n'échappons plus à l'intégration d'une densité, certes uniforme. On a

$$\frac{1}{n} (R_1 + R_2 + \dots + R_n) = \frac{\ell \sin(\theta)}{a} + \frac{\varepsilon}{n}$$

puis, comme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ell \sin(\theta)}{a} \frac{d\theta}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\ell}{a\pi}$$

on retrouve le même résultat quand n tend vers $+\infty$. Ouf !

L'approximation de π

L'espérance $E(R) = \mathbb{P}(R = 1) = \frac{2\ell}{a\pi}$ de R maintenant démontrée, estimons-la tout en contrôlant son erreur et son risque. Ceci permettra (tout théoriquement) d'approcher $\frac{1}{\pi}$ puis π .



Considérons à cet effet n épreuves R_i , $1 \leq i \leq n$, de même loi que R .

Linégalité de Bienaymé⁴-Tchebychev⁵ fournit alors l'inégalité dite de concentration

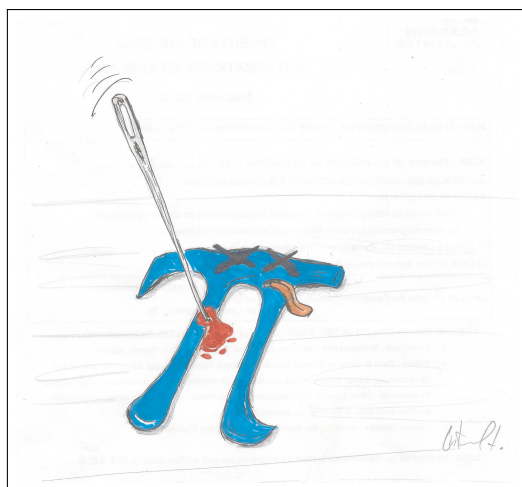
$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{R_1 + R_2 + \dots + R_n}{n} - \frac{2\ell}{a\pi}\right| \geq \delta\right) \leq \frac{V}{n\delta^2} \quad (7)$$

où

$$V = \frac{2\ell}{a\pi} \left(1 - \frac{2\ell}{a\pi}\right)$$

désigne la variance (commune) des R_i .

La propriété (7) exige cependant l'indépendance des variables $R_1, R_2, \dots, R_n$. Il convient donc de revenir à la première expérience, quand les aiguilles sont tirées au hasard encore et encore et que le sol est stable ou bien à la deuxième, quand il n'y a qu'une aiguille et que le sol s'en dérobe une multitude de fois.



En fixant le risque $\frac{V}{n\delta^2}$ à 5 %, c'est-à-dire en choisissant $\delta = \frac{\sqrt{20V}}{\sqrt{n}}$, on obtient, via la moyenne empirique $\frac{R_1 + R_2 + \dots + R_n}{n}$, une approximation de $\frac{2\ell}{a\pi}$ à la précision de $\frac{\sqrt{20V}}{\sqrt{n}}$ et avec 95 % de chance.

On dispose donc d'un algorithme probabiliste dont on dit qu'il approche $\frac{2\ell}{a\pi}$ en $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Cela signifie, entre autres, que multiplier le nombre d'aiguilles par 100 fait gagner une décimale dans 95 % des cas.

Puisque l'on peut choisir ℓ et a , on obtient une valeur approchée de $\frac{1}{\pi}$ puis de π (on perd une décimale dans l'inverse⁶).

```
l=5,a=15
```

```
from numpy import pi, sin
from numpy.random import random
from matplotlib.pyplot import hist, show
```

```
# une aiguille
```

```
def buffon():
    x=random()*a/2
    theta=random()*pi/2
    if sin(theta)*l/2 > x:
        return 1
    return 0
```

```
# approximation de pi avec n aiguilles
```

```
def approx(n):
    r=0
    for i in range(n):
        r += buffon()
    return n/s*2*l/a
```

```
# répartition de N approximations de pi
# avec n aiguilles
```

```
def distrib(N,n):
    res = []
    for i in range(N):
        res.append(approx(n))
    hist(res,20,density=True)
    show()
```

4. Irénée-Jules BIENAYMÉ, mathématicien français des XVIII^e et XIX^e siècles. Il s'est notamment intéressé aux processus stochastiques.

5. Pafnouti TCHEBYCHEV, mathématicien russe du XIX^e siècle. Son œuvre, immense, touche aux probabilités, aux polynômes ou encore à la théorie des nombres.

6. Si $\left|s - \frac{1}{\pi}\right| \leq \varepsilon$ alors $\left|\frac{1}{s} - \pi\right| \leq \frac{\pi}{s} \varepsilon$ et $\frac{\pi}{s} \approx \pi^2 \approx 10$.



Ainsi, pour espérer égaler la précision de 10^{-3} connue des Grecs, Francis devra dépenser de l'ordre de... 334 millions d'allumettes ⁷.

Encore faudra-t-il se contenter d'une valeur probable à 95 %... Il va sans dire que les cent mille milliards de décimales de π connues en 2023 s'obtiennent par d'autres méthodes !

Références

- [1] Victor Rabiet. « Du vocabulaire courant en probabilité à une axiomatisation rigoureuse ». In : CultureMath (2020).
- [2] Walter Appel. *Mathématiques pour la physique et les physiciens* ! H & K, 2017.
- [3] Richard Isaac. *The Pleasure of Probability*. Springer, 1996.
- [4] « Aiguille de Buffon ». In : Wikipédia (2023).
- [5] Ministère de l'Éducation nationale. « Programme de l'enseignement de spécialité de mathématiques de la classe de terminale de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n° 8 du 25 juillet 2019* (2019).
- [6] Ministère de l'Éducation nationale. « Programme de l'enseignement optionnel de mathématiques complémentaires de la classe de terminale de la voie générale ». In : *Bulletin officiel spécial n° 8 du 25 juillet 2019* (2019).
- [7] « Cannabis ou pastis ? Francis Cabrel s'exprime ». In : *Le Parisien* (2012).
- [8] « Le labrador de Francis Cabrel aurait été opéré ». In : *Médiamass* (2022).
- [9] Francis Cabrel. « Encore et encore ». In : *Photos de voyage* (1985).



Ivan Boyer est professeur en MPSI au lycée Champollion (Grenoble).

Karim Zayana est inspecteur général de l'éducation, du sport et de la recherche (groupe des mathématiques) et professeur invité à l'institut polytechnique de Paris (Palaiseau).

ivan.boyer@ac-grenoble.fr

karim.zayana@igesr.gouv.fr

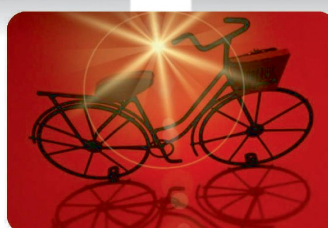
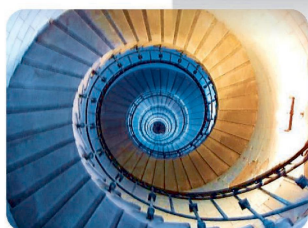
© APMEP Septembre 2023

7. On veut $\delta = 10^{-4}$ et $\frac{V}{n\delta^2} = 5\%$, ce qui conduit à $n = 20V \cdot 10^8 \approx 334 \cdot 10^6$ avec les valeurs de ℓ et a , et donc du paramètre $p = E(R)$ puis de la variance V qu'utilise l'estimation de Francis.



Journées Nationales
du 21 au 24 octobre 2023

Maths en



Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public
« De la maternelle à l'université »

Sommaire du n° 549



Faites parler les nombres !

Éditorial

Opinions

Hommage à Pierre Legrand — Christiane Zehren

✦ Faites parler et écrire les nombres en unités de numération ! — Catherine Houdement & Frédéric Tempier

✦ Calculer ou faire parler les nombres ? — Éric Trouillot

✦ Nombre et suite de chiffres — Jean Toromanoff

✦ Construire la suite des nombres au cycle 1 — Serge Petit

Avec les élèves

Le pari des mois des anniversaires — Jean-François Kentzel

✦ Foot-thèque en cycle 3 — Sandrine Lemaire & Christine Monnoir

✦ Les premiers nombres, on en parle en PS — Laurence Le Corf

Les *sacamaths* — Nathalie Braun & Houria Lafrance

1 Ouvertures

3 Petite enquête sur être ou ne pas être un entier — François Boucher

3 Les amidakujis — Alice Ernoult & Stéphane Gaussent

6 L'aiguille de Buffon, encore et encore — Ivan Boyer & Karim Zayana

14 Récréations

22 Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt

✦ La table d'addition magique — Sébastien Reb
Des problèmes dans nos classes — Valérie Larose

39 ✦ Calcul sans peine — Olivier Rioul

Au fil du temps

39 Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau

42 Matériaux pour une documentation



CultureMATH

