Le bulletin de l'APMEP - N° 549

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Juillet, Août, Septembre 2023

Faites parler les nombres !

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr

Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

AU FIL DES MATHS

À ce numéro est jointe la plaquette
Visages 2023-2024 de l'APMEP.

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : *Claire PIOLTI-LAMORTHE.*

Responsable coordinatrice de l'équipe : *Cécile KERBOUL.*

Rédacteurs : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY.*

« Fils rouges » numériques : *Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Lionel PRONOST, Agnès VEYRON.*

Illustrateurs : *Éric ASTOUL, Nicolas CLÉMENT, Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL, Sixtine MARÉCHAL, Jean-Sébastien MASSET.*

Équipe TEXnique : *Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD.*

Maquette : *Olivier REBOUX.*

Correspondant Publimath : *François PÉTIARD.*

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Septembre 2023. ISSN : 2608-9297.
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

APMEP

Petite enquête sur…
être ou ne pas être…

C'est le grand retour de la petite enquête de François Boucher. Ce numéro ouvre une série de trois petites enquêtes sur la nature des nombres. On commence par le plus simple (?) : les nombres entiers.

François Boucher

Présentation des enquêtes

L'irrationalité de $\sqrt{2}$, comme paradigme de la démonstration par l'absurde, est devenue un passage obligé de la classe de Seconde. Puis la pépite sombre dans l'oubli.
Or, la scolarité organise la fréquentation de plusieurs systèmes de nombres, ce qui permet de varier les problèmes du type $x \in E \setminus F$ avec les connaissances supposées d'un lycéen, voire d'un collégien.
Nous souhaitons montrer comment des problèmes *a priori* simples d'accès pour lesquels la dévolution aux élèves a quelque chance de se réaliser génèrent des prolongements mathématiques, éventuellement non triviaux, tout en restant élémentaires, c'est-à-dire ne demandant *en ultime recours* pas plus que l'arithmétique ou l'analyse de Terminale. Ceci n'empêche pas les raisonnements d'être subtils, subtilités souvent implicites (avec raison parfois), mais devant bien au final être élucidées.
Le but poursuivi est aussi de faire fonctionner les diverses représentations des diverses sortes de nombres — en particulier les représentations canoniques et leur unicité d'emploi si délicat — au travers de problèmes d'appartenance ou de non-appartenance à certains systèmes de nombres, et améliorer ainsi, peut-être, le sens des nombres. Peut-être, car il est certain que les enseignants, face à l'impossible maîtrise de l'écriture symbolique des mathématiques par leurs élèves, doivent se sentir bien proches de Sisyphe.
Si la voie privilégiée d'étude d'un problème du type $x \notin F$ est le raisonnement par l'absurde, d'autres voies sont possibles. Le registre principal de fonctionnement est numérique mais les registres géométrique, algébrique et fonctionnel peuvent être sollicités.
Conformément à l'usage [1], nous confondrons dans le texte un nombre et ses diverses représentations.
Cette petite enquête comportera trois volets intitulés « entier » (cet article), « décimal » et « rationnel » (dans des numéros ultérieurs).

1. Parfois regrettable mais inévitable.

Entier ou pas entier ?

Mais qu'est-ce qu'un nombre entier ? Ces objets n'ont-ils pas toujours été là, échappant à toute définition, se confondant avec l'image auditive de la comptine : « un », « deux », « trois », ..., traduits par les graffitis 1, 2, 3, ... ?

La reconnaissance de la qualité d'entier pour un nombre particulier ne peut-elle être acquise que par son écriture décimale ? Mais alors comment répondre aux questions :

« $2^{2^{2023}}+1$ est-il entier ? Et $\dfrac{3^{64}-1}{3^{32}+1}$? »

Comment la phrase « soit n un entier naturel » peut-elle être comprise et l'information sur n bien utilisée dans la question posée, par exemple : « $\dfrac{n\,(n+1)(n+2)}{6}$ est-il entier ? ».

Un objectif, terminal certes, n'est-il pas de concevoir $\mathbb{N}$ non pas comme un gros « sac d'objets » appelés des entiers, mais comme un système organisé, structuré, d'abord par une égalité et des opérations, et ensuite par les relations d'ordre (bon ordre) et de divisibilité ? Tout cela se met en place lentement, avec une institutionnalisation incertaine, voire inutile si ces propriétés ne sont pas sollicitées de façon pertinente dans des problèmes.

Les entiers sont susceptibles de représentations variées : géométrique (les nombres figurés ou la simple graduation régulière d'une droite), l'écriture fournie par la numération de position en base (dix et possiblement deux) avec unicité, le produit de puissances de nombres premiers avec unicité, des formules diverses, les représentations fournies par l'arithmétique modulaire dont la plus simple est celle du pair ($2\,p$) et de l'impair ($2\,p+1$). Cette représentation d'un entier *indéterminé mais qualifié*, nécessaire assez vite, est bien sûr problématique.

Dans les quelques exemples qui suivent, des nombres *particuliers* sont donnés par une écriture qui les montre *a priori* comme éléments d'un surensemble de $\mathbb{N}$; d'où la pertinence de la question de leur éventuelle entièreté.

$a = \dfrac{2\,388\,325}{902\,702} \times \dfrac{2\,902\,413}{1\,097\,009}$. Et $b = \dfrac{1\,580\,050}{476\,403} \Big/ \dfrac{500\,283}{150\,841}$?

Les fractions proposées sont des réduites consécutives de $\sqrt{7}$ et $\sqrt{11}$; les réduites d'un irrationnel forment une suite de rationnels, donnés par un algorithme simple, rationnels qui, en certain sens, l'approximent au mieux [2].

L'utilisation des calculatrices est possible (à dessein) et peut, selon leur capacité, fournir des résultats distincts ; une calculatrice « collège » *affiche* 7. pour la première et 1. pour la seconde. Avec une calculatrice utilisant une arithmétique plus performante, on peut obtenir par une technique classique les différences

$$7-a_{\text{calc}} \approx 10^{-12} \text{ et } 1-b_{\text{calc}} \approx 0{,}4\cdot 10^{-11}.$$

Dans tous les cas, il y a doute qu'il convient éventuellement de susciter, et cela d'autant plus qu'il disparaîtrait avec des réduites moins précises [3], mais on dispose ainsi de candidats et même des seuls candidats possibles pour des valeurs entières de a et b — ce qui peut être l'objet d'un joli débat : 7 pour a et 1 pour b. Divers arguments très élémentaires permettent de les rejeter, certains utilisables d'entrée d'ailleurs ; *a posteriori* est souvent le propre de la recherche.

Bien sûr une calculatrice utilisant une arithmétique entière exacte « tue » le problème. Quoique, ce pourrait être une bonne circonstance pour prendre conscience de toute l'information implicite portée par l'expression « fraction irréductible ».

$1\,234\,567\,892{,}2 \times 9\,876\,543\,215{,}5$

La question « entier ou non ? » est susceptible d'approches diverses : poser la multiplication et s'apercevoir (plus ou moins rapidement) que le calcul complet n'est pas utile, introduire l'écriture « fraction décimale » des décimaux et examiner l'éventuelle simplification par 100 — qui nécessite une simplification par 4 et par 25 —, diviser le pre-

2. Pour une information concise, consulter l'article « fraction continue » de `Wikipedia`.
3. Voir la version numérique de la petite enquête sur la modélisation dans le numéro 543 d'*Au fil des maths*.

mier par 2 et multiplier le second par 2 (décomposition multiplicative), faire la division euclidienne des deux décimaux par dix[4] (décomposition additive)... Bien sûr, le bon prolongement naturel est de se demander si le produit de deux décimaux non entiers peut être entier.

Que peut faire un lycéen pour aborder cette question ? Une preuve sur exemple générique serait déjà une étape ; nous en reparlerons longuement dans le volet « décimal ».

$a = \dfrac{1\,111\,111\,111^2 - 1}{24}$. Et $b = \dfrac{111\,111\,111\,111^2 - 1}{24}$?

On a là une question plutôt classique de divisibilité mais qui ne demande que la perception des propriétés des tables de deux et de trois. L'utilisation de grands nombres sert à freiner (?) le réflexe calcul donc calculatrice (mais certes, il y a `Python`) ; lorsque l'on veut simplifier, une bonne idée est de factoriser, puis de comprendre, à l'aide au besoin d'autres exemples, pourquoi dans un cas ça marche mais pas dans l'autre. L'utilisation de répunits[5] peut servir cela.

Une fraction peut être entière ! Il faut bien supposer disponible le fait que $\frac{p}{q}$ est entier si et seulement si q divise p ; dit naïvement, on peut simplifier par q. En revanche, il n'est pas nécessaire que $\frac{p}{r}$ ou $\frac{q}{r}$ soit entier pour que $\frac{pq}{r}$ le soit ; toutefois, on a bien une condition nécessaire et suffisante si r est premier. En revanche, il suffit bien que... Toutefois, le fait que q et r divisent p n'est pas une condition suffisante pour que $\frac{p}{qr}$ soit entier. Mais, si... Voilà quelques charmantes questions tous niveaux qui peuvent apparaître en cours de route et qui sont significatives du travail sur la simplification des fractions (déguisant le travail sur la divisibilité). La factorisation des entiers en produit de nombres premiers (acquise au collège) permet de comprendre tout cela en taisant au besoin le rôle de l'unicité.

Les calculatrices ordinaires échouent à calculer exactement $1\,111\,111\,111^2$; mais on peut tout de même poser la multiplication et s'apercevoir que, finalement, tout est affaire de soin et de patience. Il est aussi loisible de travailler en base B = cent-mille codée décimal[6] ce qui permet à *toute* calculatrice de retrouver la fonction de son nom : il suffit de calculer $11\,111^2$ et de développer $(B+1)^2$ — sans additionner — avant de conclure avec une distributivité à gauche. Reste à répondre aux deux questions : peut-on simplifier par 8 ? Puis par 3 ? Le collège fournit les critères utiles[7]. On est alors essentiellement dans une tâche technique.

Mais il est possible d'utiliser ces critères habilement en évitant des calculs bien inutiles.

Reconnaître une forme usuelle et factoriser est plus prometteur :

$$1\,111\,111\,111^2 - 1 = 1\,111\,111\,110 \times 1\,111\,111\,112.$$

Les règles de divisibilité du collège donnent la simplification par 6 avec le premier facteur et par 4 avec le second ; donc a est entier comme produit d'entiers. Possiblement, la petite lumière du « nombre de 1 » du répunit a pu s'allumer.

En revanche

$$111111111111^2 - 1 = 111111111110 \times 111111111112.$$

Dans ce cas, aucun des deux facteurs n'est divisible par 3 et comme 3 est premier, b n'est pas entier. La clef est le nombre de 1 du répunit initial : s'il est multiple de 3, il n'y aura pas de simplification par 3 possible pour chaque facteur et une belle négation permet de conclure. S'il ne l'est pas, un des deux facteurs le sera nécessairement car... Il est utile d'effectivement comprendre ces liens sur ces exemples ; nul besoin de la moindre formalisation pour cela : le français, même maladroit, fait l'affaire.

L'exemple suivant demande d'autres capacités de raisonnement et de traitement de l'information

4. Écrire $1\,234\,567\,892{,}2 = 1\,234\,567\,890 + 2{,}2$; ensuite, il y a un produit $(a+b)(c+d)$ — à penser plus qu'à calculer — en n'oubliant pas la question posée.

5. Un répunit est un nombre entier dont l'écriture décimale ne comporte que des 1. Ce sont des vedettes des mathématiques récréatives au sujet desquels toutes sortes de problèmes peuvent être posés, dont certains toujours ouverts ; par exemple, existe-t-il une infinité de répunits premiers ?

6. Cela signifie que les cent-mille signes dont on a besoin dans une telle base sont les mots : 0, 1, ..., 99 999.

7. En ignorant le problème du « divisible par 8 et par 3, donc par 24 ».

portée par les écritures algébriques ; une exploration préalable sous forme de question ouverte est souhaitable.

$c = \dfrac{p^2-1}{24}$ est entier si et seulement si p n'est ni multiple de 2, ni multiple de 3.

Le « ni… ni… » est à décoder.

Penser pair/impair dans un problème d'arithmétique est une saine attitude. Si p est pair alors… donc c n'est pas entier. Si p est impair, poser $p = 2\,q + 1$ est envisageable et conduit à $p^2 - 1 = (2\,q)(2\,q+2) = 4\,q\,(q+1)$; si la divisibilité par 4 est patente, le « ha ha » de la compréhension peut tarder à se manifester pour la divisibilité par 8. L'examen de la table de 2, ou une attention dirigée sur le produit $q\,(q+1)$ peut être féconde y compris pour la suite.

Pour la simplification par 3, en n'oubliant pas l'hypothèse sur p, un travail sur le $q(q+1)$ est laborieusement possible ; mais un retour à la factorisation $(p-1)(p+1)$ fournit la clef contenue dans la table de trois : parmi trois nombres consécutifs, un (et un seul) est multiple de trois ; si ce n'est pas p, c'est donc… Et, rêvons à un bel *a posteriori* : $2q$, $2q+1$ et $2q+2$ sont trois entiers consécutifs, et $2q+1$ est, par hypothèse, non multiple de trois donc…

Grande richesse dans ce problème, richesse qui a peu de chance d'apparaître dans une décomposition en multiples sous-questions.

Ce type de problèmes peut être multiplié à l'envie, une exploration numérique permettant de faire des conjectures et de lancer des défis ; par exemple :

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ ou } \frac{n^2(n^2-1)(n^2-4)}{360}$$

sont entiers quel que soit n, exemples qui prolongent bien ce qui précède ; le premier est particulièrement intéressant : la divisibilité par 3, accessible à un collégien, a pu mettre en échec des étudiants, ne disposant pas du calcul modulaire il est vrai[8]. Au lycée, d'autres approches, plus savantes, peuvent être envisagées : récurrence, combinatoire… Affirmons clairement que la récurrence naïve s'appuyant sur des « ainsi de suite » n'a pas besoin du label « Peano-compatible » pour fonctionner tôt ; le modèle des dominos est déjà suffisant. Certes, ce n'est que de l'infini potentiel.

Une autre direction de généralisation est de faire le lien avec les théorèmes de Fermat et d'Euler, généralisation du précédent : si a est premier avec n alors n divise $a^{\varphi(n)} - 1$ où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers premiers avec n et inférieurs à n. Il est alors facile d'inventer des exemples.

Des arguments combinatoires, toujours redoutables mais bien élégants, peuvent être convoqués : un entier peut parfois être interprété comme un nombre d'objets qui fait intervenir dans l'une de ses écritures un quotient. On pense bien sûr au célèbre « lemme des bergers »[9] : pour compter les moutons, compter les pattes et diviser par quatre, le problème étant souvent d'identifier moutons et pattes.

L'exemple du coefficient binomial $\dbinom{n}{p}$ est classique, celui de $\dfrac{a^p - a}{p}$ (p premier) l'est moins : c'est le nombre de bagues circulaires différentes serties de p pierres avec a sortes de pierres et non monolithiques ; reste à compter les pattes et à comprendre pourquoi nos moutons ont p pattes.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{281}.$$

Observons que 281, soixantième nombre premier, est assez grand pour décourager les velléités d'utilisation de la calculatrice[10]. Pourtant, réduire $s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $s_3 = s_2 + \frac{1}{5}$, etc. s'avère bien utile en attirant l'attention sur la parité du dénominateur

8. Et n'ayant pas travaillé le problème $\dfrac{p^2-1}{24}$.
9. Appellation introduite, semble-t-il, par N. Bourbaki.
10. Quoique… ; remplacer alors 281 par 4 409, le six-centième.

et la propagation du facteur 2 au dénominateur. Il suffit alors d'avoir l'audace de réduire au même dénominateur *en pensée*, toutes facultés d'observation en alerte : pour accéder à la parité d'une somme ou d'un produit, effectuer le calcul aveuglément et réfléchir après n'est pas la meilleure méthode.

Les réponses négatives spontanées irréfléchies sont inévitables — « quand on ajoute des fractions, on trouve une fraction » — et il est bon d'avoir disponible, par exemple, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$.

Face à un problème perçu *a priori* complexe par sa « taille », une bonne idée est de tenter d'étudier des cas particuliers. Calculons naïvement, mais pas aveuglément :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3+2}{2\times 3}=\frac{\text{impair}+\text{pair}}{\text{pair}}=\frac{\text{impair}}{\text{pair}}\notin\mathbb{N}$$

avec une compréhension paresseuse sur le $\notin$. Certes, les égalités ci-dessus traduisent ou suggèrent un cheminement de la pensée sans doute peu commun : le fameux « pas de côté ». On imagine plus un calcul mécanique conduisant à $\frac{5}{6}$, appel à la calculatrice dont l'affichage permettra d'asserter : « ce n'est pas entier ».
Donc, continuons

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}&=\frac{3\times 5+2\times 3+2\times 5}{2\times 3\times 5}\\&=\frac{\text{impair}+\text{pair}}{\text{pair}}=\frac{\text{impair}}{\text{pair}}\notin\mathbb{N}\end{aligned}$$

en observant que l'imparité du numérateur peut s'obtenir sans effectuer le calcul.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}&=\frac{\overbrace{3.5.7}^{\text{impair}}+\overbrace{2.5.7+2.3.7+2.3.5}^{\text{pair}}}{2.3.5.7}\\&=\frac{\text{impair}+\text{pair}}{\text{pair}}=\frac{\text{impair}}{\text{pair}}\notin\mathbb{N}\end{aligned}$$

À ce stade, il y a bien un invariant (*a priori* inattendu) qui apparaît. Un banal « et ainsi de suite jusqu'à 281 » n'est-il pas suffisant surtout s'il est proposé par un élève de Seconde ? Bien sûr, il serait satisfaisant d'être capable d'écrire (avec quelques intermédiaires omis ici et une maîtrise du calcul fractionnaire sans doute « peu commune »)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\dots+\frac{1}{281}=\dots\\&=\frac{\overbrace{2A+1}^{\text{produit d'impairs}}\quad+\quad\overbrace{2B}^{\text{somme de pairs}}}{2C}\end{aligned}$$

avec A, B, C entiers ; c'est un apprentissage de l'écrit à faire. En Terminale, niveau auquel la fréquentation de la récurrence comme outil de démonstration a commencé (ouf), peut-être est-il possible de voir apparaître

$$\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right]+\frac{1}{11}=\frac{\text{impair}}{\text{pair}}+\frac{1}{11}=\cdots$$

qui constituerait un début de validation de l'« *ainsi de suite* » précédent. On observera que la preuve est directe.

Une démonstration par l'absurde est possible, très simple, mais demande aussi de la prise d'initiative dans la manipulation des écritures pour faire naître la contradiction (voir ci-dessous).

Apparaît aussi un point particulier inattendu : seule compte l'imparité des dénominateurs à partir du 3 et nullement leur primalité !

Le problème rebondit si on supprime le $\frac{1}{2}$. La clef de la réussite précédente, c'est une « algèbre » du pair et de l'impair qui fonctionne sans doute implicitement :

+	pair	impair
pair	pair	impair
impair	impair	pair

×	pair	impair
pair	pair	pair
impair	pair	impair

Mais percevoir que « pair » signifie « de la forme $2p$ » et « impair » signifie « de la forme $2p+1$ » est utile pour aller plus loin. Qualifions de 3-pair (forme $3p$) les multiples de 3 et de 3-impair (forme $3p+1$ ou $3p+2$ ou $3p-1$ d'ailleurs) les non multiples[11] de 3 ; on dispose alors d'une algèbre similaire :

+	3-pair	3-impair
3-pair	3-pair	3-impair
3-impair	3-impair	?

×	3-pair	3-impair
3-pair	3-pair	3-pair
3-impair	3-pair	3-impair

11. Vocabulaire emprunté au mathématicien John Conway, magicien des nombres et des jeux.

Dès lors, 3 peut jouer le même rôle que 2 pour valider $\sum_{h=2}^{n}\frac{1}{p_h}$ non-entier, p_h désignant le h-ième nombre premier.
Et en poursuivant, il apparaît que n'importe quel nombre *premier* peut jouer ce rôle, ceci parce que tous les nombres sont premiers, donc par exemple le produit $3\times5\times7\times13\times\cdots\times281$ n'est pas un multiple de 11. Et, en poursuivant encore la réflexion, 281 peut jouer le même rôle mais l'écriture *montre* alors (de façon inattendue) qu'il importe peu que les autres nombres soient premiers ou non : en posant $C = \mathrm{ppcm}(2,3,4,\cdots,280)$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{280}+\frac{1}{281} &= \frac{A}{C}+\frac{1}{281}\\ &= \frac{281A+C}{281C}\end{aligned}$$

où C n'est pas multiple de 281 car produit de nombres strictement inférieurs à 281 donc premiers avec lui pour le dire savamment[12].
Écrire $\frac{A}{C}$ pour représenter la somme sans chercher à calculer des nombres ainsi anonymisés est une aptitude de niveau élevé qui fait du cas particulier un exemple ***générique***, générique au sens où le cas général $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}$ ne nécessite pas d'initiative supplémentaire particulière mais exige de pouvoir raisonner sur des nombres indéterminés bien que qualifiés : la présence du $\frac{1}{2}$ est une clé, l'autre étant de percevoir le pair et l'impair. Une récurrence sur le nombre de premiers est possible, encore faut-il réussir à formuler l'hypothèse de récurrence. Il n'en est plus de même du cas $\sum_{k=2}^{60}\frac{1}{p_k}$ ou de toute somme finie $\sum_{i\geqslant2}\frac{1}{p_i}$; mais tout est en place pour conclure.

On peut alors songer à (ou plus vraisemblablement apprécier *a posteriori*) une démonstration par l'absurde générale :

si $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_n} = A \in \mathbb{N}$ alors on obtient, en isolant $\frac{1}{p_n}$ dans le membre de droite et après produit par $p_1p_2\cdots p_n$,

$$p_n \times B = (p_n\times A - 1)\,p_2\cdots p_{n-1} \text{ avec } B \text{ entier}$$

avec un ultime raisonnement pour comprendre que le second membre n'est pas multiple de p_n.

Notons qu'Euler a démontré en 1737 que les sommes partielles $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p_k}$ croissent comme $\ln(\ln(p_n))$. En sommant tous les inverses des nombres premiers connus à ce jour, on ne dépasse pas 18 !

Et le problème rebondit à nouveau : du temps où le CAPES comportait la très redoutée épreuve orale de l'exercice, a circulé le joli et fort ancien problème du caractère non-entier des nombres harmoniques : $h_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, $n \geqslant 2$.

La bonne compréhension des ressorts de l'exemple des sommes des inverses des premiers permet de traiter assez simplement le cas où n est premier ; c'est un joli premier pas.

On peut se dire qu'il est raisonnable de continuer dans la voie explorée : chercher les grands nombres premiers facteurs du dénominateur. Soit donc n non premier ; une exploration numérique peut être tentée (le module `Python sympy` permet la factorisation des entiers). On constate alors que, si $2 \leqslant p_h \leqslant n < p_{h+1}$, avec p_h et p_{h+1} premiers consécutifs, p_h apparaît à la puissance 1 dans la décomposition en facteurs premiers du dénominateur de h_n réduit. Pour le prouver, il suffirait de prouver $p_{h+1} < 2p_h$ soit $\frac{n}{2} < p_h < n$, de sorte qu'aucun multiple de p_h n'existe entre p_h et p_{h+1}. Cela paraît simple, mais voilà, il s'agit du difficile théorème de Bertrand-Tchebychev[13]. Admettons-le.

On a alors :

$$\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p_h}+\cdots+\frac{1}{n} = \frac{1}{p_h}+\frac{A}{B}$$

avec $\frac{A}{B}$ irréductible et p_h et B premiers entre eux.
Puis $\frac{1}{p_h}+\frac{A}{B} = \frac{B+p_hA}{p_hB}$ irréductible : h_n n'est donc pas entier. C'est une démonstration directe.

12. L'argument s'avère subtil.
13. Voir : Martin Aigner et Günter M. Ziegler. *Raisonnements divins*. 3e éd. Paris : Springer, 2013, p. 7-13.

Un raisonnement par l'absurde en isolant $\frac{1}{p_h}$ comme plus haut fonctionne tout aussi bien.

La bonne nouvelle, c'est qu'il est possible de se passer du postulat de Bertrand, en revenant à l'idée du début sur la parité du dénominateur, cela au prix d'une certaine complexité. Laissons de côté la solution rabâchée de la récurrence forte sur la parité du dénominateur de h_n.

Supposons $n \geqslant 4$. Lorsqu'on examine — en s'aidant de l'exploration numérique précédente — la factorisation des dénominateurs des h_n (écrits sous forme irréductible), on constate la présence systématique d'un facteur 2^p, où $p \geqslant 2$ est tel que $2^p \leqslant n < 2^{p+1}$. Si $k \in [\![2, n]\!] \setminus \{2^p\}$ alors 2^p ne divise pas k sinon on aurait $k \geqslant 2^{p+1}$. Donc p est l'unique plus grand exposant de 2 dans la factorisation du ppcm μ_n des éléments de $[\![2, n]\!]$. On ne peut pas encore conclure car il peut y avoir simplification. Posons alors $\mu_n = 2^p \nu_n$ avec ν_n impair.

En supposant h_n entier, alors $2^{p-1}\nu_n h_n$ est d'une part entier et d'autre part somme d'entiers et de $\frac{\nu_n}{2}$ qui n'est pas entier. D'où la contradiction. Cette idée finalement toute simple (la 2-valuation d'un entier), aujourd'hui *naturalisée*, est due au mathématicien hongrois József Kürschák (1864-1933).

Un prolongement classique et plurimillénaire est celui des fractions égyptiennes. Peut-on obtenir tous les entiers en ne prenant dans $\sum_k \frac{1}{k}$ que certains k ? Par exemple $2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. Plus généralement, peut-on obtenir de cette façon tous les rationnels [14] ?

ln(20) est-il entier ? Et ln(24 154 953) ?

La calculatrice dit non. Qu'en *déduire* ?

Toutes les calculatrices actuelles affichent 2,995 7 ... — qui n'est certes pas entier — ce qui permet normalement d'en déduire *avec certitude* que $2 < 2{,}995 < \ln(20) < 2{,}996 < 3$ donc le nombre réel — pas le nombre calculé — est non entier. La production de telles inégalités est problématique tant le calcul numérique est si peu pensé. Et la présence des deux « 9 » après la virgule n'est pas le fait du hasard.

Ainsi avec ln(24 154 953), certaines calculatrices affichent 17., éventuellement 17.00000001 voire même 17.0000000102 ; il y a doute raisonnable [15].

On peut revenir au premier exemple et chercher à démontrer l'encadrement $2 < \ln(20) < 3$ sans utiliser l'évaluation de ln(20) par la calculatrice. Il suffit de démontrer que $\exp(2) < 20$ et $\exp(3) > 20$. Or $\exp(2) = \exp(1)^2$ et $\mathrm{e} = \exp(1)$ est un nombre dont les vingt premières décimales sont connues depuis Euler. L'encadrement $2{,}718 < \mathrm{e} < 2{,}719$ suffit alors pour conclure de façon certaine, même en utilisant au passage une calculatrice pour éviter le calcul à la main, mais avec un raisonnement par condition suffisante bien déroutant. Se demander si l'argument fonctionne pour ln(24 154 953) en démontrant que $\mathrm{e}^{17} < 24\,154\,953 < \mathrm{e}^{18}$ questionne judicieusement l'utilisation de la calculatrice, dans ce cas nécessaire, et la confiance dans les évaluations fournies. Ainsi $\mathrm{e} < 2{,}718\,281\,83 = d$ et une calculatrice scientifique donne 24 154 952,986 4 comme *évaluation* de d^{17} ; mais peut-on en déduire avec certitude que $d^{17} < 24\,154\,953$ et donc que $\mathrm{e}^{17} < 24\,154\,953$? Une rude enquête en perspective dans laquelle l'arithmétique entière exacte de `Python` peut aider.

La généralisation, non élémentaire, est de démontrer que si n est entier supérieur à 2, $\ln(n)$ n'est pas entier, ce qui nécessite d'autres outils. Nous y reviendrons dans le volet « rationnel ».

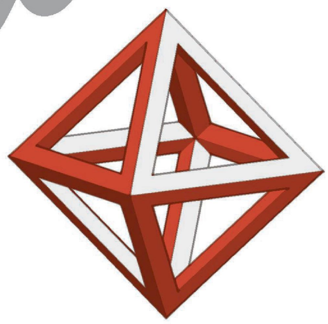
François Boucher, à la retraite depuis quelques années, continue de s'intéresser aux mathématiques et à leur enseignement.

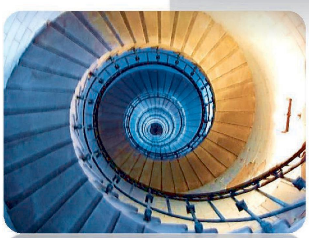
boucherf@free.fr

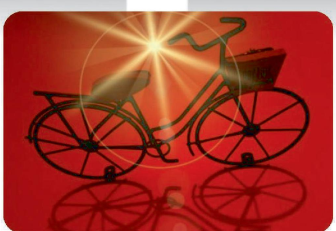
14. La question est bien documentée. On pourra consulter l'article (historique) de Michel Guillemot dans la revue Repères-Irem 106 ou celui (algorithmique) de Christophe Devalland dans le bulletin vert 492.
15. En réalité, avec la norme IEEE 754, utilisée par `Python`, non ; mais on excède le niveau Terminale.

Journées Nationales
du 21 au 24 octobre 2023

Maths en l'R
ennes







Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public
« De la maternelle à l'université »

Sommaire du nº 549

Faites parler les nombres !

Éditorial 1

Opinions 3

Hommage à Pierre Legrand — Christiane Zehren 3

Faites parler et écrire les nombres en unités de numération ! — Catherine Houdement & Frédérick Tempier 6

Calculer ou faire parler les nombres ? — Éric Trouillot 14

Nombre et suite de chiffres — Jean Toromanoff 22

Construire la suite des nombres au cycle 1 — Serge Petit 30

Avec les élèves 39

Le pari des mois des anniversaires — Jean-François Kentzel 39

Foot-thèque en cycle 3 — Sandrine Lemaire & Christine Monnoir 42

Les premiers nombres, on en parle en PS — Laurence Le Corf 49

Les *sacamaths* — Nathalie Braun & Houria Lafrance 53

Ouvertures 58

Petite enquête sur être ou ne pas être un entier — François Boucher 58

Les amidakujis — Alice Ernoult & Stéphane Gaussent 65

L'aiguille de Buffon, encore et encore — Ivan Boyer & Karim Zayana 75

Récréations 81

Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 81

La table d'addition magique — Sébastien Reb 84

Des problèmes dans nos classes — Valérie Larose 86

Calcul sans peine — Olivier Rioul 88

Au fil du temps 90

Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau 90

Matériaux pour une documentation 92

APMEP

www.apmep.fr