Le bulletin de l'APMEP - N° 548

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Avril, Mai, Juin 2023

Dehors les maths !

APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane Zehren

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr

Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

À ce numéro est joint le BGV nº 230
spécial « Journées Nationales »

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : *Claire Piolti-Lamorthe.*

Responsable coordinatrice de l'équipe : *Cécile Kerboul.*

Rédacteurs : *Vincent Beck, François Boucher, Richard Cabassut, Séverine Chassagne-Lambert, Frédéric De Ligt, Mireille Génin, Cécile Kerboul, Valérie Larose, Alexane Lucas, Lise Malrieu, Marie-Line Moureau, Serge Petit, Daniel Vagost, Thomas Villemonteix, Christine Zelty.*

« Fils rouges » numériques : *Gwenaëlle Clément, François Couturier, Jonathan Delhomme, Nada Dragovic, Fanny Duhamel, Laure Étévez, Marianne Fabre, Yann Jeanrenaud, Armand Lachand, Agnès Veyron.*

Illustrateurs : *Nicolas Clément, Stéphane Favre-Bulle, Pol Le Gall, Olivier Longuet, Sixtine Maréchal.*

Équipe TEXnique : *Sylvain Beauvoir, Laure Bienaimé, Isabelle Flavier, Philippe Paul, François Pétiard, Guillaume Seguin, Sébastien Soucaze, Sophie Suchard.*

Maquette : *Olivier Reboux.*

Correspondant Publimath : *François Pétiard.*

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François Pétiard
Dépôt légal : Juin 2023. ISSN : 2608-9297.
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

AU FIL DES MATHS

Un soupçon de géométrie, une pincée d'algèbre et quelques racines carrées

Pour le plaisir de la (re)découverte ou pour imaginer de nouvelles pistes d'activités avec les élèves, quelques calculs autour des racines carrées à partir de matériaux historiques.

Marie-Line Moureau

Un point sur les notations

Les mathématiques se sont longtemps écrites en mots et non en symboles et les mathématiciens ont calculé dès la plus lointaine antiquité avec des racines carrées sans avoir de notation spécifique. Si la notation avec radical a précédé l'invention et l'utilisation du signe $=$[1], elle est assez récente en regard de la très longue histoire des mathématiques. Les historiens s'accordent en effet pour l'attribuer à Christoff Rudolff dans *Die Coss* (1525) où il introduit la notation $\surd$. La raison du choix de ce signe est controversée.

Cette notation ne s'est pas imposée tout de suite. Le R majuscule, éventuellement barré obliquement, utilisé par Fibonacci dans son *Practica geometriæ* de 1220 a continué à avoir de nombreux adeptes. Mais, que ce soit avec l'une ou l'autre de ces notations, une difficulté demeure, relative à la place laissée aux ambiguïtés : le système de parenthésage n'existant pas, comment faire la distinction entre racine carrée de 16 à laquelle on ajoute 9, soit 13, et la racine carrée de $16+9$, soit 5 ?

Chaque mathématicien a essayé de lever cet obstacle et a adopté son propre codage ; par exemple, pour n'en citer qu'un, Rafael Bombelli dans son traité *L'Algebra* de 1572 utilise *Rc* pour racine cubique et *Rq* pour racine carrée, et inscrit si nécessaire l'expression entre deux L, le dernier à l'envers.

La figure 1 montre son choix d'écriture pour notre $\sqrt[3]{\sqrt{4\,352}+16}$ (*.p.* signifiant *plus*).

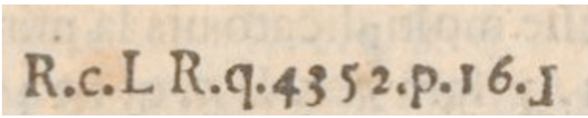


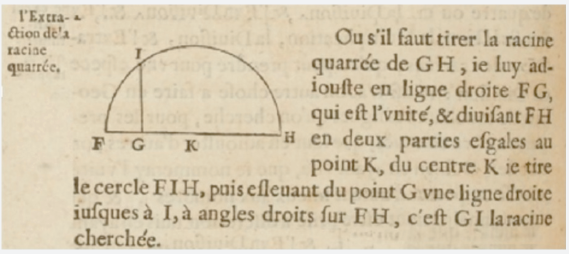
Figure 1. *Extrait de l'*Algebra *de Bombelli (1579, p. 161).*

En 1637, dans sa *Géométrie*, Descartes reprend le symbole de Rudolff et il ajoute une barre supérieure couvrant toute l'expression, le raccordement de $\surd$ et de la barre donnera notre $\sqrt{}$.

Une valeur approchée (et très approximative) de racine carrée en s'inspirant de Descartes

Dans le livre 1 de son ouvrage *La Géométrie*, Descartes révolutionne la géométrie en définissant des opérations arithmétiques sur des longueurs dont les résultats sont encore des longueurs. Que la somme de deux longueurs soit une longueur ne paraît peut-être pas révolutionnaire, mais que leur produit en soit une, et non un rectangle, est en complète contradiction avec la pensée grecque qui avait prévalu jusque-là.

1. Proposé par Robert Recorde dans son traité d'algèbre *The Whetstone of Witte* en 1557, il explique : « *Si j'ai choisi une paire de parallèles, c'est parce qu'elles sont deux lignes jumelles, et que rien n'est plus pareil que deux jumeaux.* »


l'Extraction de la racine quarrée.

Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouste en ligne droite F G, qui est l'vnité, & diuisant F H en deux parties esgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis esleuant du point G vne ligne droite iusques à I, à angles droits sur F H, c'est G I la racine cherchée.

Ou s'il faut tirer la racine carrée de GH*, je lui ajoute en ligne droite* FG*, qui est l'unité, et divisant* FH *en deux parties égales au point* K *je tire le cercle* FIH*, puis élevant du point* G *une ligne droite jusqu'à* I*, à angles droits sur* FH*, c'est* GI *la racine cherchée.*

Figure 2. La Géométrie*, Descartes, 1637, p. 298.*

Descartes donne la méthode pour construire la racine carrée de la longueur GH (figure 2).

Considérons donc la figure suivante :

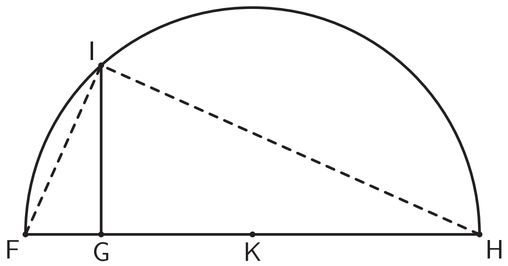


Figure 3. *Construction d'une racine carrée.*

Le segment [FH] est le diamètre du demi-cercle de centre K.

La droite (IG) est perpendiculaire à (FH) et le triangle FIH est rectangle en I.

Alors $\text{IG}^2 = \text{GF} \times \text{GH}$.

Cette formule enseignée jadis en collège s'obtient en appliquant le théorème de Pythagore dans chacun des trois triangles rectangles FIH, IGH et IGF.

Ceci étant posé, intéressons-nous par exemple à $\sqrt{245}$.

Il est clair qu'en construisant la figure avec FG $= 1$ et GH $= 245$, il n'y aurait plus qu'à lire une valeur approchée de $\sqrt{245}$ en mesurant IG.

Mathématiquement parfait... mais singulièrement peu pratique à mettre en œuvre !

Un encadrement de racine carrée grâce à Théon d'Alexandrie

Théon d'Alexandrie (à ne pas confondre avec Théon de Smyrne) est un mathématicien grec, ayant vécu au IVe siècle de notre ère, connu entre autres pour ses commentaires de l'*Almageste* de Ptolémée... et pour être le père d'Hypatie.

Considérons la figure suivante où ABCD et AGFE sont deux carrés.

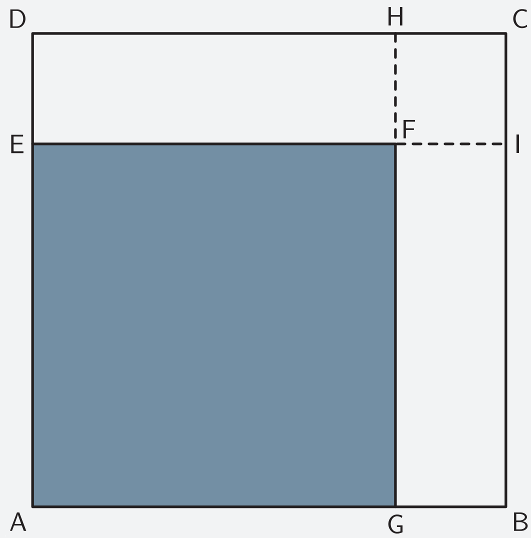


Figure 4. *Décomposition canonique d'un carré.*

Cette figure est souvent algébrisée car, en posant AG $= b$ et GB $= a$, elle illustre l'identité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Intéressons-nous encore à $\sqrt{245}$.

Posons que ABCD a pour aire 245. Notre problème consiste alors à déterminer un encadrement de la longueur du côté [AB].

On « enlève » le carré AEFG de sorte que son côté soit un entier, le plus grand possible. Il reste alors un gnomon constitué de deux rectangles superposables et d'un carré.

Puisque $15^2 = 225$ et $16^2 = 256$, on a AG $= 15$ et le gnomon a une aire égale à 20.

De plus, GB est égal à un nombre a inférieur à 1.

En décomposant le gnomon on obtient :

$$2 \times (15 \times a) + a^2 = 20$$

soit $30a + a^2 = 20$.

On tire de cette relation la majoration $30a < 20$, donc $a < \frac{2}{3}$.

La valeur $15 + \frac{2}{3}$ est une valeur approchée par excès de AB. Pour nous qui connaissons et préférons les décimaux, retenons AB $< 15{,}7$.

Il est clair que $30a + 1 > 30a + a^2$ donc

$$30a + 1 > 20 \text{ et } a > \frac{19}{30}.$$

Puisque $\frac{19}{30} = 0{,}63\ldots$, on peut affirmer que :

$$\mathrm{AB} > 15{,}6.$$

D'où l'encadrement $15{,}6 < \sqrt{245} < 15{,}7$.

On peut, pour déterminer un meilleur encadrement, considérer cette fois que le carré AEFG a pour côté 15,6 et que AB $= 15{,}6 + a$, avec a inférieur à 0,1. Et ainsi de suite.

Extraction de racine carrée « à la main »

La figure utilisée par Théon (figure 4) est à l'origine de la méthode d'extraction de racine carrée « à la main » qui a longtemps été enseignée.

Cherchons par exemple la racine carrée du nombre 935 089.

Ce nombre s'écrit avec six chiffres ; la partie entière de sa racine carrée a donc trois chiffres.

Recherche du chiffre des centaines a

Puisque $900^2 < 935\,089$ alors $a = 9$.
$\sqrt{935\,089} = 900$ à 100 près par défaut.
Dans la figure précédente, ABCD est un carré d'aire 935 089. Enlevons le carré AEFG d'aire 900^2. Il reste un gnomon G_1 d'aire $935\,089 - 810\,000 = 125\,089$.

Recherche du chiffre des dizaines b

Chercher le chiffre des dizaines revient à chercher une valeur approchée par défaut de $\sqrt{935\,089}$ à 10 près. Soit R cette valeur approchée, $R = 900 + 10b$.
Considérons le gnomon G_1.
On a $(900 \times 10b) \times 2 + (10b)^2 \simeq 125\,089$ (presque égal en restant inférieur).

$$100b \times (180 + b) \simeq 125\,089.$$

Nous cherchons donc le plus grand entier b inférieur à 9, tel que $b(180 + b) \leqslant 1\,250$.
Puisque $6 \times 186 = 1\,116$ et $7 \times 187 = 1\,309$, il est clair que $b = 6$ et $\sqrt{935\,089} = 960$ à 10 près par défaut.
Si on retire du gnomon G_1 d'aire 125 089, le gnomon d'aire $100b(180+b)$ avec $b = 6$, il reste un gnomon G_2 d'aire 13 489.

Recherche du chiffre des unités c

Chercher le chiffre des unités revient à chercher la valeur approchée par défaut à 1 près de $\sqrt{935\,089}$. Soit R cette valeur approchée, $R = 960 + c$.
Décomposons le gnomon G_2.
On a $(960 \times c) \times 2 + c^2 \simeq 13\,489$.

$$c(1\,920 + c) \simeq 13\,489.$$

On obtient $c = 7$ car $7 \times 1\,927 = 13\,489$.
Conclusion :

$$\sqrt{935\,089} = 967.$$

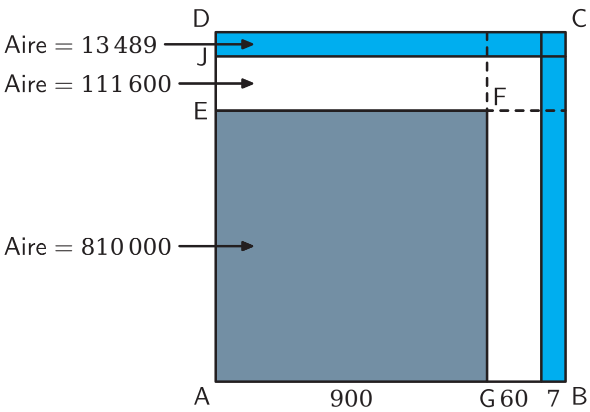


Figure 5. *Illustration de l'algorithme d'extraction.*

Dans le cas où le nombre proposé n'est pas un carré parfait, on continue la procédure en cherchant le chiffre des dixièmes d. Il suffit d'écrire que la valeur approchée au dixième par défaut est $967 + 0{,}1d$ et de dérouler la méthode.

Voici donc un nouvel exemple : cherchons la racine carrée de 258 500.

La partie entière de ce nombre s'écrit avec trois chiffres.

Recherche du chiffre des centaines a

Il est clair que $a = 5$.
Et $258\,500 - 500^2 = 8\,500$, aire du gnomon restant.

Recherche du chiffre des dizaines b

$$\begin{aligned}(500 \times 10b) \times 2 + (10b)^2 &\leqslant 8\,500\\ 100b(100 + b) &\leqslant 8\,500\end{aligned}$$

Or, $100 \times 101 > 8\,500$, donc $b = 0$.

Recherche du chiffre des unités c

$$\begin{aligned}(500 \times c) \times 2 + c^2 &\leqslant 8\,500\\ c(1\,000 + c) &\leqslant 8\,500\end{aligned}$$

Or, $8 \times 1\,008 = 8\,064$ et $9 \times 1\,009 = 9\,081$, donc $c = 8$.

Recherche du chiffre des dixièmes d

$8\,500 - 8 \times 1\,008 = 436$: aire du gnomon restant.

$$\begin{aligned}(508{\times}0{,}1d){\times}2 + (0{,}1d)^2 &\leqslant 436\\ 0{,}01d(10\,160 + d) &\leqslant 436\\ d(10\,160 + d) &\leqslant 43\,600\end{aligned}$$

Or, $4 \times 10\,164 = 40\,656$ et $5 \times 10\,165 = 50\,825$, donc $d = 4$.

$\sqrt{258\,500} = 508{,}4$ à 0,1 près par défaut.

Conclusion

Ces petites activités autour des racines carrées n'ont rien d'original mais elles sont peut-être tombées un peu dans l'oubli. Mobilisant des configurations géométriques simples et des calculs algébriques modestes, elles permettent un petit détour du temps d'avant les calculatrices qui décoiffera certainement les élèves de collège ou de Seconde.

Pour aller plus loin

« Descartes a dit ». *Utilisation d'extraits de* La Géométrie *en classe de Seconde*. Gilles Waehren. Bulletin vert nº 463. 2006. APMEP. P. 186–191.

Sur l'histoire des notations

L'incontournable *A History Of Mathematical Notations* de Florian Cajori paru en 1928 (réédité en 2007) et disponible en ligne sur `archive.org` : .

Sur les algorithmes de calculs

Histoire d'algorithmes : du caillou à la puce, Belin, 2010 (sous la direction de Jean-Luc Chabert).

Marie-Line Moureau a été professeure de mathématiques et formatrice premier degré dans l'académie de Nantes. Aujourd'hui retraitée, elle est membre du groupe *Histoire des mathématiques* de l'Irem des Pays de la Loire et fait également partie du comité de rédaction d'*Au fil des maths*.
mlmoureau@aol.com

Sommaire du nº 548

Dehors les maths !

CERCLE DE RECHERCHE ET D'ACTION PÉDAGOGIQUES

CultureMATH

MATh.en.JEANS

APMEP

www.apmep.fr