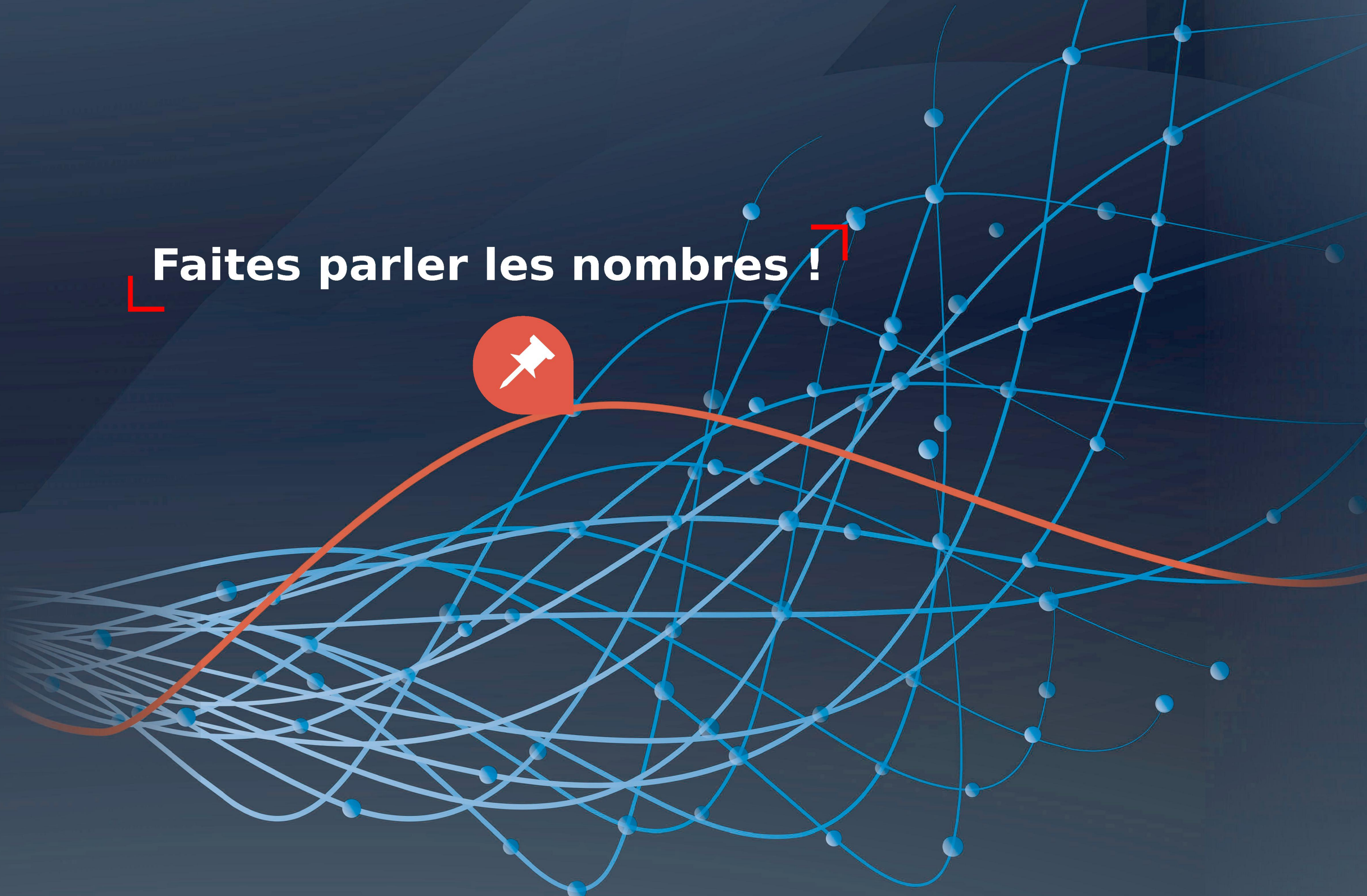
Le bulletin de l'APMEP - N° 549

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Juillet, Août, Septembre 2023



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr

Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

AU FIL DES MATHS

À ce numéro est jointe la plaquette
Visages 2023-2024 de l'APMEP.

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : *Claire PIOLTI-LAMORTHE*.

Responsable coordinatrice de l'équipe : *Cécile KERBOUL*.

Rédacteurs : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY*.

« Fils rouges » numériques : *Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Lionel PRONOST, Agnès VEYRON*.

Illustrateurs : *Éric ASTOUL, Nicolas CLÉMENT, Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL, Sixtine MARÉCHAL, Jean-Sébastien MASSET*.

Équipe TEXnique : *Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD*.

Maquette : *Olivier REBOUX*.

Correspondant Publimath : *François PÉTIARD*.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Septembre 2023. ISSN : 2608-9297.
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

Nombre et suite de chiffres

Une confusion signifié/signifiant courante et problématique

L'enseignement du nombre se réduit trop souvent à celui de certaines de ses représentations, notamment l'écriture chiffrée. Jean Toromanoff montre les limites et les difficultés d'un véritable enseignement du nombre lui-même.

Jean Toromanoff

Magritte a peint en 1928-1929 son célèbre tableau *La trahison des images*, souvent appelé *Ceci n'est pas une pipe*, car c'est l'inscription que le peintre a écrite au bas de l'œuvre. Quand on regarde ce tableau, on se demande donc : *« Alors : est-ce une pipe ? On dirait bien, pourtant… pourquoi le peintre affirme-t-il :* "Ceci n'est pas une pipe" *? La trouve-t-il mal dessinée ? Ratée ? »*

Mais non ! Simplement, essayez de bourrer cette pipe de tabac, de la fumer, et vous constaterez que c'est impossible : ce n'est pas une pipe ! … et pourtant, ce tableau fait vraiment penser à une pipe.

Cette question de ce qui est visible (le signifiant), de son sens, des rapports qu'il entretient avec ce à quoi il renvoie (le signifié) [1], est fondamentale dans presque tous les domaines, mais surtout en mathématiques, car le signifié (le concept lui-même) est toujours inaccessible directement à nos sens.

Elle est encore plus fondamentale à l'école (au sens large), car beaucoup d'élèves ne perçoivent que le signifiant (ce qu'ils voient avec leurs yeux, ce qu'ils écrivent avec leurs mains, ce qu'ils entendent) et rien d'autre. Ce qui crée d'innombrables malentendus à l'origine de la plupart des difficultés dans l'apprentissage des mathématiques.

Difficultés pour les élèves, mais pas seulement. Pour les enseignants aussi — et parfois encore plus —, car nous avons tellement intégré les implicites de ces écritures que nous ne voyons même plus où pourrait se loger une incompréhension.

Cet article a pour objet de donner des exemples emblématiques de cas où l'on prend le signifiant pour lui-même (c'est-à-dire sans aller jusqu'au sens), dans le cas des nombres.

« Ah oui, l'éternelle incompréhension de la distinction entre chiffre et nombre ? » En effet, c'est déjà l'une des premières difficultés ; mais pas seulement. Il y a bien d'autres incompréhensions sur les rapports entre le nombre et ses écritures, d'autant plus que les nombres ne s'écrivent pas toujours avec des chiffres. Quant à la question de ce qu'est vraiment un nombre, elle est peut-être encore plus fondamentale.

Chiffres et nombres

Les chiffres d'un nombre : les lettres d'un mot ?

— *Les chiffres par rapport aux nombres ?*
— *Eh bien, c'est comme les lettres par rapport aux mots !*

Telle est la réponse couramment donnée à la question de la différence entre *chiffre* et *nombre*. Le problème, c'est que, sans être totalement fausse, elle est quand-même très insatisfaisante, et souvent trompeuse. Car la différence entre nombre et chiffre est beaucoup plus profonde — et, en tout cas, bien plus problématique — que celle que les élèves font entre mot et lettre, car, pour eux, le mot est juste une suite de lettres, un mot est

1. NDLR : le lecteur est invité à prendre connaissance de l'article en ligne de Serge Petit, *Faire parler les nombres ?*, dans lequel l'auteur explicite les concepts de signe, de sens et de signification.

« formé par ses lettres » [2]. Parler de « nombre à deux chiffres », comme on parle de « mot de deux lettres » est un abus de langage dangereux. Ainsi, le nombre couramment désigné par l'écriture 6, est-il un nombre à un chiffre ? Il s'écrit pourtant 110 en base deux, donc avec trois chiffres ! Et VI en chiffres romains…Alors, ce nombre a-t-il 1, 2 ou 3 chiffres ? En fait, cette question n'a pas de sens, car non, **un nombre n'a pas de chiffres**, tout comme un animal *n'a pas* de lettres (même pas a, n, i, m, a et l !).

Et ce n'est pas une question de pays, de culture, de type d'écriture ni de langue ! Mais on ne s'arrêtera pas ici sur cet aspect, certes utile, voire passionnant, de la numération (la façon dont on écrit les nombres suivant les cultures ou les contextes), car c'est du nombre lui-même dont on doit parler.

Alors, quels liens le nombre entretient-il avec ses (nombreuses) écritures possibles, en particulier celles utilisées de la maternelle au lycée ?

La question de l'écriture (et pire : de la « lecture »)

Comme on ne verra jamais de nombres, on ne pourra donc jamais en montrer à quelqu'un. Et pourtant, il faut bien trouver des manières de communiquer à leur propos. Mais ce qu'on donnera à voir, ce qui est écrit ne sera en aucun cas le nombre visé lui-même, de même que le tableau de Magritte ne contient *aucune* pipe. Ceci dit, dans le cas d'une pipe, on pourrait en montrer « en vrai », dans le cas des nombres, c'est strictement impossible, et c'est bien une des difficultés fondamentale des mathématiques !

2. Pour les linguistes et les grammairiens, les chiffres servent à écrire un *signifiant* d'un nombre, tout comme les lettres servent à écrire le *signifiant* d'un mot car, pour eux, le mot n'est pas une écriture ni une oralisation. Mais ce n'est pas ce que la plupart des gens mettent comme sens sous le mot…mot !

Non, un nombre n'est pas *formé* par « ses » chiffres, même s'il est (souvent) écrit avec des chiffres ; un nombre n'est pas du tout une suite de chiffres ! Pour la majorité des personnes, un nombre n'est pourtant qu'une écriture, une suite de chiffres, même si certains savent que le nombre peut être écrit autrement. Cette confusion est entretenue involontairement à longueur de cours de mathématiques, car on y demande par exemple très souvent de « lire des nombres », or « lire un nombre » est en toute rigueur impossible (un nombre est invisible, on l'a déjà dit). Confusion provoquée aussi quand on demande « écris le nombre » qui, en toute rigueur n'est pas faux, puisque cela signifie « donne une *écriture* — une représentation — de ce nombre », mais qui sous-entend très souvent que ce qu'il faut écrire *est* le nombre lui-même !

Ceci dit, il est vrai que dire systématiquement, au lieu du « lis ces nombres » habituel, « lis ces *écritures de* nombres » serait très fastidieux : il y a toujours des implicites, voire des abus de langage, quand on s'exprime. Mais ces abus de langage ne peuvent être acceptés qu'entre personnes à peu près au clair sur le concept de nombre, ce qui n'est souvent pas le cas. Ces attitudes répétées bloquent toute possibilité de compréhension pour ceux qui ne font pas la distinction nombre/écriture du nombre et peuvent avoir des conséquences après la scolarité élémentaire. Ainsi, en algèbre, certains élèves penseront donc que $x + y = a + b$ entraîne $x = a$ et $y = b$ sans pouvoir ni se rectifier, ni comprendre l'explication qu'on donnera de leur erreur…

Mais au fait, c'est quoi, un nombre ?

Les nombres entiers, puis les autres nombres peuvent se définir de manière théorique, mais ce n'est pas l'approche possible en classe où ils sont rencontrés « en acte » sous trois aspects différents : ordinal, cardinal et mesure. Et ce n'est qu'après cette fréquentation qu'on peut « enseigner le *nombre* ».

Trois premiers aspects du nombre

La date « mardi 21 novembre 2023 » comporte visiblement l'expression de deux nombres. Ce sont deux nombres ordinaux. Ils indiquent un rang, une position, ce qui n'a *a priori* aucun rapport avec une quantité.

Dans « 21 élèves », au contraire, on parle d'une quantité (d'élèves). 21 y est donc évidemment un nombre cardinal. Mais attention (c'est en tout cas le vocabulaire que j'utilise), une quantité n'est pas un nombre (même pas un cardinal). « 21 élèves » n'est pas un nombre, pas plus que « 21 chaises », ces deux quantités n'ont évidemment strictement rien à voir (tant qu'on ne cherche pas à faire asseoir les élèves, bien sûr !). Leur seul lien, c'est qu'elles ont même cardinal. Aucun aspect ordinal dans ce deuxième exemple.

Dans « 21 cm », 21 n'est pas ordinal, mais pas non plus cardinal, contrairement à ce qu'on croit parfois (il n'y a pas une quantité de vingt-et-un objets qui seraient chacun un centimètre). Il est une mesure. La notion de mesure concerne des grandeurs, et nécessite en particulier le choix préalable d'une unité (dans ce troisième exemple, le centimètre est l'unité choisie pour la grandeur longueur), mais il est impossible d'en dire plus ici.

Le quatrième aspect, qui « unifie » finalement le nombre… et en est quasiment la définition

Nous y voilà : ce qui fait que les trois « 21 » dont on a parlé ci-dessus, peuvent être malgré tout considérés comme représentant un seul et même nombre, c'est qu'avec les nombres, qu'ils soient ordinaux, cardinaux ou mesures, on peut calculer de la même manière.

Par exemple, si je suis 13^{e} à la course, le 8^{e} arrivé *après* moi est en fait le 21^{e}, or $13 + 8 = 21$; s'il y a 13 élèves « et » 8 élèves, il y a « finalement » 21 élèves : $13 + 8 = 21$, encore ; et si on rajoute une *longueur* de 13 cm à une *longueur* de 8 cm, on obtient bien une *longueur* de 21 cm…encore $13 + 8 = 21$.

Ce quatrième aspect du nombre, le « nombre-calcul », le seul vraiment utilisé en mathématiques savantes (et dans lequel l'algèbre habituelle dissout d'ailleurs totalement les trois autres), justifie le fait qu'on n'a plus besoin de préciser de quel aspect du nombre on parle quand on en utilise un. Le nombre est ce qui est commun à ces trois (ou quatre) aspects différents. Poincaré disait : « *Faire des mathématiques, c'est donner le même nom à des choses différentes* », c'est clairement le cas pour le nombre !

Retour à l'écriture chiffrée habituelle et aux autres

Le nombre aussi désigné par vingt-quatre n'est donc pas l'écriture « 24 », même si c'est le plus souvent ainsi qu'on *écrit* ce nombre. Ce même nombre n'est pas non plus sa désignation verbale « vingt-quatre », pas davantage que les écritures « 6×4 », « XXIV », « $20 + 4$ », etc. ; ni aucune des nombreuses autres représentations qui peuvent nous venir à l'esprit.

On pourrait paraphraser la notion de champ conceptuel de Gérard Vergnaud[3], et dire que toutes les écritures, oralisations, etc. indiquées ci-dessus, et toutes les autres possibles *font partie* du nombre, mais que le nombre ne s'y réduit pas. Connaître un nombre, c'est aussi connaître les liens qu'il entretient avec les autres nombres, mais encore avec d'autres objets mathématiques (en particulier les opérations), les problèmes qu'il permet de résoudre, etc. Bref, c'est en fait très abstrait, mais pas pour autant abscons, et au contraire plein de sens…et très très utile, dès le plus jeune âge.

Une des utilités du calcul mental « par cœur »

On ne commence à connaître le nombre noté 24 que quand on sait aussi que c'est le suivant du nombre désigné par 23 et le précédent de celui désigné par 25, puis qu'on apprend qu'il est aussi le double de douze, qu'il est égal à deux fois dix plus quatre ; et ensuite qu'il vaut trois fois huit, six fois quatre, etc. La liste des représentations possibles de ce nombre est infinie, nous le savons bien.

Calculer est donc la meilleure manière pour que les nombres se construisent dans la tête, sans qu'ils ne soient confondus avec une écriture (en général leur écriture décimale). De toute façon, ils ne sont nulle part ailleurs que dans nos têtes. Il faut donc qu'ils se *construisent* dans nos têtes. Notre principal rôle de professeur est d'aider nos élèves dans cette construction intérieure, et c'est ce qui me paraît être un enjeu essentiel du fait de « connaître ses tables » (ce n'est donc pas seulement « pour savoir calculer » !).

« Savoir ses tables », pour moi, c'est bien sûr dans les deux sens. C'est-à-dire pas seulement « Quatre fois six vaut combien ? » ; mais, surtout « Vingt-quatre égale quoi ? » (où il y a alors plusieurs réponses !). C'est donc essentiel à la réelle construction/compréhension du nombre. Reste que pour que cet apprentissage soit efficace, il doit avoir du sens, sens qu'il prendra notamment en résolution de problèmes divers.

Et les nombres autres qu'entiers ?

Toujours une des utilités du calcul

Tout ce qui a été dit jusqu'ici ne concernait que les nombres entiers, mais vaut pour tous les nombres, entiers ou non, que la pratique du calcul — particulièrement mental — permet de mieux comprendre.

Ainsi, $\frac{5}{4}$ est *5 fois un quart, et aussi un et un quart, la moitié de* $\frac{5}{2}$, *la mesure* (en cm) de la longueur de chacun des morceaux d'un tissu de 5 cm qu'on a coupé en quatre « parts égales » ; etc.

3. G. Vergnaud. « La théorie des champs conceptuels ». In : *Recherches en didactique des mathématiques* Vol. 10. N° 2.3 (1991). , p. 133-170.

Ce n'est pas juste pour « savoir calculer » qu'il faut avoir intégré les résultats qui précèdent, c'est aussi fondamental pour saisir que la fraction désignée verbalement par cinq-quarts n'est pas l'écriture $\frac{5}{4}$, mais un nombre !

Et que dire de l'expression « Calcule $\frac{8}{5}$ », qu'on entend (hélas) parfois ? Pour l'enseignant, elle signifie « Donne l'écriture décimale de $\frac{8}{5}$ », mais pour l'élève ? Sans doute « obtiens un nombre », un vrai, quoi !

L'écriture $\sqrt{\ldots}$

Un mot sur ces nombres « racine de ... ». Bien sûr, les élèves sont confrontés à d'autres difficultés que celle de leur écriture, mais il est clair que cette écriture $\sqrt{}$ n'aide pas. Pourtant, je pense inversement que les élèves les comprennent mieux (ou moins mal) qu'on ne le croirait en regardant leurs productions. Car beaucoup ont compris que $\sqrt{2}$, par exemple, est le nombre positif qui, multiplié par lui-même, « donne » 2. Mais ont-ils compris que c'est un nombre ? Peuvent-ils admettre qu'un nombre irrationnel est un nombre, vu qu'on ne pourra jamais « l'écrire en entier » ? Tant qu'un nombre n'est qu'une écriture (ou essentiellement une écriture), c'est impossible. Les élèves ne peuvent d'ailleurs pas comprendre non plus vraiment l'expression « multiplié par... » car, pour beaucoup, multiplier signifie « poser l'opération », ce qu'ils ne pourront jamais faire sans connaître à l'avance « les » chiffres des nombres... qu'on ne connaît pas encore !

Et qui n'a pas entendu ce genre de dialogue entre un élève et un autre (ou un enseignant) :

— *Finalement, $\sqrt{2}$, c'est quel nombre ?*
— *Tu viens de le dire : le nombre positif qui, multiplié par lui-même, fait 2.*
— *D'accord, mais ça vaut quoi ?*
— *Par exemple la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1.*
— *Oui, je sais, mais ça fait combien ?*
— *Euh, je ne sais pas quoi te dire de plus. ».*

Et puis, un peu plus tard, l'interlocuteur écrit

$$\sqrt{2} \approx 1{,}414\,2.$$

Et alors l'élève s'exclame, ravi :
« Ah, ben voilà, $\sqrt{2}$, c'est 1,414 2 : c'est ce que je demandais ! ».
Sous-entendu : *« Ça, c'est un nombre. Tant que je n'avais pas une suite de chiffres (avec éventuellement une virgule), je n'avais pas de nombre, je ne pouvais pas comprendre ! ».*
Mais comprend-il mieux avec ?

Et en algèbre ?

C'est sans doute, comme pour la véritable compréhension de $\sqrt{2}$, l'une des origines principales de la résistance des élèves aux écritures « avec des x ». Car où y a-t-il des chiffres, dans une écriture comme $3x+2$? Il y a 3 et 2, « bien sûr » ! Mais x ? Donc ils ne voient que deux nombres, et pas trois ou plutôt un seul, d'ailleurs, vu que $3x+2$ représente un nombre (une fois que x en représente un).

Là encore, à force de travailler sur des expressions algébriques, de faire des calculs, l'élève qui aura dépassé ces interrogations primaires finira par se construire une notion de nombre indépendante des chiffres. Mais quels efforts ! Quel chemin de croix forment tous ces exercices de calculs algébriques, que seuls certains arrivent à dominer car ils ont fini par élaborer (tout seuls) cette construction ! Les autres en sortent dégoûtés, convaincus de la vacuité totale de l'algèbre (et des mathématiques). Et ce n'est pas en multipliant les entraînements qu'ils y arriveront (sauf les quelques-uns évoqués plus haut). Alors que si le nombre était vraiment *construit* avant (au moins partiellement), la marche serait beaucoup moins haute, et les calculs possiblement porteurs de sens pour tous.

D'ailleurs, quelle consolation pour tant d'élèves quand ils terminent la résolution d'une équation, les amenant à $x = 1{,}2$ (plutôt que $\frac{6}{5}$, bien sûr). Enfin, on « a » un nombre ! Et plus cet horrible x. Une lettre, ça sert pour les mots, pas pour les nombres, on nous l'a assez répété à propos des chiffres ! Mais en fait, il n'y a plus aucun sens nulle part.

Conséquences pour l'enseignement du nombre (et des chiffres) aux cycles 2 et 3

La responsabilité (dans les deux sens du mot) du cycle 2 !

En fin de maternelle, un début de « sens du nombre » est à peu près construit par beaucoup d'élèves. Bien sûr de façon très implicite : un nombre, « ça sert » à mettre dans l'ordre (je sais bien que le quatrième est après le deuxième), à dénombrer (même si on dit trop souvent « compter » à ce sujet), et à mesurer (là encore, sans véritable conscience de ce qu'est une mesure : j'ai six ans, ma petite sœur dix-huit mois). Et ils se préparent à « la grande école » où ils savent qu'ils vont apprendre (difficilement ?) à calculer (là encore, souvent appelé « compter »). Certes, certains confondent déjà nombre et écriture chiffrée, mais les nombres « servent à quelque chose », ont un sens autre que juste savoir les écrire, les « lire » et calculer avec (ce que les élèves de GS ne sont d'ailleurs pas censés savoir faire !).

L'un des objectifs majeurs du cycle 2 (et à juste titre) est de maîtriser la numération décimale (usuelle). C'est-à-dire de comprendre pourquoi le nombre désigné oralement par « vingt-quatre » s'écrit 24. *« Car il y a 2 dizaines et 4 unités »*. Mais l'écriture est-elle expliquée, signifiante ? Ainsi, le fait qu'un élève ne puisse pas l'écrire 114, alors qu'il y a aussi 1 dizaine et 14 unités n'est quasiment jamais justifié, ou très incorrectement : *« Tu vois bien que ce serait cent-quatorze et pas vingt-quatre ! »*, *« Il est interdit de mettre deux chiffres dans la même colonne ! »*, *« Les chiffres ne vont que* jusqu'à *9 ! »*, etc.

Savoir écrire « 24 » est une compétence essentielle et, bien sûr, savoir « lire » « 24 » (savoir oraliser « 24 » en « vingt-quatre »). Mais elles ne sauraient remplacer la construction du sens du nombre. Or, dans les faits, c'est là qu'on commence à noyer une bonne partie des élèves. Car, à force d'insister sur cette question de « savoir lire et écrire » les nombres, avec la question des dizaines, des centaines, etc., les nombres perdent leur sens. Ils ne sont plus que des chiffres à souligner, à écrire au bon endroit, bref, c'est à partir de ce moment que le nombre devient une suite de chiffres « bien alignés », un point c'est tout. Une question en passant : quelle différence entre 5 unités et 5 ? Au cycle 2, aucune ! On utilise ce terme juste pour pouvoir écrire quelque chose en haut du tableau de numération, à droite de « dizaine » (car, pour le coup, 5 dizaines, ce n'est pas 5 !). Il faudrait toujours parler de « chiffre des unités », et pas « d'unités » tout court, comme on parle du chiffre des centaines (à bien distinguer du nombre de centaines).

D'ailleurs, on ne parle jamais de nombre d'unités, et pour cause : dans le cas des entiers, c'est tout simplement le nombre lui-même ! Quant au cas des non-entiers, alors que, cette fois, on pourrait parler avec utilité du « nombre d'unités », bizarrement, on préfère parler alors de la « partie » entière, ce qui fait penser qu'il s'agit d'une « partie »...de l'écriture, et non d'un nombre. En tout cas, quand on lui dit « 5 unités » au lieu de « 5 », l'élève ne peut que se dire qu'on complique tout ce qui était simple.

On fait « écrire » les nombres dans le tableau de numération, en faisant bien attention à ne pas se tromper de colonne, ce qui disloque le nombre en « ses » chiffres ; et il ne faut surtout pas oublier de « faire les opérations pour demain » ; opérations à poser, en alignant notamment bien les chiffres verticalement, ce qui n'utilise donc que les chiffres en faisant disparaître le travail sur les nombres eux-mêmes.

Bref, avec en général la meilleure volonté du monde, le cycle 2 « tue » ce que le cycle 1 avait commencé à construire, insuffisamment certes, mais qui avait du sens et « servait » à autre chose que de répondre à des exercices *ad hoc*. C'est terrifiant quand on y pense, mais tout le monde est content parce qu'on croit que les élèves comprennent, puisqu'ils savent faire les exercices et ont de bonnes notes…jusqu'à ce qu'arrive le cycle 3, où tout va sombrer pour beaucoup d'entre eux.

Un nombre ? J'en vois deux !

On sait que, pour beaucoup d'élèves, une fraction, ce sont deux nombres entiers écrits l'un au-dessus de l'autre (et séparés par un trait horizontal), ce qui est renforcé par le fait qu'on fait apprendre « le dénominateur, c'est le *nombre* de parts au total » et « le numérateur, c'est le *nombre* de parts qu'on prend » (donc une FRACTION, c'est forcément DEUX NOMBRES !).

Pour être honnête, beaucoup d'enseignants distinguent l'écriture (ce qu'ils appellent la « fraction ») et le nombre (le « rationnel »). Sauf qu'alors il est rigoureusement impossible d'additionner (ou multiplier) des fractions ! Inversement, ceux qui (comme moi, au moins à l'école élémentaire) préfèrent dire « fraction » pour « rationnel » doivent parler d'écriture fractionnaire, et surtout pas de fraction quand il s'agit juste des écritures. Ce que très peu font, hélas, ou bien seulement pour l'opposer à l'écriture décimale (qui est donc plus ou moins sous-entendue être « la bonne »… et serait donc le nombre lui-même, en fait. Et voilà !). Le nombre décimal serait de même « formé » de deux nombres entiers écrits l'un après l'autre et séparés par une virgule. Avec la difficulté supplémentaire que même les nombres non décimaux ont une écriture décimale. Oui, mais illimitée : ce n'est donc pas vraiment une écriture… et donc pas un nombre : la boucle est bouclée.

On voit bien que cette incitation permanente à ne voir un nombre que comme une écriture (et une écriture de chiffres bien alignés) rend quasi inévitables ces confusions, et empêche en particulier que le nombre non entier ait vraiment un sens, c'est-à-dire puisse être considéré comme un nombre.

Le cas emblématique de la confusion nombre/écriture : la « partie décimale »

Je terminerai cet article par ce qui me semble être le pire dans la confusion nombre/écriture et est pourtant extrêmement courant : la notion dite *partie décimale*.

Apparemment simple symétrique de ladite *partie entière*, elle n'a pourtant aucun sens, alors que la partie entière, elle, en a un, à la fois très précis, et très utile, mais sans rapport avec le fait que le nombre soit décimal ! Tout nombre a une partie entière.

Si on a souvent tendance à dire que la partie entière de 56,703 (par exemple) est 56, « puisque c'est ce qui est avant la virgule », ça n'a absolument aucun sens, car on mélange dans la même phrase le nombre et une de ses écritures. L'affirmation n'est pas vraiment fausse, mais ne peut pas être une définition correcte de la partie entière d'un nombre, qui se définit comme étant le plus grand entier inférieur ou égal à ce nombre.

Ainsi, la partie entière de 56,703 est bien 56, mais parce que $56 \leqslant 56{,}703$ et que tout autre entier plus grand que 56 (en particulier le suivant, 57) est supérieur à 56,703. Et c'est évidemment le même entier que si on avait écrit ce nombre « $\frac{56\,703}{1\,000}$ », ou tout autrement ! La partie entière n'a *a priori* rien à voir avec une quelconque écriture. Simplement, elle se lit directement sur l'écriture décimale, et pas sur les autres.

Qu'en est-il pour ladite *partie décimale* ? Quand on a défini la partie entière comme étant « ce qui est avant la virgule », il paraît normal de donner un nom à « ce qui est après » et, en plus, de l'appeler *partie décimale*.

Premier inconvénient : cela fait croire que ce dont on veut parler est la suite des « chiffres écrits après la virgule », suite qui représente bien un nombre (forcément entier supérieur ou égal à 1, d'ailleurs), mais celui-ci n'a quasiment rien à voir avec le nombre « de départ », et n'est en tout cas pas ce que vise l'enseignant.

Deuxième inconvénient : même une fois compris que ce qui est visé est le nombre qui s'écrit en fait 0,...cela porte à croire qu'un nombre décimal est nécessairement un nombre compris entre 0 et 1 (puisque c'est toujours le cas de la « partie décimale »), et/ou, inversement, qu'un nombre est décimal dès qu'il est compris entre 0 et 1 ! Je l'ai très souvent constaté chez les candidats au CRPE, notamment.

La seule signification intrinsèque que pourrait avoir cette « partie décimale » serait la « distance à N » (écart avec l'entier le plus proche)...encore que ce serait assez bizarrement seulement avec les entiers inférieurs !

À quoi donc sert-il de définir la partie décimale ? À rien ! Ce n'est qu'une habitude, répétée de génération en génération. Je pense donc qu'**on ne devrait jamais parler de partie décimale**.

Conclusion

Cet article avait pour but essentiel de montrer combien la confusion entre nombre et écriture (surtout, écriture décimale) est courante, et a des effets dévastateurs à tous les niveaux d'enseignement. Elle est source d'incompréhensions profondes chez les élèves. Parfois même chez les enseignants car ils ne comprennent pas toujours pourquoi leurs élèves ne comprennent pas, et ne peuvent donc pas les aider, parce qu'ils passent, involontairement, de l'un (le nombre) à l'autre (l'écriture), sans en avoir conscience ou en tout cas, sans permettre aux élèves de saisir la distinction fondamentale entre nombre et écriture de nombre. La question que pourraient sans doute se poser ces collègues est « Alors, comment enseigner cette distinction ? ». Ce serait le sujet d'un autre article, mais finalement pas si nécessaire, car le simple fait d'être désormais avertis devrait permettre aux collègues de corriger l'essentiel des cas litigieux et de comprendre enfin certaines incompréhensions des élèves afin de mieux y remédier.

Jean Toromanoff est professeur honoraire de l'INSPÉ d'Orléans.

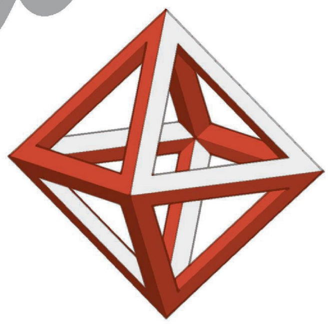
jean.toromanoff@mailo.com

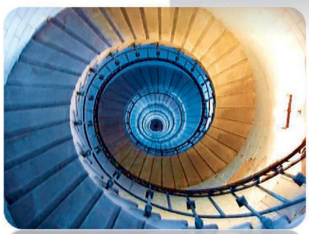
APMEP

Journées Nationales
du 21 au 24 octobre 2023

Maths en l'R

Rennes





Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

« De la maternelle à l'université »

Sommaire du nº 549

Faites parler les nombres !

APMEP

www.apmep.fr