

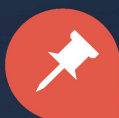
Le bulletin de l'APMEP - N° 549

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Juillet, Août, Septembre 2023

Faites parler les nombres ! ⁷



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>



Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents via une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufilesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est jointe la plaquette
Visages 2023-2024 de l'APMEP.

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Lionel PRONOST, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Éric ASTOUL, Nicolas CLÉMENT, Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL, Sixtine MARÉCHAL, Jean-Sébastien MASSET.

Équipe T_EXnique : Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Septembre 2023. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau



Le pari des mois des anniversaires

Si on vous parle d'un résultat qui contredit l'intuition, vous pensez peut-être au paradoxe des anniversaires. Dans ce qui suit, il vous est proposé de le revisiter en ne s'intéressant plus au jour d'anniversaire, mais au mois d'anniversaire !

Jean-François Kentzel

Activité en classe

Les élèves forment des groupes de cinq. Vous pariez alors avec chaque groupe qu'au moins deux d'entre eux sont nés le même mois. S'il y a un groupe incomplet, les élèves doivent y ajouter une ou des personnes absentes qu'ils connaissent pour arriver à cinq. Quelle est la probabilité de gagner un pari de ce type ? En supposant l'équiprobabilité des mois de naissance (ce qui est raisonnable d'après l'INSEE, j'ai vérifié), elle est d'environ 0,62 pour chaque groupe.

Paris avec les élèves

Faire des paris avec les élèves (ce qui est un peu se mettre en danger, sans crainte tant on sait qu'on finira par gagner !) me semble être une façon de les intéresser au calcul des probabilités. Si vous êtes fatigué ce jour-là ou si vous avez une classe volontiers agitée, vous pouvez prudemment remplacer 5 par 6 pour l'effectif des groupes, votre probabilité de gagner monte alors à environ 0,78. Inversement pour pimenter les paris, vous pouvez parler de, disons, 100€ de pari par groupe... en précisant assez vite que c'était une blague, pour éviter pétitions et phénomènes de triche !

Simulations avec un tableur

Fort utiles si vous n'avez pas eu de chance avec les paris ! Si vous avez une salle informatique, c'est une occasion de revoir le symbole \$ avec les élèves. Dans ce cas en dire le moins possible au départ... puis tout dire peu à peu ensuite pour ceux qui

seront ravis de seulement recopier des formules afin de produire une page qui fonctionne.

Par exemple, pour un groupe de cinq élèves, en ligne 2 de la feuille de calcul :

- dans les cellules A2 à E2, on simule avec `=ALEA.ENTRE.BORNES(1;12)` ;
- puis on écrit en G2 la formule `=NB.SI($A2:$E2;A2)` que l'on étire jusqu'à K2 ;
- on tape enfin `=MAX(G2:K2)` en M2. Le pari est perdu quand ce maximum vaut 1.

Si on souhaite simuler avec 100 groupes, on copie 99 fois la ligne 2 et on tape la formule `=NB.SI(M2:M101;1)` dans la cellule O2 par exemple.

Version simplifiée du « paradoxe des anniversaires »

Le « paradoxe des anniversaires »

Ce qui précède n'en est qu'une version simplifiée. Si vous ne connaissez que vaguement cette histoire classique, pour expliquer le mot « paradoxe », je vous pose cette question :

Désignons par $f(n)$ la probabilité que dans un groupe de n personnes ($n > 1$), au moins deux personnes ont la même date d'anniversaire. Bien sûr, oubliant les 29 février et supposant l'équiprobabilité des 365 autres dates, ce que l'INSEE confirme, f est une suite croissante vérifiant $f(2) = \frac{1}{365}$ et $f(n) = 1$ si $n > 365$.

À partir de quelle valeur de n a-t-on un « pari gagnant », c'est-à-dire $f(n) > 0,5$?



Essayez de répondre « intuitivement », fixez-vous un nombre, non, soyons sérieux, un intervalle ! Du coup vous serez plus indulgent en entendant les réponses très fausses de vos élèves pour cette question, à vrai dire pas sérieuse (c'est une question vraiment horrible !), seulement destinée à tenter d'expliquer le mot « paradoxe ». La réponse est à la fin de ce texte.

La taille des arbres

Un intérêt de cette version simplifiée est qu'elle est compréhensible avec des arbres de dénombrement « de taille humaine ». Pour les mois d'anniversaires, avec $n = 5$ élèves on a $12^5 = 248\,832$ branches, soit le nombre d'habitants d'une grande ville et on peut tranquillement l'ébaucher au tableau... Dans le cas des dates d'anniversaire, pour une classe de 35 élèves on a un arbre de taille 365^{35} qui est le nombre, annoncé par Python en une seconde, oups,

478 905 975 539 166 587 008 090 776 702 255
479 679 025 347 605 612 105 677 694 592 325
133 271 515 369 415 283 203 125

nombre de 90 chiffres, soit dix milliards de fois certaines estimations du nombre d'atomes de l'univers connu. Au tableau ça devient plus confus.

Un calcul de probabilités

À mon avis, un des intérêts du pari des mois d'anniversaires est l'utilisation de la « formule du complémentaire », simplette et anodine mais semblant ici incontournable si on s'oblige à n'utiliser que des arbres de dénombrement.

Grâce à cette formule du complémentaire, pour des groupes de cinq élèves,

$$\begin{aligned} P(\text{« gagner le pari »}) &= 1 - P(\text{« Les cinq mois sont distincts »}) \\ &= 1 - \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{12^5} \\ &\approx 0,62 \end{aligned}$$

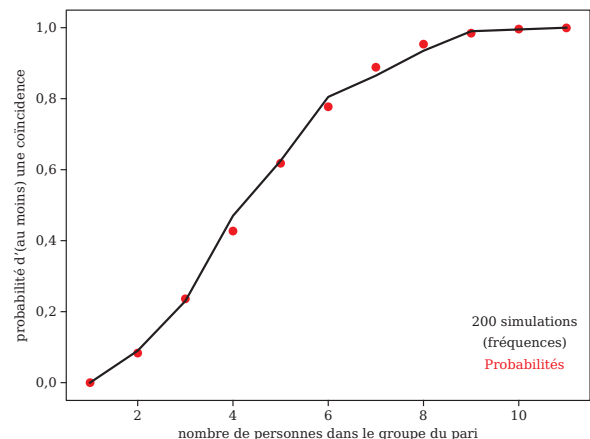
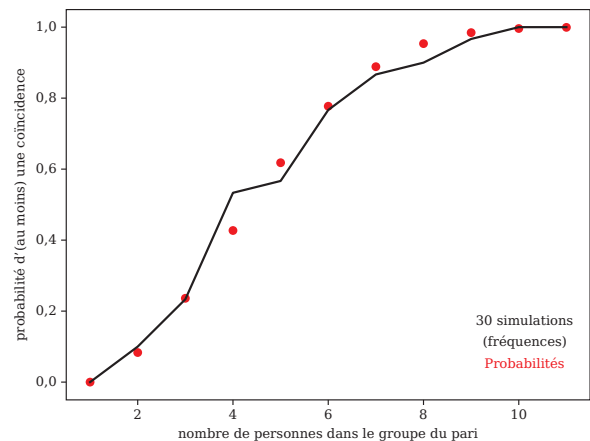
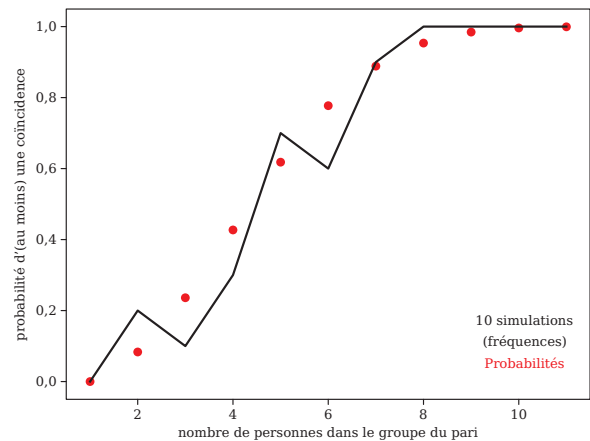
On a seulement dénombré

$$12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 95\,040 \text{ branches}$$

où tous les mois sont distincts, parmi les 248 832 possibles.

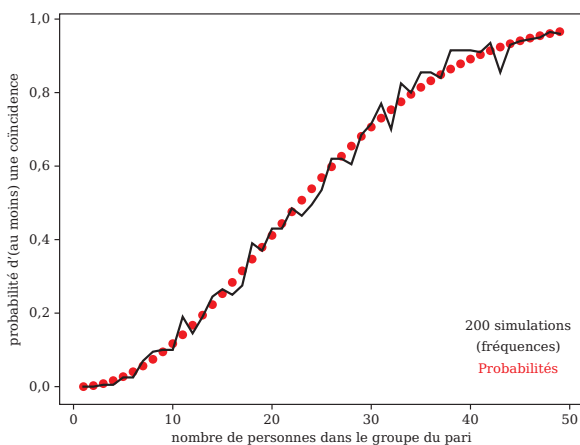
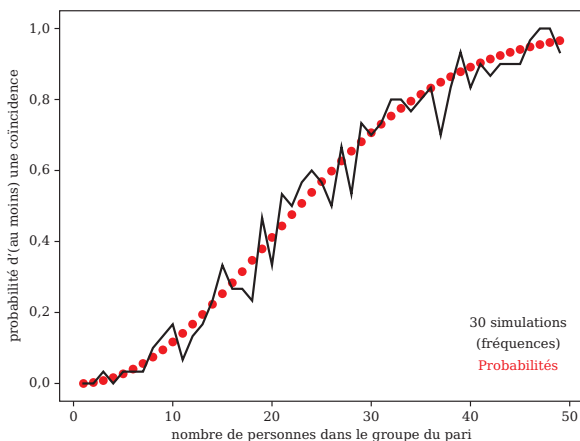
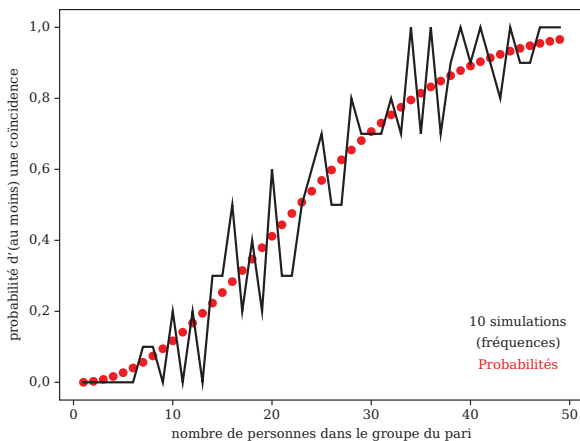
Un peu de Python, par exemple pour les élèves de spé NSI

Un programme Python de 90 lignes, dont beaucoup de commentaires, permet d'obtenir les graphiques ci-dessous :





En remplaçant trois fois 12 par 365 dans ce programme et en modifiant les abscisses du graphique, j'obtiens ces graphiques qui racontent l'histoire des anniversaires :



En guise de conclusion

Il y a dix-huit ans, j'avais écrit l'article *Coïncidences des dates d'anniversaires*, dans le Bulletin Vert de l'APMEP (📺). Il contient le résultat suivant : la probabilité de l'événement « il y a au moins une coïncidence d'anniversaires » dépasse 0,5 quand n dépasse 22 et vaut environ 0,8 pour n égal à 34.

Je ne me suis pas lassé de ce sujet. Rares sont les classes où je n'en ai pas parlé ! Quel bonheur de croiser un ex-élève qui avait mémorisé ces nombres 34 et 0,8 des années après son passage au lycée !

Ces dernières années j'ai souvent commencé par faire le « pari des mois d'anniversaires », beaucoup moins spectaculaire (il serait abusif de parler de paradoxe, avec cinq mois on remplit, s'ils sont distincts, presque la moitié des cases des mois...) mais semblant plus compréhensible.

Quelques commentaires du présent texte et quelques fichiers tableur ou .py sont accessibles sur l'ENT du lycée Pardailhan, à la dernière ligne, intitulée « Pari des mois d'anniversaires », de cette page : 📺.



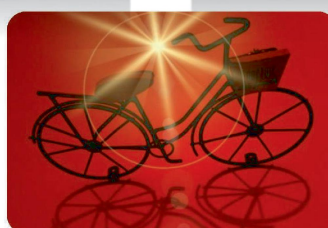
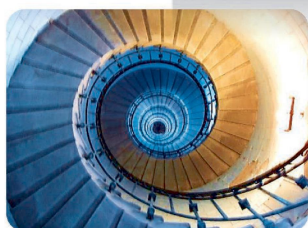
À la retraite depuis peu, Jean-François Kentzel enseignait au lycée Pardailhan à Auch (Gers).

© APMEP Septembre 2023



Journées Nationales
du 21 au 24 octobre 2023

Maths en



Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public
« De la maternelle à l'université »

Sommaire du n° 549



Faites parler les nombres !

Éditorial

Opinions

Hommage à Pierre Legrand — Christiane Zehren

✦ Faites parler et écrire les nombres en unités de numération ! — Catherine Houdement & Frédéric Tempier

✦ Calculer ou faire parler les nombres ? — Éric Trouillot

✦ Nombre et suite de chiffres — Jean Toromanoff

✦ Construire la suite des nombres au cycle 1 — Serge Petit

Avec les élèves

Le pari des mois des anniversaires — Jean-François Kentzel

✦ Foot-thèque en cycle 3 — Sandrine Lemaire & Christine Monnoir

✦ Les premiers nombres, on en parle en PS — Laurence Le Corf

Les *sacamaths* — Nathalie Braun & Houria Lafrance

1 Ouvertures

3 Petite enquête sur être ou ne pas être un entier — François Boucher

3 Les amidakujis — Alice Ernoult & Stéphane Gaussent

6 L'aiguille de Buffon, encore et encore — Ivan Boyer & Karim Zayana

14 Récréations

22 Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt

✦ La table d'addition magique — Sébastien Reb
Des problèmes dans nos classes — Valérie Larose

39 ✦ Calcul sans peine — Olivier Rioul

Au fil du temps

39 Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau

42 Matériaux pour une documentation



CultureMATH

