

Le bulletin de l'APMEP - N° 548

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Avril, Mai, Juin 2023

Dehors les maths !



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>



Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents via une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est joint le BGV n° 230
spécial « Journées Nationales »

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTÉIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Nicolas CLÉMENT, Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Sixtine MARÉCHAL.

Équipe TeXnique : Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Juin 2023. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau



Au fil des problèmes

*Vous pouvez adresser vos propositions, solutions ou commentaires par courriel à :
 frederic.deligt2@gmail.com
 ou par courrier à :
 Frédéric de Ligt
 3 rue de la Pierrière
 17270 MONTGUYON*

Pour vos envois, privilégiez le courriel si possible. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler les formules. Merci d'avance.

Frédéric de Ligt



548-1 Une question de Charles Hermite

Soit un entier $n \geq 3$, combien de solutions entières strictement positives possède l'équation

$$x + y + z = n \text{ avec comme contraintes } \begin{cases} x \leq y + z \\ y \leq x + z \\ z \leq x + y \end{cases}$$



548-2 Vu sur le compte LinkedIn de Vincent Thill (Migennes)

Soit a, b, c, d des nombres réels tels que $a + b + c + d = 0$.

Montrer qu'alors on a toujours l'égalité : $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(abc + abd + acd + bcd)$

548-3 Eurêka !

Hiéron II, roi de Syracuse, vient de recevoir comme paiement des taxes des sacs de drachmes d'argent de la part de ses six fermiers généraux. Depuis l'affaire de la couronne en or, il se méfie. Il se pourrait très bien que certains d'entre eux aient pu s'entendre avec un atelier monétaire pour mélanger l'argent des pièces avec des métaux moins précieux. Il fait appel, une fois de plus, à son ami Archimède pour s'assurer que tout est régulier.



Cette fois, s'il y a de fausses drachmes, elles auront le même volume que les vraies. Par conséquent, il n'est pas nécessaire pour l'immortel savant d'aller prendre un bain pour s'acquitter de sa tâche. En revanche, il a à sa disposition une balance précise et un système de masses marquées ; il connaît déjà très exactement la masse d'une drachme d'argent. Par ailleurs, toutes les fausses pièces sont identiques mais ne pèsent pas comme une drachme et toutes les drachmes d'un fermier général sont soit fausses soit vraies. Plutôt que de prendre une pièce dans chacun des sacs des six fermiers généraux et de réaliser six pesées, égal à lui-même, Archimède a trouvé un moyen infallible de détecter tous les fraudeurs éventuels en seulement deux pesées.

Quelle est donc sa méthode ?



548-4 Une variante du problème du bâton brisé (Jean-Christophe Laugier-Rochefort)

On démontre que si l'on brise un bâton à deux endroits marqués au hasard, la probabilité que les trois morceaux obtenus puissent former un triangle est $\frac{1}{4}$.

Mais qu'en est-il, si au hasard, on casse d'abord le bâton en deux, puis on choisit l'un des deux morceaux, que l'on brise à son tour ?



À propos des problèmes parus précédemment

Suite à une erreur de transmission, les solutions aux quatre problèmes posés dans le numéro 545 proposées par Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques) sont parvenues trop tard à la rédaction pour être commentées dans le numéro précédent, pourtant elles l'auraient mérité. Vous pourrez les retrouver sur notre site à l'emplacement habituel.

546-1 Un triangle bien élevé

Toutes les contributions se concentrent sur l'obtention de triangles bien élevés primitifs. Ludovic Jany (Bolquère), Pierre-Alain Sallard (Paris), Patrick David (Cergy) et Bernard Coutu (Quint-Fonsegrives) proposent des familles de solutions.

Daniel Perrin (Orsay) et Jacques Vieulet (Ibos) démontrent que les seules hauteurs à considérer pour de tels triangles les partagent en deux triangles pythagoriciens. En utilisant les paramétrages classiques de ces triangles ils obtiennent tous les triangles bien élevés primitifs qui se subdivisent en deux familles.

Pierre Renfer (Saint-Georges-d'Orques) et Marie-Nicole Gras (Le Bourg-d'Oisans) partent de la formule de Héron qui donne l'aire d'un triangle et de la relation vérifiée par les triangles bien élevés pour obtenir, selon les auteurs, respectivement une équation du second et du troisième degré avec paramètres. La résolution fait apparaître deux familles de solutions dans le premier cas qui se fondent en une seule dans le second cas.

Quant à Gérald Anselme (Valleiry), il montre que tout triangle bien élevé s'obtient à l'aide d'un seul paramétrage faisant intervenir deux paramètres. Bien qu'il passe par le partage du triangle bien élevé en deux triangles pythagoriciens, mais sans utiliser de paramétrage de ces derniers, il obtient le même paramétrage que celui auquel madame Gras est parvenue.

546-2 Pour bien finir 2022 et débuter 2023...

Nicole Gras (Le Bourg-d'Oisans) et Pierre Renfer (Saint-Georges-d'Orques) établissent que la valuation de $2022^2!$ est supérieure à la valuation de $(2022!)^{2023}$ pour tous les facteurs premiers de 2022. Les autres contributions donnent diverses démonstrations du cas général : $n^2!/(n!)^{n+1}$ est toujours un entier. Daniel Perrin (Orsay), Pierre-Alain Sallard (Paris), Jordi Ordonez (Andorre), Pierre Carriquiry (Clichy), Gérald Anselme (Valleiry), Patrick David (Cergy) et son collègue Julien Sautet écrivent l'expression sous la forme d'un produit de coefficients binomiaux et donc d'un produit d'entiers. Robert Ferréol (Paris) reconnaît de son côté le nombre de partitions non ordonnées de $\{1, 2, \dots, n^2\}$ en n parties à n éléments. Enfin Ludovic Jany (Bolquère) interprète $(n!)^{n+1}$ comme l'ordre d'un sous-groupe du groupe des permutations des n^2 premiers entiers et rappelle que l'ordre d'un sous-groupe divise l'ordre du groupe.





546-3 Une extension de l'inégalité de Nesbitt

Selon les informations de Daniel Vacaru (Pitesti, Roumanie), cette inégalité est apparue pour la première fois dans la *Gazeta Matematică* (en roumain) n° 1/2003, sous la signature de l'enseignant Vasile Cârtoaje (Ploiesti). Toutes les solutions se proposent d'étudier le signe de la différence des deux membres de l'inégalité. Marie-Nicole Gras (Le Bourg-d'Oisans) réduit les deux termes au même dénominateur et développe complètement le numérateur. Un regroupement fait apparaître six termes dont trois sont positifs et trois sont négatifs. La conclusion s'obtient en appliquant le théorème de Muirhead à trois différences judicieusement choisies. Gérard Anselme (Valleiry) et Patrick David (Cergy), après un début identique et des factorisations partielles du numérateur, font apparaître ce dernier comme une somme de termes positifs. Jacques Vieulet (Ibos) adopte une autre méthode. La réduction au même dénominateur s'effectue par paires et une minoration de l'expression est obtenue en substituant aux trois dénominateurs les plus grands des trois. Le numérateur de l'expression minorante est alors nul. Enfin, Daniel Perrin (Orsay), Daniel Vacaru et son collègue Marin Chirciu (Roumanie) ainsi que Richard Beczkowski (Chalon-sur-Saône) entament leur solution de la même façon que la précédente, mais en ayant ordonné les trois inconnues, ils peuvent réorganiser leur calcul en une somme de trois termes positifs.

546-4 Heptasection d'un triangle

Il y avait bien des façons d'éviter l'introduction d'un repère cartésien pour résoudre cette question. La plupart des contributions font intervenir un lemme de proportion, consécutif au tracé d'une cévienne dans un triangle, qui établit l'égalité entre un rapport de longueurs et un rapport d'aires. Jean-Michel Sarlat (Saint-Savin-sur-Gartempe), Dominique Gaud (Migné-Auxances), Bernard Coutu (Quint-Fonsegrives), Gérard Anselme (Valleiry) et Jacques Vieulet (Ibos) considèrent de plus les sommets du triangle intérieur comme des barycentres des sommets du grand triangle ; Daniel Perrin (Orsay) et Yves Farcy (Saint-Pons-de-Thomières), quant à eux, concluent avec le lemme des chevrons ; Jean-Pierre Friedelmeyer (Osenbach) s'appuie sur le théorème de Thalès ; Marie-Nicole Gras (Le Bourg-d'Oisans) découpe le triangle en dix petits triangles et résout un système d'équations sur les aires ; Richard Beczkowski (Chalon-sur-Saône) passe par la composée de deux homothéties de centres différents mais qui reste tout de même une homothétie ; Pierre Renfer (Saint-Georges-d'Orques) et Jean Moussa (Arcueil) utilisent des coordonnées barycentriques ; Ludovic Jany (Bolquère) fait intervenir le théorème de Routh qui exprime le rapport entre l'aire d'un triangle et celle du triangle formé par trois céviennes.

Enfin Alain Bougeard (les Lilas) propose une solution qui a ma préférence, sans aucun calcul, à l'aide d'un pavage astucieux du plan. Il s'agit, à l'aide d'un réseau de parallèles, de paver le plan avec des pavés isométriques à IJK, considérés comme des pavés unité et de constater que le triangle ABC a pour aire l'équivalent de sept de ces pavés.

Toutes les contributions de ces auteurs sont consultables sur le site d'*Au fil des maths* à l'adresse : [▶](#) (onglet RÉCRÉATIONS puis suivre AU FIL DES PROBLÈMES).

Sommaire du n° 548



Dehors les maths !

Éditorial

Opinions

N'oublions pas la géométrie — Valentina Celi

✦ Le centre Galois — Philippe Grillot

Avec les élèves

✦ Arpenter la cour du collège — Émile Séguret

✦ Des maths au gymnase — Isabelle Audra

✦ Des maths en promenade — Ulysse Retailleau

✦ À vos maths ! Prêts ? Calculez ! — Marie Génin

Fabriquer des labyrinthes romains en Sixième
— Bernard Parzys & Thibaut Renard

On éclate les ballons ! — Alexane Lucas

Des œufs pour les statistiques en IUT
— Anne-Sophie Suchard

Ouvertures

Une curiosité numérique — François Boucher

1 ✦ Impliquer le corps pour faire des maths grâce à
Learn-O — Thierry Blondeau & Arnaud Simard 55

3 ✦ Le gratin d'aubergines — Pierre Pansu 62

3 ✦ Activités *Streetmath* — Marie Lhuissier &
7 Olga Paris-Romaskevich pour l'association
Mathématiques vagabondes, Nathalie Corson &
Alice Ernoult 68

11

11 **Récréations** 72

17 ✦ Le club des premiers — Olivier Longuet 72

23 Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 76

27 Des problèmes dans nos classes
— Valérie Larose 79

30

40 **Au fil du temps** 82

Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau 82

44 Un soupçon de géométrie, une pincée d'algèbre et
quelques racines carrées — Marie-Line Moureau 84

49 Matériaux pour une documentation 88

Courrier des lecteurs 95



CultureMATH



APMEP

www.apmep.fr