

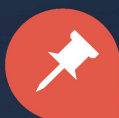
Le bulletin de l'APMEP - N° 549

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université

Édition Juillet, Août, Septembre 2023

Faites parler les nombres ! ⁷



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>



Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents via une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufilesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est jointe la plaquette
Visages 2023-2024 de l'APMEP.

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Lionel PRONOST, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Éric ASTOUL, Nicolas CLÉMENT, Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL, Sixtine MARÉCHAL, Jean-Sébastien MASSET.

Équipe T_EXnique : Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Septembre 2023. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau



Calculer ou faire parler les nombres ?

Consacrer autant de temps à acquérir des techniques opératoires à l'ère des calculatrices, n'est-ce pas un peu ringard ? Éric Trouillot propose une réflexion. Des pistes concrètes viennent la compléter dans la version numérique de la revue.

Éric Trouillot



Il a fallu des siècles pour que les chiffres indiens s'implantent définitivement et supplantent les chiffres romains. On sait aujourd'hui que derrière cette bataille culturelle, lors de la première moitié du deuxième millénaire, se cachait la lutte entre les abacistes, fervents défenseurs du calcul à l'aide d'abaques ou de bouliers, et les algoristes qui prônaient l'utilisation d'algorithmes écrits à la main utilisant le système de numération indien. En fait, jusqu'à l'arrivée des chiffres indiens, les calculs se pratiquaient essentiellement avec des tables à calculs, les abaques, qui existaient sous de nombreuses formes. Avec ces tables à jetons, la manipulation et la verbalisation étaient présentes lors de ces échanges, le triptyque *Manipuler-Verbaliser-Abstraire* était déjà là ! En parallèle de l'installation de ces chiffres indiens, des techniques opératoires écrites font leur apparition. Ces techniques opératoires très puissantes, face aux jetons des abaques, ont donné force et légitimité à ces nouveaux chiffres et au système de numération écrite associé. Fibonacci de Pise ne savait pas à ce moment, qu'avec son *Liber Abaci*, il allait contribuer à l'installation d'une culture de l'opération écrite qui allait s'installer pour plusieurs siècles... Évidemment, l'arrivée de l'imprimerie a encore accentué cette dynamique.

Les célèbres techniques opératoires font-elles parler les nombres ?

L'école républicaine née à la fin du XIX^e siècle avec la Troisième République va donner une place importante dans l'apprentissage du calcul à ces techniques opératoires et à la mémorisation des

tables. C'est le cœur de l'enseignement du calcul en élémentaire car désormais, avec l'école de Jules Ferry, tous les enfants passent par les bancs de l'école. L'apprentissage des tables et des opérations posées entre dans l'imagerie populaire et sera transmis de génération en génération dès 1870. La dimension automatiser, voire récitation, pour les tables de multiplication prend une place très importante et les techniques opératoires posées, comme leur nom l'indique, technicisent la relation aux opérations et aux nombres avec des processus cadrés et très algorithmiques. Cela enferme l'élève dans une démarche où le sens peut ne pas s'installer ou très vite s'échapper et laisser place à des automatismes non construits et vides de sens.

Le sketch  sur les tables de multiplication de l'humoriste Jacques Bodoïn, dans les années 60, traduit bien cette relation sociétale aux tables de multiplication. On peut avoir l'impression d'une bonne maîtrise du calcul mais ce peut être une totale illusion.

Un exemple avec cette addition posée pour illustrer le problème !

Permettez-moi de théâtraliser « dans la peau d'un élève de primaire » cette addition posée avec les deux nombres 967 et 35.

$$\begin{array}{r} 967 \\ + 35 \\ \hline \end{array}$$

Je sais que je dois commencer par la droite et additionner les nombres de la première colonne $5 + 7$, facile, ça fait 12, j'écris le 2 en-dessous du trait



horizontal de la première colonne et je n'oublie pas la retenue 1 que je place au-dessus de la deuxième colonne. Me voilà désormais avec l'addition des nombres de la deuxième colonne $1 + 6 + 3$, facile, ça fait 10. J'applique la règle que je connais bien, je place le 0 sous le trait horizontal au niveau de la deuxième colonne et la retenue 1 au-dessus de la troisième colonne. Et me voilà avec le calcul de la troisième colonne $1 + 9$, facile...

J'affirme qu'à ce stade de l'opération, notre élève a déjà perdu tout contact avec les nombres initiaux à additionner : 967 et 35. Il est pris dans une procédure très cadrée, un bel algorithme, à l'intérieur duquel il peut très bien fonctionner comme un « *automath* » sans trop se poser de questions. De plus, les calculs à effectuer, étant très simples, peuvent donner l'illusion d'une parfaite maîtrise du sujet. En fait, notre élève pratique du « petit calcul mental » et surtout, il ne calcule pas avec des nombres mais avec les chiffres qui composent les nombres, c'est peut-être le problème majeur de ces techniques opératoires. Le résultat 1 002 qui apparaît en fin de procédure sous la barre horizontale n'a absolument aucun lien de sens avec les deux nombres de départ. Cette addition posée qui peut concerner tout élève de l'école élémentaire est l'exemple même du calcul qu'il faudrait mentaliser, puis éventuellement écrire en ligne. Par exemple, en partant de 967 et en y additionnant trois dizaines, éventuellement par étapes, 977, 987, 997 et terminer avec l'ajout de cinq unités, éventuellement avec un palier à 1 000 puis enfin 1 002. De plus, cette pratique permet un travail sur les ordres de grandeur et l'approche des nombres par la gauche, en conformité avec le sens de lecture et d'écriture des nombres. Cette démarche a beaucoup plus de sens et de cohérence. Eh oui ! Nous vivons les nombres de gauche à droite. Lorsque je prononce ou écris 967, je dis ou je vois dans cet ordre neuf centaines puis soixante et enfin sept.

Notre cerveau a été formaté pour appréhender chaque nombre dans ce sens, en partant de sa plus grande partie, milliers, centaines ou dizaines pour aller vers les unités. Les techniques opératoires, mise à part la division, font exactement

le contraire et nous obligent lors d'une opération posée (addition, soustraction et multiplication) à commencer par la droite et les unités. Le sens est cassé, c'est un véritable choc mental. L'élève se perd dans les méandres des retenues, des colonnes, des virgules qui l'éloignent du sens des nombres présents pour finalement trouver un nombre final n'ayant plus aucun lien de sens avec les nombres initiaux. Facile à enseigner car très algorithmique, facile à visualiser par la pose en ligne et colonne, facile à corriger. Disons-le clairement, les techniques opératoires nous ont totalement piégés et continuent de nous piéger !

Précision importante : les pratiques mentales, de la gauche vers la droite, se rapprochent des techniques utilisées avec le boulier qui, dans le cas d'une telle addition, nécessitent déjà « d'écrire » le grand nombre sur le boulier avec l'ajustement des anneaux des trois premières colonnes puis il faut « poser » 35 sur 967. Il y a véritablement la notion d'ajout que l'on retrouve dans la mentalisation évoquée. **C'est une grande différence de perception avec la technique posée de l'addition qui casse totalement la structure même du nombre par l'inversion de lecture, nous faisant perdre au passage l'indispensable perception de l'ordre de grandeur, que seul le sens gauche vers droite permet.** L'apport du boulier dans la construction de notre relation aux nombres et aux opérations est peut-être l'élément majeur qui distingue la culture orientale de la culture occidentale. C'est ce processus de mentalisation des nombres et des opérations qui explique, à mon avis, une partie des écarts considérables entre les élèves orientaux et occidentaux dans les études internationales sur les performances en calcul et ensuite, par prolongement naturel, en résolution de problèmes.

Essayons de remettre le calcul dans le bon sens !

Le problème que posent ces techniques opératoires est également culturel. Cela fait des générations que s'est installée dans la population l'idée qu'apprendre à calculer, c'est apprendre à poser



des opérations. La prise de conscience dans le monde éducatif du premier degré (professeurs des écoles, conseillers pédagogiques, PEMF et IEN¹) concernant le caractère contre-productif de la trop grande place prise par ces techniques opératoires dans les apprentissages nombres/opérations est de plus en plus forte. En parallèle, la place du calcul mental dans les programmes ne cesse de grandir depuis les programmes de 2002. Sans refaire l'histoire, on peut évoquer un « trou d'air » dans les pratiques mentales lors des trois dernières décennies du siècle dernier. C'est en partie en raison de la mise en place de la réforme des « maths modernes » qui a demandé une énergie considérable aux enseignants, les a déstabilisés et a contribué à modifier leurs pratiques avec tous les excès que l'on a connus. Conséquence, le temps de la classe étant contraint : moins de géométrie et moins de mental dans les pratiques. De plus, à partir du milieu des années 70, le développement « grand public » des machines (calculatrices, puis ordinateurs, puis tablettes et *smartphones*) a contribué à cette diminution des pratiques. On a tous pensé que les machines allaient pouvoir nous dispenser, au moins en partie, des apprentissages du calcul. **Or, calculer, c'est créer des liens entre les nombres qui vont se traduire par des réseaux dans le cerveau.** Ces liens additifs, soustractifs, multiplicatifs ou « divisifs » ne peuvent se créer entre des nombres que si le sens et l'activité sont présents, tout le contraire de l'« *automath* » ! Les quatre opérations sont des maillons entre les nombres qui permettent de créer ces réseaux. La densité de ces réseaux va se prolonger en répertoire mental au fur et à mesure que tous ces liens se consolident et s'étendent. L'image du chemin dans la forêt qui se forme avec l'accumulation des passages de promeneurs en est une parfaite métaphore, et l'idée est de créer de nombreux chemins pour les organiser en réseaux. Calculer, ce n'est pas que trouver le résultat de l'opération. Cette image réductrice binarise² la relation aux

nombres et n'installe pas une bonne relation avec le signe = qui devient juste une flèche vers la droite. Alors qu'en fait, il faut viser la création d'un répertoire de liens numériques et opératoires, le plus riche possible, une sorte de caisse à outils pour résoudre des problèmes. Mais si la caisse à outils ne contient qu'une clé de 10 et un tournevis, la panoplie de problèmes que l'on peut résoudre se trouve très réduite ! À défaut de construire ce sens du nombre et des opérations avec une mentalisation forte, c'est malheureusement l'innomérisme qui a prospéré dans nos sociétés occidentales au cours de ces dernières décennies.

Comment sortir de ce piège ?

- Poursuivre sans relâche la pédagogie explicative, notamment en direction des jeunes enseignants en primaire, pour sortir de cette image iconique du « graal » que serait la maîtrise des opérations posées.
- Continuer à militer pour une place centrale du calcul mental réfléchi dans l'enseignement du calcul, comme le rapport Torossian-Villani nous y invite clairement, avec une mise en avant de la dimension ludique et du plaisir de la gymnastique avec les nombres et les opérations.
- Continuer dans les classes à déplacer le curseur des pratiques vers une mentalisation plus forte à la place du temps passé à poser des opérations. Car, évidemment, le temps de la classe est contraint et ce temps supplémentaire consacré au calcul mental réfléchi doit être récupéré sur d'autres activités. C'est essentiel car c'est bien souvent un défaut de répertoire mental qui bloque nos élèves pour rentrer sereinement dans la résolution de problèmes. Cette approche est complémentaire du nécessaire travail de la maîtrise de la langue.

Mais le paramètre central qui crée trop souvent le blocage reste le défaut d'un solide répertoire

1. PEMF : Professeur des Écoles Maître Formateur. IEN : Inspecteur de l'Éducation Nationale.

2. Binariser signifie rendre binaire, donc mise en place d'une problématique avec deux issues. La pratique classique du calcul, accentué par les apprentissages de type tables de multiplication, renvoie à une vision binaire « une opération, un résultat », que l'on peut prolonger par « je sais / je ne sais pas » ou « j'ai juste / j'ai faux ». Cette vision réductrice de la relation aux nombres ne favorise pas le raisonnement et renforce l'« *automath* » qui veille en chacun d'entre nous. On peut parler d'un formatage culturel qui s'est mis en place de génération en génération.



mental. De plus, le sens de l'Histoire est clair. Après des siècles de luttes entre abacistes et algoristes, l'installation de cette culture des algorithmes est désormais bien en place.

Ne serions-nous pas dans un nouveau grand virage de l'Histoire ? Aujourd'hui, regardez autour de vous : qui pose des opérations ? Qui a besoin de les poser comme ce fut le cas pour les générations auparavant ? Eh oui, plus guère d'exemples ne vous viennent à l'esprit, mis à part encore quelques commerçants sur les marchés... Bientôt, il n'y aura plus qu'à l'école que l'on posera des opérations ! Et pour quel bénéfice pédagogique ? La seule opération dont la technique posée a véritablement du sens est la division mais c'est celle que l'on aborde en dernier puisque l'on a besoin des trois autres opérations, le mal est déjà fait !

Jusque dans les années 1970, un enseignant pouvait dire à un élève qu'il était fondamental, voire vital, d'apprendre à calculer et de savoir poser ses opérations car cela lui serait indispensable dans sa vie quotidienne. Et l'élève pouvait le vérifier autour de lui. Ce discours n'est plus possible aujourd'hui. La pratique régulière, quotidienne de ces opérations posées est en train de disparaître, elle est désormais dévolue aux machines. Du triptyque *Calcul mental-posé-instrumenté* en vigueur depuis quelques décennies, la société glisse inexorablement vers le diptyque *Calcul mental-instrumenté*. Il faut donc nous adapter et tendre dans l'enseignement du calcul à l'école élémentaire et au collège vers un nouvel équilibre *Calcul mental-Calcul instrumenté*. Il est fondamental et urgent de mettre un accent fort sur l'enseignement du calcul mental avec une véritable didactique dans le cadre d'une progression par cycle. Cette culture reste encore à construire et à généraliser. La partie écrite longtemps occupée par les techniques opératoires devrait à mon sens progressivement glisser vers le calcul en ligne, pour la trace et la mémoire. Bien sûr, il bouscule des siècles de pratiques et le choc culturel et éducatif est immense. C'est une révolution

qui nous attend et il nous faut l'organiser au plus vite dans nos classes, sinon c'est l'innomérisme qui va encore se développer.

Au final, l'objectif est de créer pour chaque élève un répertoire mental le plus riche possible. Pour ce faire, il y a quelques écueils à éviter. Notamment l'idée tenace qu'il suffit d'apprendre des résultats par cœur et qu'ensuite ces résultats deviendront automatisés et seront à la disposition du cerveau pour faire du calcul « intelligent ». Les tables de multiplication sont le parfait exemple de ce « neuromythe ». Les neurosciences nous le disent clairement, le cerveau a besoin de comprendre pour apprendre dans la durée. C'est donc exactement le contraire qu'il faut mettre en place. C'est la pratique régulière du calcul mental réfléchi qui, avec de la répétition, va stabiliser des résultats automatisés. En fait, il y a unanimité sur l'objectif qui est de développer des automatismes opératoires, mais attention à la façon de l'atteindre. Anecdote personnelle : avec des années de pratique du jeu *Mathador*, je me suis régulièrement retrouvé dans une situation de fabrication d'un nombre-cible avec, parmi les cinq nombres disponibles, un nombre entre 11 et 20, nombre obtenu par le lancer de l'icosaèdre, le dé à 20 faces. Petit à petit, par accumulation de tests et de parties, j'ai automatisé des résultats des tables de 11 à 20. Sans aucun effort de mémorisation active, mon cerveau a stabilisé dans ma partie automatisée le début des tables de 12 à 19. Ce ressenti d'apprentissages « à l'insu de mon plein gré » est confirmé par de nombreux autres joueurs et élèves. Dans la construction et la stabilisation d'automatismes, l'activité et le sens devraient toujours être présents avec de la régularité et de la répétition.

Un autre écueil repose sur une pratique ancestrale de l'enseignement du calcul. En situation mentale ou écrite, l'enseignant dit très souvent à ses élèves : « Ça fait combien ? ». Nos cerveaux sont formatés par l'idée que calculer, c'est trouver le nombre réponse d'un calcul. Cette pratique ritualisée avec l'ardoise et le procédé dit « de La Martinière »³ a binarisé la relation aux

3. Procédé La Martinière (appelé aussi Méthode Tabareau) : il s'agit d'une activité rapide, conduite oralement par le maître, dans laquelle les élèves sont sollicités pour écrire les réponses, parfois pour présenter leur procédure de calcul. L'objectif de ces séances est souvent d'ordre évaluatif. Sources : Canopé  et INRP .



nombres et aux opérations. De plus, elle enferme l'élève dans une capsule trop souvent vide de sens dont l'issue est « je sais » ou « je ne sais pas » et ne va pas du tout favoriser la création recherchée de réseaux de nombres.

Pour sortir de ce deuxième écueil, une clé réside dans l'idée de retourner régulièrement l'entonnoir... Accompagner le « 6×7 , ça fait combien ? » de la question « *Comment fais-tu pour fabriquer 42 ?* ». Ce retournement de situation, apparemment anodin, est fondamental pour sortir de la binarité de la réponse attendue. D'une unicité de la réponse, nous passons à une infinité de décompositions, l'entonnoir est retourné. À la première réponse, il n'y a que 42 qui valide un voyant vert, pas 41, ni 43... En revanche, 6×7 est l'une des réponses possibles à la deuxième question, mais il y en a une infinité d'autres : 2×21 ; 3×14 ; $40 + 2$; $30 + 12$; $45 - 3$; $50 - 8$; $84 \div 2$; $420 \div 10$; $4 \times 10 + 2$; $5 \times 10 - 8$; etc. Cette pratique favorise la constitution de réseaux de nombres et permet de construire le sens des opérations. Elle installe une vision active du calcul et ne conforte pas l'« *automath* » qui veille en chacun d'entre nous. De plus, en essayant d'atteindre ce nombre-cible, l'estimation de la zone du nombre implique un travail indirect mais permanent sur les ordres de grandeur, encore un paramètre supplémentaire pour sortir du « *Ça fait combien ?* ». De la même façon que la régularité des pratiques en calcul mental réfléchi mène à la stabilisation d'automatismes, la régularité de pratiques de calcul de type « à l'envers » va aussi mener vers la stabilisation de connaissances automatisées « à l'endroit ».

Par exemple, en début de cycle 2, c'est la régularité des activités de décompositions avec un jeu comme *Shut the box* qui va permettre dans la durée d'automatiser le résultat de $6 + 4$, de $7 + 3$, de $8 + 2$ et de $9 + 1$, donc les différentes décompositions de 10. Ce travail sur les multiples décompositions d'un nombre est créateur de liens et de réseaux de nombres. Il peut même devenir jubilatoire, notamment avec l'apport du jeu.

Cela peut paraître paradoxal mais ces inversions

de paradigmes dans les pratiques d'enseignement du calcul permettent, avec de la régularité et de la répétition, d'installer un répertoire sans forcément faire l'effort de mémorisation active, même s'il ne faut pas s'interdire par la suite la consolidation de répertoires par des apprentissages de type par cœur, mais plutôt en fin de processus.

Rechercher un bon équilibre entre mental et écrit

Dans le cadre d'une résolution de problème, l'élève pense encore trop souvent qu'il doit poser ses opérations, que c'est même l'objectif majeur. Cette sacralisation de l'opération posée peut détourner l'élève de l'idée de chercher, raisonner, représenter et modéliser. Il faut poursuivre la déconstruction de ce modèle encore très présent et le remplacer par une pratique régulière de gymnastique mentale avec les nombres et les opérations. Ce travail de mentalisation de la relation aux nombres et aux opérations peut se mettre en place de la façon suivante : démarrage par une recherche mentale qui peut s'accompagner à l'écrit de schémas et d'opérations écrites en lignes. Et si c'est nécessaire, car trop compliqué à gérer mentalement ou en ligne, deux pistes : l'opération posée ou la calculatrice. Ce mode de fonctionnement permet de bien distinguer le raisonnement du choix des opérations avec la partie calcul.

Dans cette recherche du point d'équilibre entre mental et écrit, ne pas oublier que l'écrit est ou devrait être le prolongement de la pensée. D'où l'importance fondamentale d'installer un véritable enseignement du calcul mental en amont puis en parallèle de tous les apprentissages écrits en résolution de problèmes ou en calcul. Le temps d'enseignement étant contraint, il faut donc nécessairement réduire la part consacrée à l'apprentissage des techniques opératoires écrites et augmenter de façon significative le temps consacré aux pratiques mentales.



La verbalisation

Manipuler-Verbaliser-Abstraire, le triptyque, clé de voûte du rapport Torossian-Villani, place la verbalisation au centre de ces trois verbes qui jalonnent l'apprentissage en mathématiques. Dans cette quête perpétuelle du sens et de la recherche d'un équilibre entre sens et technique, il faut peut-être rapprocher l'enseignement des mathématiques de l'enseignement d'une langue vivante.

En effet, les mathématiques sont un langage. La verbalisation et les échanges sont-ils toujours présents dans nos pratiques de classe entre la phase de recherche et la phase des écrits ? Pourtant, ce moment d'échanges dans la classe, aussi bien en calcul mental réfléchi qu'en résolution de problèmes, permet à chacun de s'enrichir, dans le prolongement de sa propre recherche ou en découverte d'autres procédures.

C'est dans ce cadre que l'on entend parfois dans la classe des « Ah ouiii », l'équivalent du célèbre « haha » cher à Martin Gardner ou du « Whaou » cher à Manu Houdart. Ces instants de grâce ne sont possibles en collectif qu'à l'oral, plus rarement à l'écrit où l'exercice est plus solitaire. Pour découvrir et s'approprier un nouveau raisonnement, un élève doit l'entendre. Un élève qui verbalise son raisonnement ou sa procédure, met un haut-parleur sur sa pensée et le diffuse dans la classe. L'appropriation de nouveaux schémas mentaux, de nouvelles procédures est ensuite une affaire de temps. C'est là que les deux piliers *Régularité-Répétition* entrent en scène et vont permettre aux découvertes, dues à la verbalisation et aux échanges, de devenir des apprentissages, disponibles alors pour d'autres découvertes. Ce qui a engendré le « Ah ouiii » a trouvé une place dans un des réseaux de neurones, c'est désormais une connaissance !

La verbalisation, c'est aussi apprendre par l'écoute des autres ; la dimension collaborative est importante. Elle concourt à fédérer un groupe

avec l'apprentissage de la prise de parole et de l'écoute. À l'image de la création de réseaux de nombres pour les faire parler et leur donner sens afin de fabriquer cet indispensable répertoire mental, la verbalisation est un outil qui permet de fabriquer des liens entre les élèves et d'enrichir les modes d'apprentissage de façon collective.

Quels outils pour faire parler les nombres et s'en faire des amis ?

Les quelques outils présentés ci-dessous ont tous en commun de faire vivre la verbalisation et les échanges dans la classe avec en toile de fond l'indispensable présence des trois piliers *Régularité-Répétition-Verbalisation*.

Le diaporama

Une condition matérielle : disposer dans sa classe d'un ordinateur couplé à un vidéo-projecteur ou un TBI. Dans ce cas, vous pouvez vous lancer. De nombreux logiciels (Powerpoint, OpenOffice, etc.) permettent de créer en quelques clics un diaporama. C'est simple à gérer, modifiable à tout moment avec des copier/coller. Au-delà de la partie technique très accessible, il y a de multiples intérêts pédagogiques. C'est une façon de construire de façon évolutive sa progression annuelle de calcul mental. Avec une fréquence d'au moins deux séances par semaine, la régularité et la répétition s'installent naturellement. Automatisé, réfléchi, avec des situations jeux en photo, le calcul mental peut prendre toutes les formes possibles dans un diaporama, mais la géométrie (symétrie), les grandeurs (périmètre/aire), l'analyse (fonctions) peuvent aussi y trouver leur place. Les exemples de diaporamas de type « *Questions Flash* » sont désormais très nombreux sur l'internet, comme dans les documents d'accompagnement des programmes ou sur le site de l'APMEP⁴.

Attention de ne pas se cantonner à une simple vérification de connaissances façon « La Martinière » avec l'ardoise. Le diaporama pose un cadre dans

4. Diaporamas pour le cycle 3 : , brochures « *calcul mental et automatismes* » (collège ou lycée). Certains sites comme Maths Mentales  permettent de se créer sa propre bibliothèque de diaporamas avec des données aléatoires.



la classe pour définir le moment où les échanges autour des procédures vont être sollicités. C'est un moment où l'on va apprendre des procédures nouvelles par l'écoute des autres, il y a une dimension collaborative très forte dans la pratique régulière du diaporama en classe. Pour légitimer les échanges à l'oral autour des procédures comme un outil pédagogique d'apprentissage à part entière, le diaporama a toutes les qualités et le potentiel pour devenir pour l'oral ce que le cahier est à l'écrit.

Dans la pratique, il faut solliciter les élèves pour leur proposer d'explicitier leurs procédures. Lorsque la culture des échanges autour du diaporama commence à s'installer, certains élèves plus introvertis ont de réelles difficultés pour prendre la parole et expliciter leur raisonnement. Il faut laisser le temps à chacun de rentrer dans ce mode d'apprentissage différent et ne pas hésiter dans les premiers temps à s'appuyer sur les volontaires et ceux qui ont une maîtrise de l'oral et de la communication plus solide, de façon à donner des pistes et des idées à toute la classe. C'est alors un enrichissement collectif qui favorise la flexibilité mentale de chacun et qui, dans la durée, va développer le sens du nombre et des opérations.

Les résultats des études de Denis Butlen dans « *Le calcul mental, entre sens et technique* » sur ces questions vont dans ce sens. Il est important de préciser que c'est confortable à gérer pour l'enseignant dans la mesure où il endosse le rôle de chef d'orchestre. En effet, il gère le défilement des questions qui apparaissent à l'écran et peuvent être lues à chaque fois. Puis, après le temps de réflexion, en fonction des mains levées, il distribue le temps de parole dans la classe et apporte éventuellement des compléments. Ce fonctionnement laisse naturellement une place à l'erreur qui se glissera parfois dans les échanges. C'est un moment idéal pour faire réagir le groupe et apporter les corrections nécessaires avant une validation collective. Sans banaliser l'erreur, elle

va s'inscrire dans le processus d'apprentissage et c'est parfois l'occasion d'en profiter pour mettre en évidence des mauvais raccourcis du cerveau et de donner du sens à l'erreur afin de la dépasser.

Les neurosciences cognitives apportent quelques arguments supplémentaires. En effet, le diaporama s'adresse à la fois à la mémoire visuelle et à la mémoire auditive avec la verbalisation et les échanges dans la classe. Ce croisement favorise la mémorisation qui suit la compréhension. Le principe du diaporama est également en phase avec les préconisations majeures des neurosciences cognitives :

- attention ;
- engagement actif ;
- régularité-répétition ;
- retour d'information rapide.

Le *feedback*⁵, souligné comme important par les neurosciences, est un point fort du diaporama. L'élève cherche et obtient un retour immédiat sur la validation ou non de sa recherche.

Reste la question de l'institutionnalisation de ce type de pratique. Un résumé est toujours possible sur le cahier, de façon à laisser une trace écrite sur des exemples de procédures ou des propriétés sur les nombres et les opérations. Ce résumé peut aussi se construire progressivement par de l'affichage dans la classe. La trace écrite et la mémoire deviennent alors collectives, et ce peut être complémentaire avec le cahier individuel. Sous cette forme, l'écrit retrouve sa place naturelle comme prolongement de la pensée. L'écrit a également une place possible, avec l'ardoise ou un brouillon, lors de questions de calcul mental réfléchi, de façon à soulager la mémoire de travail et écrire des calculs intermédiaires, mais toujours en insistant sur l'écriture en ligne, en phase avec le registre mental, contrairement aux techniques opératoires posées.

Le jeu

La liste des jeux dans le domaine des nombres et des opérations est impossible à établir. C'est donc

5. Le *feedback* est abordé et bien expliqué par Dehaene dans « *Apprendre, les talents du cerveau* ». On pourra lire un bon résumé sur le site Les artisans de la formation



un choix très personnel que je vous propose et qui n'enlève rien aux qualités de tous les autres. Pour jouer avec une classe, il est essentiel de bien maîtriser le jeu choisi et d'y prendre du plaisir car ces deux paramètres seront bien entendu ressentis par vos élèves. Il est aussi important de sélectionner quelques jeux sans trop s'éparpiller, de façon à permettre à chaque élève de s'approprier totalement les règles et, dans la durée, de faire vivre le triptyque *Régularité-Répétition-Verbalisation* pour enrichir le répertoire mental. Enfin, inscrire la pratique d'un jeu dans une véritable progression annuelle est un objectif vers lequel il faut tendre, toujours dans l'idée de la construction de ce répertoire mental si important.

Dans la version en ligne de cet article, je propose une sélection de jeux (*Shut the box*, *Duo*, *Trio* et *Mathador*) pour faire vivre le calcul mental à l'envers de la Grande Section à la Troisième avec du plaisir et de l'apprentissage !

Conclusion

L'installation d'une double culture très complémentaire de la verbalisation et du jeu en classe de mathématiques est certainement un axe majeur pour faire parler les nombres et les apprivoiser. Les prolongements et les bienfaits sont multiples.

C'est aussi construire une véritable mentalisation de la relation aux nombres et aux opérations avec l'idée de se fabriquer un répertoire mental numérique et opératoire le plus riche possible.

C'est aussi dépasser cette image scolaire et anxigène des mathématiques pour mettre en avant la beauté cachée des mathématiques.

C'est peut-être une clé pour sortir de la spirale négative de l'innomérisme de ces dernières décennies.

Pour atteindre ces ambitieux objectifs, il est important de scénariser toutes ces pratiques mentales dans le cadre d'une progression par cycle. L'articulation de tous ces outils (diaporamas - jeux - pratiques mentales) est une clé. En effet, chaque élément

pris isolément n'est qu'un ingrédient de la recette qui n'a de sens que globalement, à l'image de la cuisine, de la littérature ou du cinéma.

Permettez-moi pour la touche finale concernant cette noble quête de faire parler les nombres, d'établir un parallèle avec les écrits d'Edgar Morin et notamment son éloge permanent de la pensée complexe. Depuis des décennies, Edgar Morin développe l'idée d'une pensée qui, au lieu de simplifier puis de disjoindre les éléments d'une analyse en les rangeant dans des cases, devrait au contraire chercher les conjonctions qui distinguent ces éléments sans forcément les disjoindre. La pensée complexe est un éloge de la recherche de création de liens unificateurs. C'est exactement la même chose pour l'enseignement des nombres et du calcul. Il faut que nous dépassions l'enseignement réducteur du « 6×7 , ça fait combien ? » de façon à vraiment faire parler ces nombres et, pourquoi pas, parler avec eux !

Pistes de lecture

- [1] Grégory Chambon. *Histoire des nombres*. Que sais-je ?, 2020.
- [2] Denis Butlen. *Le calcul mental, entre sens et technique*. PUFC, 2007.
- [3] Rémi Brissiaud. *Premiers pas vers les maths*. Retz, 2007.
- [4] Stanislas Dehaene. *La bosse des maths, 15 ans après*. Odile Jacob, 2010.
- [5] Stanislas Dehaene. *Apprendre, les talents du cerveau*. Odile Jacob, 2018.
- [6] Jean Toromanoff. *Promenade dans dix symboles de base en mathématiques*. APMEP, 2017.
- [7] Edgar Morin. *Leçon d'un siècle de vie*. Hachette Pluriel, 2022.
- [8] Edgar Morin. *Introduction à la pensée complexe*. Poche, 2014.

Une sitographie est disponible dans la version numérique de l'article.

.....◆.....
 Éric Trouillot est professeur au collège Victor Hugo à Besançon. Il est également le créateur du jeu *Mathador*.

© APMEP Septembre 2023

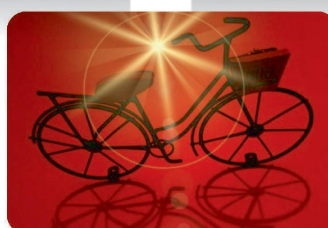
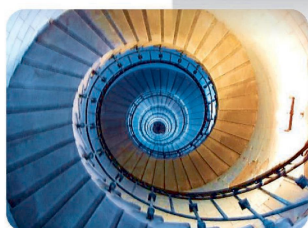


Journées Nationales
du 21 au 24 octobre 2023

Maths en



rennes



Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public
« De la maternelle à l'université »

Sommaire du n° 549



Faites parler les nombres !

Éditorial

Opinions

Hommage à Pierre Legrand — Christiane Zehren

✦ Faites parler et écrire les nombres en unités de numération ! — Catherine Houdement & Frédéric Tempier

✦ Calculer ou faire parler les nombres ? — Éric Trouillot

✦ Nombre et suite de chiffres — Jean Toromanoff

✦ Construire la suite des nombres au cycle 1 — Serge Petit

Avec les élèves

Le pari des mois des anniversaires — Jean-François Kentzel

✦ Foot-thèque en cycle 3 — Sandrine Lemaire & Christine Monnoir

✦ Les premiers nombres, on en parle en PS — Laurence Le Corf

Les *sacamaths* — Nathalie Braun & Houria Lafrance

1 Ouvertures

3 Petite enquête sur être ou ne pas être un entier — François Boucher 58

Les amidakujis — Alice Ernoult & Stéphane Gaussent 65

L'aiguille de Buffon, encore et encore — Ivan Boyer & Karim Zayana 75

14 Récréations

Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 81

✦ La table d'addition magique — Sébastien Reb 84

Des problèmes dans nos classes — Valérie Larose 86

✦ Calcul sans peine — Olivier Rioul 88

Au fil du temps

Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau 90

Matériaux pour une documentation 92



CultureMATH

