

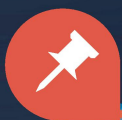
Le bulletin de l'APMEP - N° 548

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Avril, Mai, Juin 2023

Dehors les maths !



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>



Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents via une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufilesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

À ce numéro est joint le BGV n° 230
spécial « Journées Nationales »

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » **numériques** : Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Nicolas CLÉMENT, Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Sixtine MARÉCHAL.

Équipe TeXnique : Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Juin 2023. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau



Une curiosité numérique

Calculer les décimales de π , c'est rigolo mais cela peut-être très long. François Boucher nous propose une variation autour de la formule de Leibniz pour obtenir de nombreuses décimales sans trop d'efforts.

François Boucher

Naissance d'un problème

Parmi les nombreuses formules dans lesquelles le nombre π apparaît, l'une des plus connues est sans doute celle dite de Leibniz¹

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

La démonstration fut jadis accessible à un lycéen ; voir par exemple le problème du bac E 1986 de Nouvelle-Calédonie . Il est plutôt simple de prouver que la série converge vers $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$; la difficulté est de calculer l'intégrale pour qui ne dispose pas de la fonction arctan. Le lecteur esthète pourra consulter la belle preuve visuelle donnée dans *Au fil des maths* n° 547 .

Mieux, en posant $s_n = 4 \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$, on a l'encadrement (si n est pair) : $s_n < \pi < s_n + \frac{4}{2n+1}$ ce

qui permet de tenter du calcul numérique. Il est alors classique d'observer que la convergence est « lente » ; comme l'encadrement est de longueur $\frac{2}{n}$, $n = 2000$ ne garantit que la précision 10^{-3} et pour passer à la précision 10^{-4} , l'encadrement disponible impose de multiplier n par dix². Mesurée par le nombre de décimales exactes à obtenir, la complexité est donc exponentielle.

1. Connue des mathématiciens indiens au XIV^e siècle.

2. On verra plus loin que $|\pi - s_n| \sim \frac{1}{n}$, ce qui valide la condition nécessaire alors qu'a priori une majoration ne fournit qu'une condition suffisante.

3. Exacte ne signifie pas identique ; la p -ième décimale d'une valeur approchée $\bar{x}$ d'un réel x est dite exacte si $|x - \bar{x}| < \frac{1}{2}10^{-p}$; ainsi 0,9997 est une valeur approchée de 1 avec trois décimales exactes.

4. Cette question semble n'apparaître qu'en 1982 dans la revue *Mathematical Gazette*.

Un programme de calcul simple — dans lequel il est conseillé d'accumuler la somme en commençant par les termes les plus petits — fournit toutefois les valeurs approchées suivantes :

n	$\overline{s_n}$	$\overline{\pi}$
100	3,131 592 (0)	3,141 592
1 000	3,140 592 653 (8)	3,141 592 653
10 000	3,141 492 653 590 (0)	3,141 592 653 590
100 000	3,141 582 653 589 793 (4)	3,141 592 653 589 793

Les valeurs approchées de π étant fournies, par exemple, par la comptine « que j'aime à faire apprendre... »

On note bien que, si $n = 10^p$, la p -ième décimale n'est pas exacte³ à une unité par défaut près et que la différence $\pi - \overline{s_n}$ vérifie $0 < \pi - \overline{s_n} \approx 10^{-p} < 2 \times 10^{-p}$ comme prévu. Ce n'est pas exactement la même chose que $\pi - s_n$; mais $|\pi - s_n| < |\pi - \overline{\pi}| + |\overline{\pi} - \overline{s_n}| + |\overline{s_n} - s_n| \leq \frac{1}{2}10^{-3p} + 10^{-p} + \frac{1}{2}10^{-3p} = 10^{-p} + 10^{-3p}$. On a indiqué dans la colonne des valeurs approchées de s_n la $3p + 1$ -ième décimale calculée.

Le questionnement naît si on regarde les décimales suivantes : les $2p$ suivantes sont exactes ce qui appelle immédiatement une explication⁴. Il s'agit d'enquête.



Commençons par une majoration validant la petite expérience numérique précédente : si n est pair, $\pi - s_n \sim \frac{1}{n}$. On remplace n par $2n$ pour traduire l'hypothèse n pair. En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique et les propriétés de l'intégration, on obtient

$$\left| \pi - s_{2n} - \frac{1}{2n} \right| < \frac{1}{2(2n)^3}.$$

Cette dernière inégalité montre que, dans le cas $2n = 10^p$, l'erreur sur la p -ième décimale est bien de 1 par défaut, et que les $2p$ décimales suivantes sont exactes. Ainsi, avec $p = 5$, on peut calculer une valeur approchée de π avec quinze décimales exactes à l'aide d'un système de calcul utilisant des flottants IEEE 754 doubles⁵. Bien sûr, il s'agit là d'une constatation *a posteriori* puisqu'on disposait d'une valeur connue de π avec une précision suffisante.

Les nombres d'Euler

Reprenons le calcul précédent avec $n = 50\,000$ en calculant en multiple précision (par exemple, avec le module Decimal de Python ou le logiciel Maple). Pour une raison difficile à justifier *a priori*, il vaut mieux travailler avec $\frac{\pi}{2}$; de plus, prendre n tel que $2n$ soit une puissance de dix est fort utile, la lumière sera plus éclatante...

On obtient alors :

$$\bar{s} = 1,570\,786\,326\,794\,897\,619\,231\,321\,191\,639\,752\,052\,098$$

et on connaît

$$\frac{\pi}{2} = 1,570\,796\,326\,794\,896\,619\,231\,321\,691\,639\,751\,442\,098\ldots$$

Formons un tableau de différences : bloc de décimales exactes moins bloc de décimales calculées :

rang	5	15	25	35
différence	1	-1	5	-61

On en déduit que $\bar{s} + \frac{1}{10^5} - \frac{1}{10^{15}} + \frac{5}{10^{25}} - \frac{61}{10^{35}}$ est une approximation de $\frac{\pi}{2}$ à au moins 10^{-39} près.

5. L'IEEE 754 est une norme informatique sur l'arithmétique à virgule flottante mise au point par le *Institute of Electrical and Electronics Engineers* .

6. Il règne une grande cacophonie dans l'« arithmosphère » sur les définitions et les appellations ; convenons ici de suivre le site expert OEIS.

Avec $n = 5\,000\,000$, la durée de calcul reste acceptable.

$$\begin{aligned} \bar{s} &= 1,570\,796\,226\,794\,896\,619\,232\,321\,691\,639\,751\,392\,098\,584\,699 \\ &\quad 693\,652\,910\,487\,470\,911\,153\,908\,203\,648\,314\,499\,313\,747\,136\,171\,058 \\ \frac{\pi}{2} &= 1,570\,796\,326\,794\,896\,619\,231\,321\,691\,639\,751\,442\,098\,584\,699 \\ &\quad 687\,552\,910\,487\,472\,296\,153\,908\,203\,143\,104\,499\,314\,017\,412\,671\,058 \end{aligned}$$

Formons à nouveau le tableau de différences :

r	7	21	35	49	63	77	91
Δ	1	-1	5	-61	1385	-50521	2702765

On en déduit que

$$\bar{s} + \frac{1}{10^7} - \frac{1}{10^{21}} + \frac{5}{10^{35}} - \frac{61}{10^{49}} + \frac{1385}{10^{63}} - \frac{50521}{10^{77}} + \frac{2702765}{10^{91}}$$

est une approximation de $\frac{\pi}{2}$ à au moins 10^{-98} près.

Il est flagrant que la longueur des paquets de décimales exactes diminue alors que celle des paquets de décimales inexactes augmente et il est probable que les décimales exactes finissent par disparaître (pour un p donné).

On retrouve ainsi la même suite d'entiers que précédemment. Il ne reste plus qu'à consulter le site oeis.org pour obtenir l'information : il s'agit des nombres d'Euler *alternés* d'indice pair E_{2n} qui apparaissent dans le développement en série entière exponentielle de diverses fonctions ; on peut prendre comme définition⁶

$$\frac{1}{\cosh(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

ou aussi bien

$$\frac{1}{\cos(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n E_{2n}}{(2n)!} x^{2n} \quad |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Ces nombres d'Euler sont aussi ubiquistes que leurs cousins, les nombres de Bernoulli.

Intéressons-nous à un procédé de calcul élémentaire imaginé en 1877 par Philip Seidel (1821-1896), qui utilise un tableau du type triangle de Pascal, que le mathématicien anglais John Conway (1937-2020) appelait le



triangle « zigzag » ; les flèches indiquent le sens de remplissage du tableau (sens « *boustrophédon* ») ; chaque rangée orientée, à partir de la seconde, commence par 0 ; ensuite, la rangée est remplie en additionnant le nombre précédent et le nombre au-dessus de la flèche.

																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																					</
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----

On trouve les nombres d'Euler au signe près (alias nombres « sécants », alias nombres *zig*) dans la diagonale descendante de gauche. Bien sûr on peut se poser la question des nombres de la diagonale de droite ; il s'agit des nombres dits « tangents » (alias nombres *zag*) qui apparaissent dans le développement en série entière de la fonction $\tan$, pour $|x| < \frac{\pi}{2}$:

$$\tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{T_n}{n!} x^n = \frac{1}{1!}x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + \dots$$

Les nombres « zigzag » 1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, 1 385, 7 936 — qui apparaissent aux extrémités des lignes orientées — sont donc ceux du développement en série entière de

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \frac{1}{\cos(x)} + \tan(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Z_n}{n!} x^n \end{aligned}$$

Le tableau zigzag permet de les calculer simplement en ne faisant que des additions. La question est bien évidemment de comprendre tout cela.

Appel à la combinatoire

Commençons par donner une interprétation combinatoire des nombres Z_n due à Désiré André (1840-1917) ; on va suivre essentiellement son travail [1].

7. On pourrait considérer aussi, plus lourdement, des développements limités. Le credo en combinatoire est plutôt de travailler avec des séries formelles.

Démonstration

Pour $n \geq 2$, il introduit des permutations particulières de $\llbracket 1, n \rrbracket$ — qu'il appelle « alternées » — vérifiant :

$$\begin{aligned} &\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \sigma(4) > \dots \\ \text{ou} &\sigma(1) > \sigma(2) < \sigma(3) > \sigma(4) < \dots \end{aligned}$$

Appelons celles du premier type « montantes » (p.a.m.) et celles du second « descendantes » (p.a.d.). Il va de soi que ces notions se généralisent à tout ensemble fini totalement ordonné. Dans la suite, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on notera les images par σ aussi bien par $\sigma(i)$ que par σ_i et σ elle-même par concaténation des images : $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$; σ apparaît comme un mot. Ainsi 315462 est une p.a.d. et 4713265 est une p.a.m.

Si $n \geq 2$, l'involution de renversement $\sigma \mapsto \sigma^r$ définie par $\sigma^r(i) = n + 1 - \sigma(i)$ met en bijection les p.a.m. et les p.a.d. qui sont donc en nombres égaux. Soit A_n ce nombre.

Ainsi $A_2 = 1$ puisque la seule p.a.m. (resp. p.a.d.) est 12 (resp. 21) ; et $A_3 = 2$ avec deux p.a.m. 132 et 231.

On convient que l'unique permutation de $\{1\}$ est alternée (à la fois p.a.m. et p.a.d.), donc $A_1 = 1$; convenons aussi que $A_0 = 1$.

André démontre, à l'aide d'un argument combinatoire, la relation de récurrence :

$$2A_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_k A_{n-k} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Soit U une partie de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à k éléments ($0 \leq k \leq n$) ; si k est pair, soit ϕ (resp. ψ) une p.a.d. de U (resp. de $\bar{U} = \llbracket 1, n \rrbracket \setminus U$) ; la permutation σ de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ définie par $\sigma = \phi(n+1)\psi$ est p.a.d. ; si k est impair, on change p.a.d. en p.a.m. ; réciproquement toute p.a.d. ou p.a.m. de $\mathfrak{S}_{n+1}$ est de cette forme, et cela de façon unique (en tenant compte des cas limites $U = \emptyset$ ou $\bar{U} = \emptyset$). D'où la relation.

Comme il y a moins de p.a.m. que de permutations, on a $A_k \leq k!$ pour tout k . On peut alors considérer la somme de la série entière⁷ $\sum \frac{A_n}{n!} x^n$ qui possède un

rayon de convergence ≥ 1 . Posons $\Phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_n}{n!} x^n$;

quelques manipulations standard permettent de vérifier que $2\Phi' = 1 + \Phi^2$ sur $] -1 ; +1[$ et $\Phi(0) = 1$. On en déduit que $\int_0^x \frac{2\Phi'(t)}{1 + \Phi^2(t)} dt = x$ d'où $2 \arctan(\Phi(x)) - \frac{\pi}{2} = x$ et donc $\Phi(x) = \Psi(x)$ au moins sur $] -1 ; +1[$ ce qui suffit pour en déduire que $Z_n = A_n$ pour tout n .

Pour faire le lien avec le tableau zigzag, désignons par $E_{n,k}$ ($0 \leq k \leq n$) le nombre situé en ligne n et colonne k en suivant l'ordre boustrophédon du tableau pour la numérotation des colonnes ; ces nombres sont les nombres d'Entringer.





On a donc par construction du tableau :

$$E_{0,0} = 1,$$

$$E_{n,0} = 0 \quad (n \geq 1)$$

$$E_{n,k} = E_{n,k-1} + E_{n-1,n-k} \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n$$

Il est clair (?) que les conditions précédentes déterminent la suite des $E_{n,k}$ de façon unique. On veut démontrer que $A_n = E_{n,n}$.

Démonstration

Parmi les p.a.d. de $[1, n+1]$, on considère celles qui commencent par $k+1$ ($k \leq n$). Soit $\mathcal{A}_{n,k}$ leur ensemble et $a_{n,k}$ le cardinal de $\mathcal{A}_{n,k}$; c'est aussi le cardinal des p.a.m. qui finissent par la valeur $n+1-k$. On a $a_{0,0} = 1$ et $a_{n,0} = 0$ pour $n \geq 1$.

Un argument combinatoire⁸ permet de démontrer la formule d'Entringer $a_{n,k} = a_{n,k-1} + a_{n-1,n-k}$ pour $1 \leq k \leq n$.

Soit $\sigma \in \mathcal{A}_{n,k}$; donc $\sigma(1) = k+1$. Distinguons deux cas; si $\sigma(2) = k$, on lui associe σ' permutation de $[1, n]$ obtenue selon le modèle de l'exemple suivant ($n = 6, k = 4$) :

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 2 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{donne} \quad &\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{puis } \sigma' &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On supprime la première colonne et on effectue les translations utiles.

σ' est une p.a.m. vérifiant $\sigma'(1) = k$. On se convainc que $\sigma \mapsto \sigma'$ est une bijection. Et l'involution de renversement met les p.a.m. de $[1, n]$ démarrant en k en bijection avec les p.a.d. de $[1, n]$ démarrant en $n-k+1$. Il y a donc $a_{n-1,n-k}$ telles p.a.d.

Si $\sigma(2) < k$, on lui associe la permutation σ' de $[1, n+1]$ selon le modèle de l'exemple suivant ($n = 6, k = 4$)

$$\begin{aligned} \sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 2 & 6 & 4 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\ \text{donne } \sigma' &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 6 & 5 & 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a transposé les images k et $k+1$.

σ' est une p.a.d. démarrant en k . L'application $\sigma \mapsto \sigma'$ est bijective; on a donc $a_{n,k-1}$ telles p.a.d. On en déduit que $a_{n,k} = E_{n,k}$.

D'autre part, $a_{n,n}$ est le nombre de p.a.d. de $[1, n+1]$ qui commence par $n+1$ égal bien sûr au nombre de p.a.m. de $[1, n]$ donc égal à A_n .

Un développement asymptotique

Les systèmes de calcul formel savent calculer les nombres d'Euler; ainsi Maple nous donne pour le développement asymptotique de $\frac{\pi}{2} - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ (n pair)

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{(2n)^3} + \frac{5}{(2n)^5} - \frac{61}{(2n)^7} + \frac{1385}{(2n)^9} + O\left(\frac{1}{(2n)^{11}}\right).$$

On comprend dès lors l'intérêt de travailler avec $\frac{\pi}{2}$ et $2n$ égal à une puissance (> 1) de dix : ceci évite aux termes correctifs de se diluer dans la sommation.

On conjecture alors une formule du type (toujours avec n pair) :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2k+1} &= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{E_{2k}}{(2n)^{2k+1}} + O_{n\infty}\left(\frac{1}{n^{2m+1}}\right) \end{aligned}$$

qu'il s'agit de démontrer tout en majorant la constante qui se cache dans le $O()$.

Ce problème a été résolu seulement en 1989 par J. M. Borwein, P.B. Borwein et K. Dilcher [3]. La clef est une formule bien moins connue que la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin mais de la même famille : la formule de Boole⁹.

Une version de cette formule s'énonce ainsi : soit $x \in \mathbb{R}$ et m entier non nul; si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[x; x+1]$ alors pour $h \in [0; 1]$ et tout entier $m \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} E_k(h) \frac{1}{2} \{f^{(k)}(x+1) + f^{(k)}(x)\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\tilde{E}_{m-1}(h-t)}{(m-1)!} f^{(m)}(x+t) dt. \end{aligned}$$

8. Emprunté à [2].

9. Il y a malheureusement autant de formes pour cette dernière que d'auteurs... Nous allons suivre [3].



Les $E_k(X)$ sont les polynômes d'Euler, images réciproques des X^k par l'isomorphisme

$$P \mapsto \frac{1}{2} (P(X+1) + P(X)).$$

Les $\tilde{E}_m$ sont des fonctions périodiques de période 2 et de classe $\mathcal{C}^{m-1}$ définies à partir des polynômes d'Euler par $\tilde{E}_n(x) = E_n(x)$ pour $0 \leq x < 1$ et $\tilde{E}_n(1+x) = -\tilde{E}_n(x)$ pour tout x .

Le lecteur percevra sans doute une parenté (sous des hypothèses *ad hoc*) avec :

- une formule de Taylor :

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + \int_0^h \frac{(h-t)^{m-1}}{(m-1)!} f^{(m)}(x+t) dt;$$

- une formule d'Euler-Maclaurin :

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{B_k(h)}{k!} \int_0^1 f^{(k)}(x+t) dt - \int_0^1 \frac{\tilde{B}_{m-1}(h-t)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x+t) dt.$$

où les $B_k(X)$ sont les polynômes de Bernoulli¹⁰ et les $\tilde{B}_m$ des fonctions périodiques et régulières définies à partir des polynômes B_k .

Cette parenté s'explique en faisant appel aux opérateurs de composition.

La formule de Boole se démontre par récurrence en s'appuyant sur une intégration par parties, démonstration fort peu éclairante à dire vrai, car elle ne dévoile rien sur l'origine de cette formule.

On en déduit une formule sommatoire du type Maclaurin : on prend $h = \frac{1}{2}$ et $x = p \in \mathbb{N}^*$ et $m = 2M+1$, il vient

$$2(-1)^p f\left(p + \frac{1}{2}\right) = \sum_{h=0}^M \frac{1}{2^{2h}(2h)!} E_{2h} \{(-1)^p f^{(2h)}(p) - (-1)^{p+1} f^{(2h)}(p+1)\} + \int_p^{p+1} \frac{\tilde{E}_{2M}\left(\frac{1}{2}-u\right)}{(2M)!} f^{(2M+1)}(u) du$$

puis, supposant valides toutes les convergences utiles :

$$2 \sum_{p=n}^{+\infty} (-1)^p f\left(p + \frac{1}{2}\right) = \sum_{h=0}^M \frac{1}{2^{2h}(2h)!} E_{2h} \{(-1)^n f^{(2h)}(n) - \lim_{p \rightarrow \infty} (-1)^{p+1} f^{(2h)}(p+1)\} + \int_n^{+\infty} \frac{\tilde{E}_{2M}\left(\frac{1}{2}-u\right)}{(2M)!} f^{(2M+1)}(u) du$$

En prenant $f(x) = \frac{1}{x}$, on valide les convergences et on obtient une expression explicite du reste qui nous intéresse

$$2 \sum_{p=n}^{+\infty} (-1)^p \frac{1}{2p+1} = (-1)^n \sum_{h=0}^M \frac{E_{2h}}{(2n)^{2h+1}} - \frac{1}{2} \int_n^{+\infty} \tilde{E}_{2M}\left(\frac{1}{2}-u\right) \frac{2M+1}{u^{2M+2}} du.$$

Les $\tilde{E}_k$ sont continues et périodiques donc bornées, disons par C_k ; on en déduit que

$$\left| \frac{1}{2} \int_n^{+\infty} \tilde{E}_{2M}\left(\frac{1}{2}-u\right) \frac{2M+1}{u^{2M+2}} du \right| \leq \frac{C_{2M}}{2} \int_n^{+\infty} \frac{2M+1}{u^{2M+2}} du = \frac{C_{2M}}{2n^{2M+1}}.$$

En supposant n pair, on a donc

$$2 \sum_{p=n}^{+\infty} (-1)^p \frac{1}{2p+1} = \sum_{h=0}^M \frac{E_{2h}}{(2n)^{2h+1}} + r_{2M}$$

avec $0 \leq r_{2M} \leq \frac{C_{2M}}{2n^{2M+1}}$, ce qui, à M fixé, valide le développement asymptotique. On peut démontrer, en étudiant les variations de $E_n(x)$ sur $[0; 1]$, que $|\tilde{E}_{2M}(x)| \leq \frac{|E_{2M}|}{2^{2M}}$; on en déduit enfin que $r_{2M} \leq \frac{|E_{2M}|}{(2n)^{2M+1}}$.

Le calcul numérique peut alors être validé.

Calculer 1 000 décimales de π avec la formule de Leibniz

Le problème est donc de trouver un n et un M convenables; la condition suffisante est

$$\frac{2|E_{2M}|}{(2n)^{2M+1}} < \frac{1}{2} 10^{-1000}$$

10. Voir la page Wikipedia pour une brève revue.



On cherche n et M avec $n \gg M$ car le calcul des E_{2k} , bien que non coûteux en temps, l'est en mémoire ; on peut démontrer que

$$|E_{2k}| \sim \frac{4^{k+1}(2k)!}{\pi^{2k+1}}.$$

En utilisant des logarithmes décimaux, on obtient le tableau

$2k$	100	200	500	1 000
nombre de chiffres de E_{2k}	336	791	1 821	4 121

Une exploration numérique donne comme valeurs possibles $M = 118$ et $2n = 10^6$. Reste à écrire un programme de calcul (Xcas, Maple, Python avec le module Decimal) ce qui ne présente pas de difficulté particulière mais constitue un projet significatif.

D'autre part, l'équivalent donné de E_{2M} prouve que, à n fixé, la série $\sum \frac{E_{2M}}{(2n)^{2M+1}}$ est très grossièrement divergente ; ce qui n'empêche pas ses sommes partielles de fournir des termes correctifs efficaces.

Un complément numérique, disponible sur le site de l'APMEP, fournit démonstrations et programmes Python, raisonnablement absents de la version papier.

Un programme Python (donné en complément sur le site ) nous permet d'obtenir

```
3,141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 197 169 399 375 105 820 974 944 592 307 816 406 286
208 998 628 034 825 342 117 067 982 148 086 513 282 306 647 093 844 609 550 582 231 725 359 408 128
481 117 450 284 102 701 938 521 105 559 644 622 948 954 930 381 964 428 810 975 665 933 446 128 475
648 233 786 783 165 271 201 909 145 648 566 923 460 348 610 454 326 648 213 393 607 260 249 141 273
724 587 006 606 315 588 174 881 520 920 962 829 254 091 715 364 367 892 590 360 011 330 530 548 820
466 521 384 146 951 941 511 609 433 057 270 365 759 591 953 092 186 117 381 932 611 793 105 118 548
074 462 379 962 749 567 351 885 752 724 891 227 938 183 011 949 129 833 673 362 440 656 643 086 021
394 946 395 224 737 190 702 179 860 943 702 770 539 217 176 293 176 752 384 674 818 467 669 405 132
000 568 127 145 263 560 827 785 771 342 757 789 609 173 637 178 721 468 440 901 224 953 430 146 549
585 371 050 792 279 689 258 923 542 019 956 112 129 021 960 864 034 418 159 813 629 774 771 309 960
518 707 211 349 999 998 372 978 049 951 059 731 732 816 096 318 595 024 459 455 346 908 302 642 522
308 253 344 685 035 261 931 188 171 010 003 137 838 752 886 587 533 208 381 420 617 177 669 147 303
598 253 490 428 755 468 731 159 562 863 882 353 787 593 751 957 781 857 780 532 171 226 806 613 001
927 876 611 195 909 216 420 198 938 095 257 2
```

soit 1 009 décimales avec une formule n'en donnant en théorie que 6.

Cette introduction de termes correctifs dans le calcul de valeurs approchées de sommes de série ne s'applique pas uniquement à la série ici étudiée ; le lecteur curieux pourra faire ses propres expériences numériques sur les séries

$$\sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{n^k}, \sum_n \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^k}, \text{ et même } \sum_n \frac{1}{n^2}.$$

Références

- [1] Désiré André. « Sur les permutations alternées ». In : *Journal de mathématiques pures et appliquées* vol. 7 (1881). Disponible sur Gallica , p. 167-184.
- [2] Philippe Henry et Gerhard Wanner. « Zigzags with Bürgi, Bernoulli, Euler and the Seidel–Entringer–Arnold triangle ». In : *Elemente der Mathematik* vol. 74 (2019), p. 141-168.
- [3] Jonathan Borwein, Peter Borwein et Karl Dilcher. « Pi, Euler Numbers, and Asymptotic Expansions ». In : *American Mathematical Monthly* vol. 96. N° 8 (1989), p. 681-687.



François Boucher, à la retraite depuis quelques années, continue de s'intéresser aux mathématiques et à leur enseignement. Il fait également partie de l'équipe d'*Au fil des maths*.

boucherf@free.fr

© APMEP Juin 2023

Sommaire du n° 548



Dehors les maths !

Éditorial

Opinions

N'oublions pas la géométrie — Valentina Celi

✦ Le centre Galois — Philippe Grillot

Avec les élèves

✦ Arpenter la cour du collège — Émile Séguret

✦ Des maths au gymnase — Isabelle Audra

✦ Des maths en promenade — Ulysse Retailleau

✦ À vos maths ! Prêts ? Calculez ! — Marie Génin

Fabriquer des labyrinthes romains en Sixième
— Bernard Parzysz & Thibaut Renard

On éclate les ballons ! — Alexane Lucas

Des œufs pour les statistiques en IUT
— Anne-Sophie Suchard

Ouvertures

Une curiosité numérique — François Boucher

1 ✦ Impliquer le corps pour faire des maths grâce à
Learn-O — Thierry Blondeau & Arnaud Simard 55

3 ✦ Le gratin d'aubergines — Pierre Pansu 62

3 ✦ Activités *Streetmath* — Marie Lhuissier &
7 Olga Paris-Romaskevich pour l'association
Mathématiques vagabondes, Nathalie Corson &
Alice Ernoult 68

11

11 **Récréations** 72

17 ✦ Le club des premiers — Olivier Longuet 72

23 Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 76

27 Des problèmes dans nos classes
— Valérie Larose 79

30

40 **Au fil du temps** 82

Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau 82

44 Un soupçon de géométrie, une pincée d'algèbre et
quelques racines carrées — Marie-Line Moureau 84

49 Matériaux pour une documentation 88

49 **Courrier des lecteurs** 95



CultureMATH

