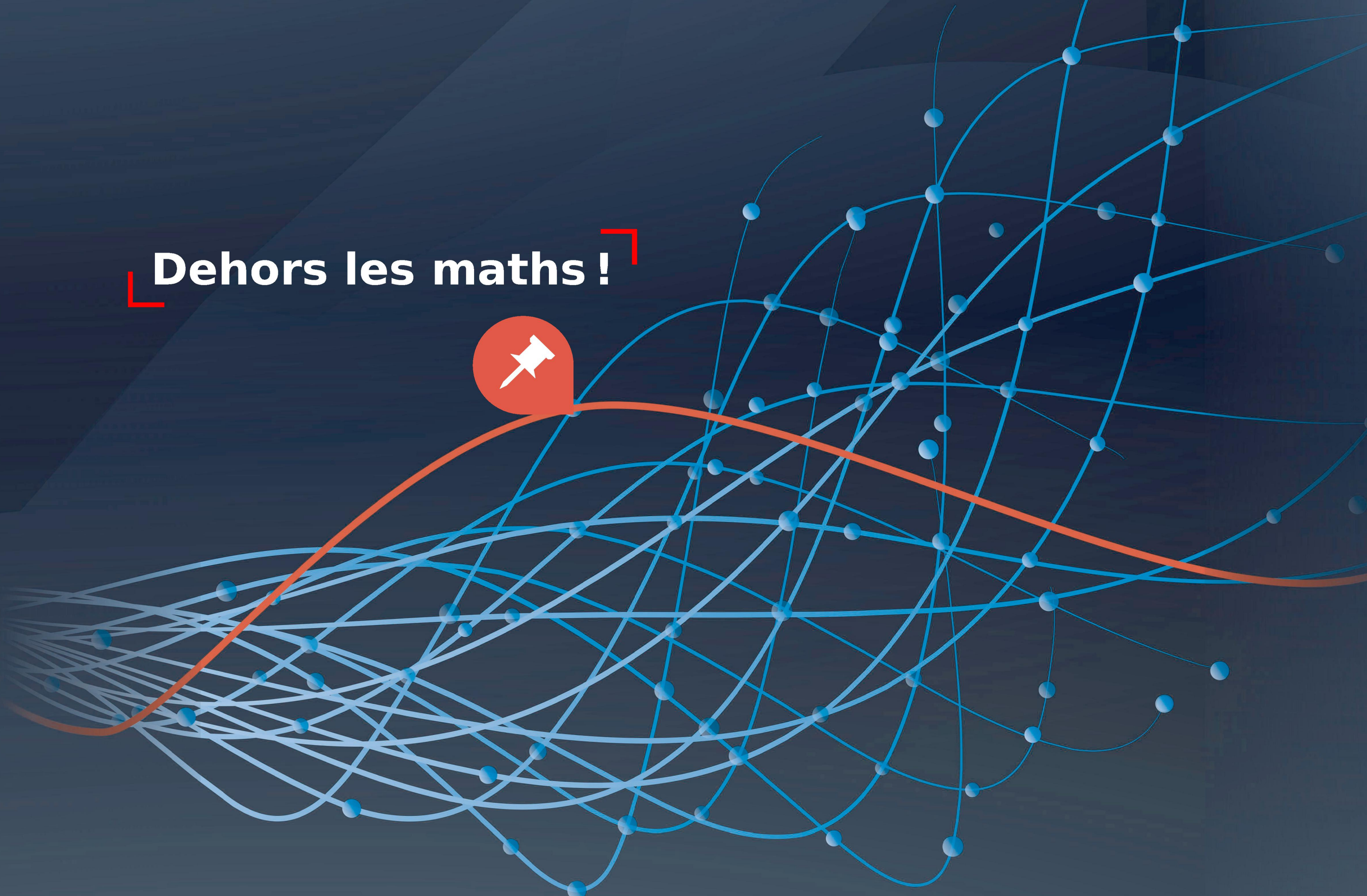
Le bulletin de l'APMEP - N° 548

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université. . .

Édition Avril, Mai, Juin 2023

Dehors les maths !



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr

Les articles sont en accès libre, sauf ceux des deux dernières années qui sont réservés aux adhérents *via* une connexion à leur compte APMEP.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

À ce numéro est joint le BGV nº 230
spécial « Journées Nationales »

AU FIL DES MATHS

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : *Claire PIOLTI-LAMORTHE.*

Responsable coordinatrice de l'équipe : *Cécile KERBOUL.*

Rédacteurs : *Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTEIX, Christine ZELTY.*

« Fils rouges » numériques : *Gwenaëlle CLÉMENT, François COUTURIER, Jonathan DELHOMME, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Agnès VEYRON.*

Illustrateurs : *Nicolas CLÉMENT, Stéphane FAVRE-BULLE, Pol LE GALL, Olivier LONGUET, Sixtine MARÉCHAL.*

Équipe TEXnique : *Sylvain BEAUVOIR, Laure BIENAIMÉ, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD.*

Maquette : *Olivier REBOUX.*

Correspondant Publimath : *François PÉTIARD.*

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD
Dépôt légal : Juin 2023. ISSN : 2608-9297.
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

Fabriquer des labyrinthes romains en Sixième

De l'observation de labyrinthes à leur fabrication, Bernard Parzysz et Thibaut Renard nous proposent dans cet article le récit d'un travail mené dans plusieurs classes de Sixième.

Bernard Parzysz & Thibaut Renard

L'année scolaire 2021-2022 a vu se dérouler la cinquième édition du dispositif « Regards de géomètre », organisée par l'association « Les Maths en Scène »[1]. Son objectif est de faire réaliser par les élèves (de la maternelle au lycée) *« une production artistique et/ou numérique, en lien avec les arts majeurs ou les arts des métiers, sous la forme d'une œuvre collaborative qui représente le regard mathématique et artistique des élèves sur le thème choisi. »* . Il s'agit d'un projet interdisciplinaire dans lequel doivent intervenir à la fois un scientifique et un artiste. Ce dispositif permet également de valoriser ces travaux par *« la réalisation d'une exposition des œuvres élaborées par les classes et par un colloque*[2] *afin que les élèves puissent faire une restitution de leur travail. »* (ibid.). Soixante thèmes étaient proposés cette année, parmi lesquels celui des labyrinthes.

Quatre classes de Sixième du Pas-de-Calais (trois du collège Albert Debeyre de Beuvry[3] et une du collège Louis Pasteur d'Oignies[4]) ont ainsi réalisé des œuvres sur ce thème.

Au collège de Beuvry, le thème du labyrinthe a été mis en lien avec l'art de la poésie, dans le but de construire des labyrinthes intégrant les poèmes rédigés lors d'une intervention artistique[5]. Pour ce qui est de l'aspect géométrique, les élèves ont assisté à une intervention ayant pour but de leur faire connaître la façon dont avaient été conçus et réalisés certains labyrinthes antiques [1], afin qu'ils puissent s'en inspirer pour leurs réalisations prévues.

Après avoir étudié la notion d'équidistance avec un épisode de *Kaamelott* [2] , ou encore les graphiques cartésiens avec *Le cercle des poètes disparus* [3], les élèves du collège de Beuvry ont commencé à travailler sur leur thème en visionnant un extrait du film *Inception* [4], au cours duquel Cobb propose un test à Ariane : *« Vous avez deux minutes pour dessiner un labyrinthe qui prenne une minute à résoudre. »* L'idée était de faire germer plusieurs questions relatives au tracé d'un labyrinthe. Comment faire en sorte que la résolution prenne le plus de temps possible ? Le nombre de chemins a-t-il une importance ? On peut alors se demander comment tracer, sous certaines contraintes de largeur, le chemin le plus long à l'intérieur d'une surface donnée.

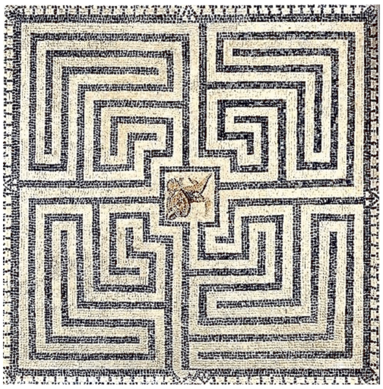
Dans la suite de l'extrait du film, Ariane se retrouve malgré elle dans un labyrinthe métaphorique : un rêve. Les élèves sont alors amenés à réfléchir sur les émotions qu'ils ressentiraient en se mettant à la place du personnage, face à d'autres représentations que l'image du labyrinthe tracé sur une feuille (ou au dos d'un paquet de céréales).

1. L'adresse courriel de contact de l'association est : regards.geometre@lesmathsenscene.fr. Site : .
2. Plusieurs élèves de chaque classe présentent leur projet à une assemblée de trois classes : choix des thèmes mathématique et artistique, explication des étapes de réalisation de l'œuvre.
3. Professeur : Thibaut Renard.
4. Professeur : Martin Reco.
5. Animée par la Maison de la Poésie des Hauts de France. Chaque classe a pu s'essayer à différents styles d'écriture (anadiplose, anaphore, mélanges de poèmes).

Ce fut également l'occasion d'évoquer d'autres notions mathématiques retrouvées par les élèves : parallélisme, symétrie axiale, orthogonalité, proportionnalité (*« Dans la vraie vie, cinq minutes de rêves c'est une heure »*).

Leurs représentations mentales stéréotypées des labyrinthes ont ensuite été chamboulées lors de l'intervention scientifique. En effet, depuis la préhistoire, trois grands types classiques de labyrinthes, respectivement dénommés « crétois », « romain » et « d'église », ont fait l'objet de représentations. Historiquement, ils sont apparus dans cet ordre, chaque type possédant ses caractéristiques propres (figure 1).

(a) *Labyrinthe « crétois », Tintagel (Grande-Bretagne), [5, h.t.]*



(b) *Labyrinthe « romain », Calvatone (Italie), [6, pl. 37].*

(c) *Labyrinthe « d'église », Sens (France), © CEREP Soc. Arch. de Sens.*

Figure 1. *Les trois grands types de labyrinthes historiques.*

Tous ces labyrinthes ont en commun de ne pas en être réellement, si l'on s'en tient au sens usuel de ce terme, tel qu'il est défini par le Larousse :

1. Dans l'Antiquité, vaste édifice comprenant d'innombrables salles agencées de telle manière que l'on ne trouvait que difficilement l'issue.
2. Réseau compliqué de chemins, de galeries, dont on a du mal à trouver l'issue ; dédale.

Dans les labyrinthes classiques, il n'y a ni impasse, ni bifurcation, mais au contraire un chemin unique (« unicursal ») qui conduit, certes après maints détours, mais sans aucune difficulté, de l'extérieur de l'édifice à la chambre centrale. Comme le fait remarquer, non sans humour, Umberto Eco [7, p. 64] :

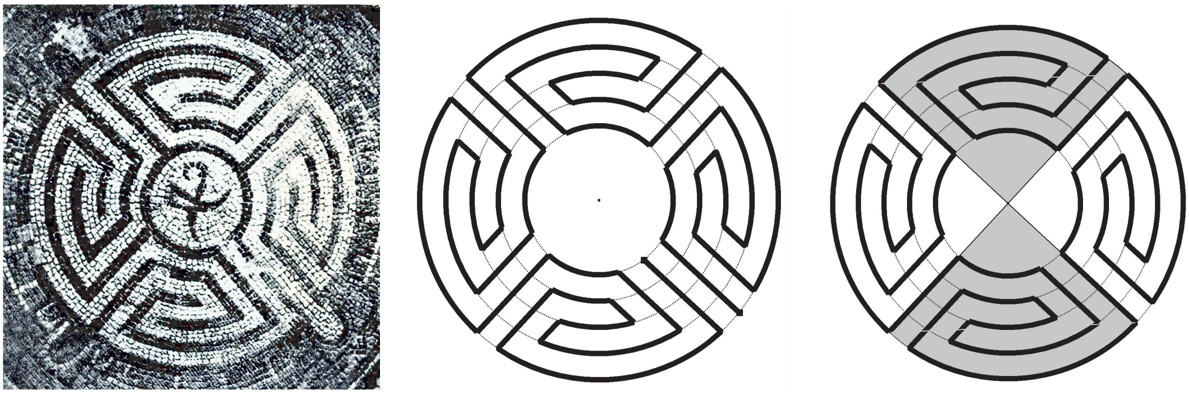
« [Le Labyrinthe] *ne permet à personne de s'égarer : vous entrez et vous arrivez au centre, puis vous allez du centre à la sortie. C'est pourquoi, au centre, il y a le Minotaure, sinon l'histoire perdrait toute sa saveur, ce serait une simple promenade de santé.* »

Parmi les trois types, le type « romain »[6] nous a semblé le plus accessible à de jeunes élèves, du fait que, sous sa forme prototypique, son algorithme de mise en place est relativement simple. En effet, un tel labyrinthe est divisé en quatre secteurs à peu près identiques ; dans chaque secteur, le chemin est construit sur une grille, il suit les lignes du réseau ainsi constitué et passe par tous les nœuds, de façon à être le plus long possible. Enfin, les secteurs sont parcourus successivement, sans retour, et ils se déduisent les uns des autres par des rotations autour du centre (au prix, toutefois, de petites adaptations, comme on le verra plus loin).

Les séances ont été conçues sous la forme d'une présentation dialoguée s'appuyant sur un diaporama vidéoprojeté.

6. La quasi-totalité des labyrinthes de ce type sont réalisés en mosaïque.

Les élèves ne connaissant pas la légende du labyrinthe de Crète, elle est rapidement évoquée : le Minotaure, l'architecte Dédale, Thésée, Ariane et son fil. . .



(a) *[6, pl. 42a].* (b) *Chemin.* (c) *Quarts de tour.*

Figure 2. *Labyrinthe d'Avenches (Suisse).*

Le premier labyrinthe proposé à l'étude est celui d'Avenches (Suisse), daté du milieu du IIIe siècle de notre ère (figure 2a). On fait tout d'abord apparaître quelques caractéristiques :

- le chemin (figure 2b) relie l'extérieur (entrée) à l'intérieur (sortie) ;
- il occupe toute la surface de la couronne ;
- il est constitué de quatre parties « pareilles », occupant chacune un quart de la couronne ;

La dualité entre le tracé du chemin et celui des murs, élément fondamental de tout labyrinthe, est soulignée : connaissant l'un, on peut en déduire l'autre sans ambiguïté.

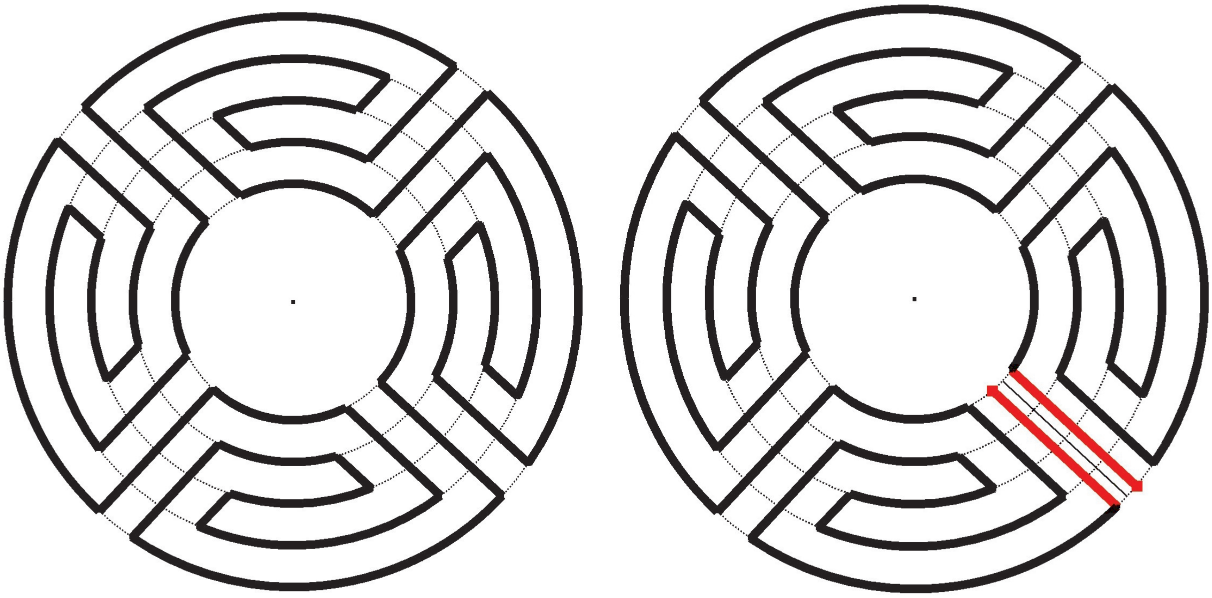
Il s'agit alors d'identifier, sur l'image projetée, le chemin et les murs. Un élève se présente au tableau et commence à suivre du doigt l'espace libre entre deux tracés.

Élève 1 (au tableau) : *On est bloqué, en fait. . .*
Élève 2 : *Oui, en plus c'est le chemin qui est tracé, et tu es en train de monter sur un mur.*
Élève 1 : *Ça fait tout le tour.*

Dans la plupart des labyrinthes, l'accent est mis sur les murs, réalisés en tesselles [7] noires, tandis que le chemin est en blanc. Mais, dans quelques-uns, comme celui d'Avenches, c'est le chemin (c'est-à-dire le fil d'Ariane) qui est privilégié. En outre, pour étudier un labyrinthe romain, on voit qu'il est plus facile de s'intéresser au chemin, qui présente l'avantage d'être d'un seul tenant. On visualise ensuite les quatre secteurs et le chemin, en remarquant que celui-ci est tracé sur cinq cercles concentriques équidistants (figure 2b). Les élèves sont persuadés que le chemin est identique dans chacun des secteurs [8], mais l'expérience fait apparaître, sur la diapositive, que, si on fait subir des quarts de tours successifs au chemin d'un secteur (figure 2c), on obtient un chemin. . . qui n'a ni entrée, ni sortie, comme le remarquent plusieurs élèves.

Comment résoudre ce problème ? La solution du mosaïste d'Avenches a consisté, après avoir opéré les quarts de tour (figure 3a), à dédoubler l'une des quatre radiales, de façon à créer une radiale d'entrée et une radiale de sortie contiguës (figure 3b),

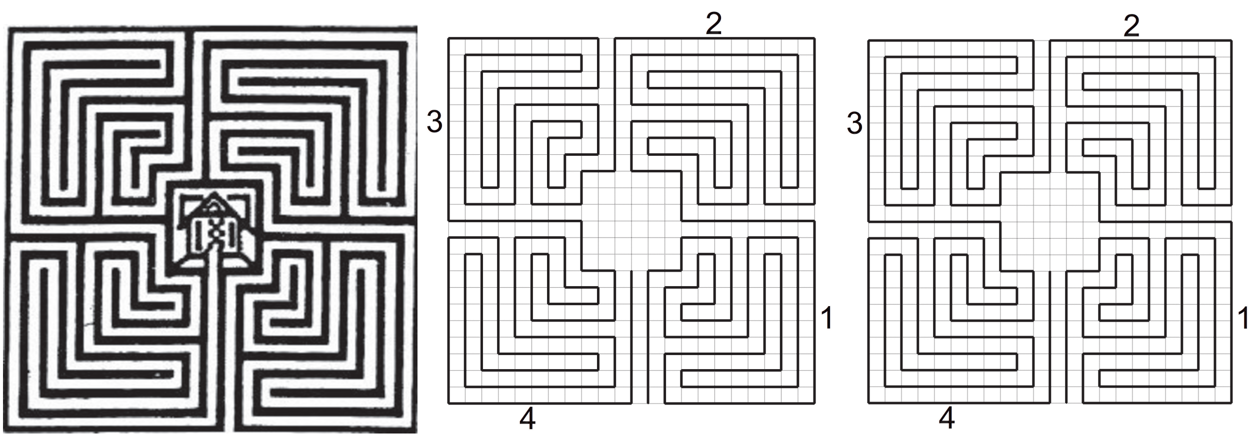
7. Les tesselles sont les petits cubes dont est constituée la mosaïque.
8. Ce type de méandre, de loin le plus fréquent dans les labyrinthes romains, est dénommé « méandre à retour ».



(a) (b)

Figure 3. *Labyrinthe d'Avenches : création d'une entrée et d'une sortie.*

Nous passons ensuite au labyrinthe de Pont-Chevron (Loiret), panneau central d'une mosaïque à décor multiple du troisième quart du IIe siècle (figure 4a). Par rapport au labyrinthe précédent, les élèves commencent par pointer des ressemblances (quatre secteurs) et des différences (forme, complexité). On observe que dans chacun des secteurs, on a, non plus un, mais deux méandres à retour qui se succèdent. On fait ensuite apparaître que le chemin est tracé sur une grille carrée de 22×22, et on numérote les secteurs de 1 à 4 dans l'ordre où ils sont parcourus, à partir de l'entrée extérieure (figure 4b).



(a) *D'après [6, pl. 45].* (b) *Chemin.* (c) *Équilibrage des secteurs*

Figure 4. *Le labyrinthe de Pont-Chevron (Loiret).*

La question est ensuite posée de savoir si les quatre secteurs sont identiques. Le secteur 2 est rapidement évalué comme étant le plus grand, et le secteur 3 comme étant le plus petit. On fait alors remarquer qu'en agrandissant le secteur 3 d'un carreau à droite (et donc en raccourcissant le secteur 2 d'un carreau à gauche), on les rééquilibre (figure 4c). Les secteurs 2, 3 et 4 étant désormais identiques, reste à savoir à quoi est dû le déséquilibre observé ; il est suggéré aux élèves que cela pourrait être la conséquence d'une erreur de comptage du mosaïste sur la grille. Comme pour Avenches, si l'on prend un des secteurs et que l'on opère des quarts de tour, on obtient sans surprise un chemin sans entrée ni sortie. En comparant avec le labyrinthe réel, on peut alors constater que la solution trouvée par le mosaïste de Pont-Chevron a consisté à raccourcir le secteur 1 d'un carreau à gauche, de façon à pouvoir dédoubler la pénétrante située entre les secteurs 1 et 4.

Les élèves ont exprimé leur avis en toute franchise, au sujet de la méthode employée par les mosaïstes.

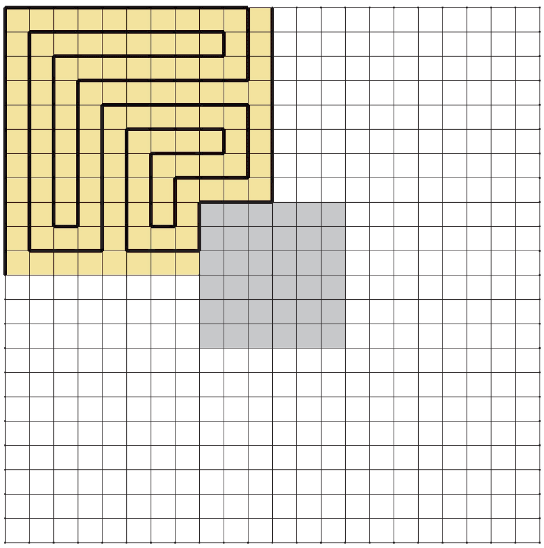
– *Mais ils ont triché, en fait !*
– *Nous aussi, on a le droit de tricher, du coup ?*

La réponse a été qu'il est très facile d'opérer des quarts de tour, car une fois qu'on a rempli un secteur, il n'est pas nécessaire de réfléchir beaucoup pour remplir les autres : il suffit de se repérer sur la grille. Mais, en contrepartie, il est nécessaire d'adapter le chemin pour créer une entrée et une sortie. Ce n'est pas tricher, c'est astucieux, au contraire.

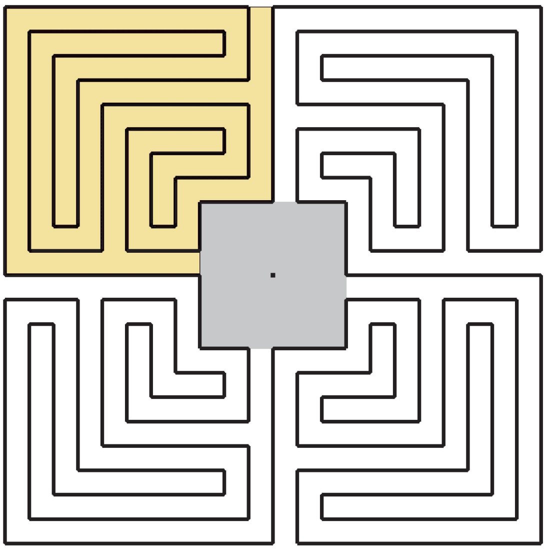
À partir de ce qui a été observé pour les deux labyrinthes précédents, on peut maintenant envisager de donner une « recette » permettant d'obtenir un labyrinthe comme celui de Pont-Chevron.

1. Sur du papier quadrillé, on dessine un carré de 22 carreaux de côté ; on le partage en quatre carrés de 11×11, et on réserve au centre un carré de 6×6 (ce sera l'antre du Minotaure !).
2. Dans l'un des quatre carrés de 11×11, on dessine deux méandres à retour à la suite (figure 5a), en commençant sur le bord extérieur, à la jonction avec un secteur voisin, et en faisant attention de passer par tous les nœuds du quadrillage (ainsi, le chemin sera le plus long possible).
3. On trace le chemin dans les trois autres secteurs, en faisant simplement tourner le premier tronçon plusieurs fois d'un quart de tour, autour du centre de la grille. Ceci donne, bien entendu, un chemin sans entrée ni sortie (figure 5b).
4. On raccourcit l'un des secteurs 1 ou 4 d'un carreau, ce qui permet d'insérer une radiale d'entrée (figure 5c).
5. On dessine les murs autour du chemin, puis on efface celui-ci (figure 5d).

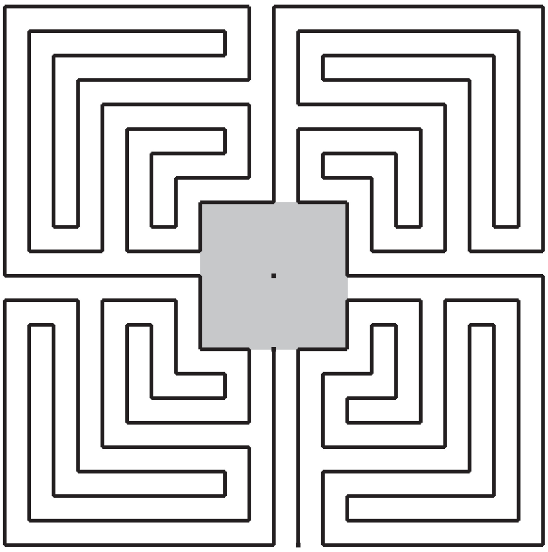
On a ainsi obtenu un « Pont-Chevron amélioré », en ce sens que les secteurs 2 et 3 y sont équilibrés.



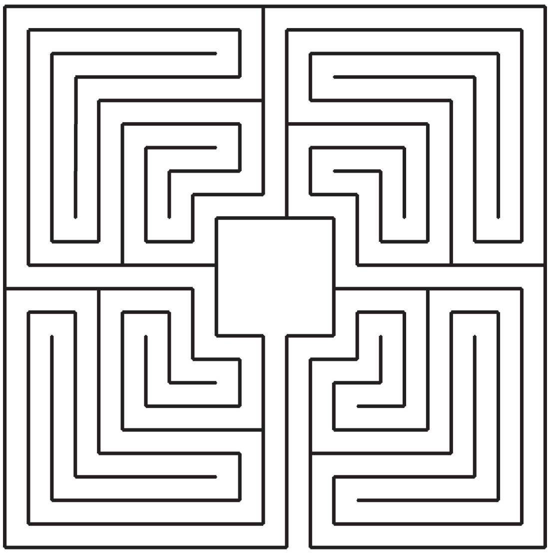
(a) *Remplissage d'un secteur.*



(b) *Quarts de tour.*



(c) *Entrée-sortie.*



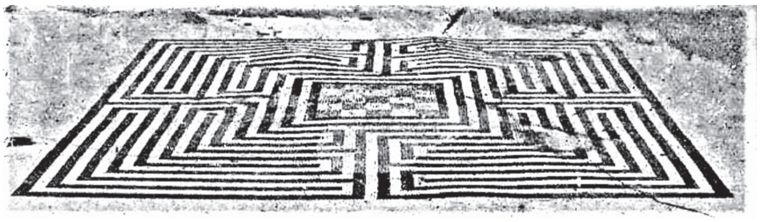
(d) *Murs.*

Figure 5. *Mise en place du labyrinthe de Pont-Chevron « amélioré ».*

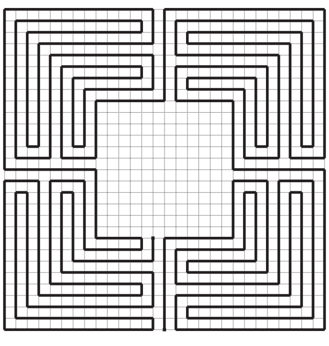
Remarque. On peut aussi partir directement de la grille qui porte les murs (grille qui sera donc de 23 × 23) et tracer le chemin en joignant, non plus des nœuds de la grille, mais des centres de cases. L'avantage de cette méthode est qu'ainsi on a exactement l'emprise du labyrinthe, tandis qu'en partant de la grille du chemin on déborde, à la fin, d'un demi-carreau sur tous les côtés.

Le troisième exemple que nous avons vu est un labyrinthe de Pompéi (figure 6a), daté du Ier siècle avant notre ère. Comme celui de Pont-Chevron, il est construit sur une grille carrée, cette fois de 28 carreaux de côté. La comparaison collective des deux chemins (figure 4b et figure 6b) a permis d'observer que celui de Pompéi est construit sur une grille plus grande, et ceci parce que la « chambre » centrale est plus grande.

En poursuivant la comparaison, l'observation des secteurs montre qu'on a, ici aussi, deux méandres à retour successifs dans chacun d'eux. . . sauf dans le dernier, où le trajet est différent (les spécialistes l'appellent « méandre en aller-retour »). Pourquoi cette nouvelle « tricherie » ? L'explication est donnée : avec un tel méandre, il n'est pas nécessaire de « bricoler » une entrée-sortie. Il s'agit donc d'une adaptation différente, mais qui a la même finalité : permettre de conférer au chemin une entrée et une sortie.



(a) *Vue générale* in situ *(d'après [6, pl. 48b]).*

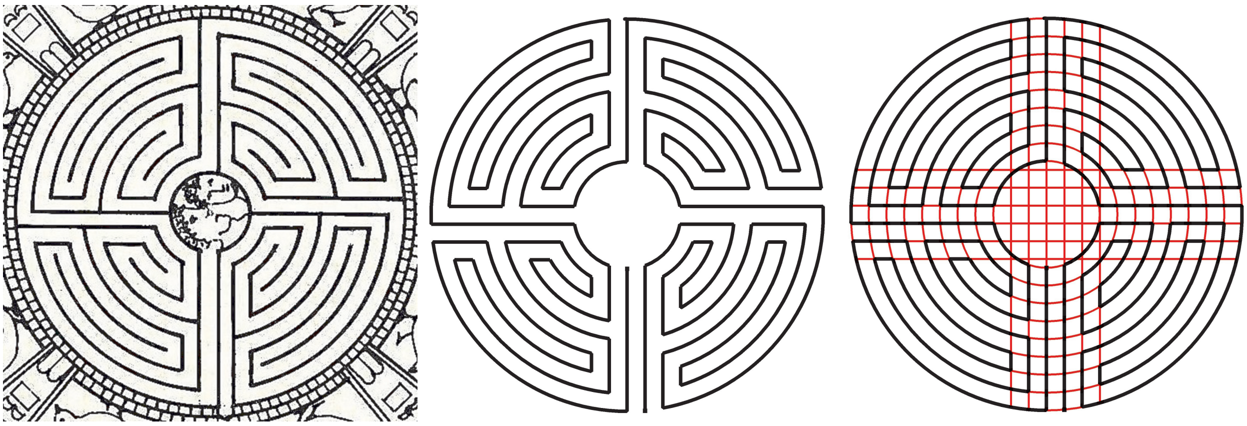


(b) *Schéma.*

Figure 6. *Un labyrinthe de Pompéi.*

Ainsi donc, on peut penser que, de façon générale, le mosaïste antique commençait par dessiner une grille, puis qu'il remplissait un premier secteur avec un chemin en méandre ; dans les autres secteurs, le chemin était obtenu par rotation du premier. Il fallait ensuite, soit (comme à Pont-Chevron) modifier la jonction entre deux des secteurs pour obtenir une entrée et une sortie contiguës (il existait d'ailleurs pour cela plusieurs moyens, qui n'ont pas été détaillés), soit (comme à Pompéi) dessiner dans le dernier secteur un méandre d'une autre sorte.

Dessiner un quadrillage pour y implanter un labyrinthe carré ne pose pas de gros problèmes, mais, comme on l'a vu avec Avenches, il se trouve que certains labyrinthes sont de forme circulaire. Comment y placer une grille ? Un labyrinthe de Vienne (Isère), de la première moitié du IIIe siècle, permet de le savoir (figure 7a et figure 7b). Le chemin est cette fois construit sur une « cible » (figure 7c) constituée d'une série de cercles concentriques équidistants, complétée par une « croix » formée de deux séries perpendiculaires de droites, elles aussi équidistantes. Bien entendu il en va de même pour les murs, avec un cercle et quelques droites supplémentaires.



(a) *[6, pl. 42b].* (b) *Chemin.* (c) *Cible.*

Figure 7. *Labyrinthe de Vienne.*

Enfin, pour terminer la séance, un petit aperçu est donné sur d'autres formes de labyrinthes romains : rectangulaire, semi-circulaire, hexagonale, etc. qui nécessitent d'autres adaptations de la grille, adaptations que les mosaïstes ont, en général (mais pas toujours), su gérer convenablement.

À la suite de cette rencontre, les élèves ont réétudié le tracé des labyrinthes, puis conçu avec leurs professeurs d'arts plastiques et de mathématiques des œuvres mobilisant leurs nouvelles connaissances, et intégrant leurs poèmes ou leurs prénoms (comme on peut le voir sur les figures 8a et 10a).

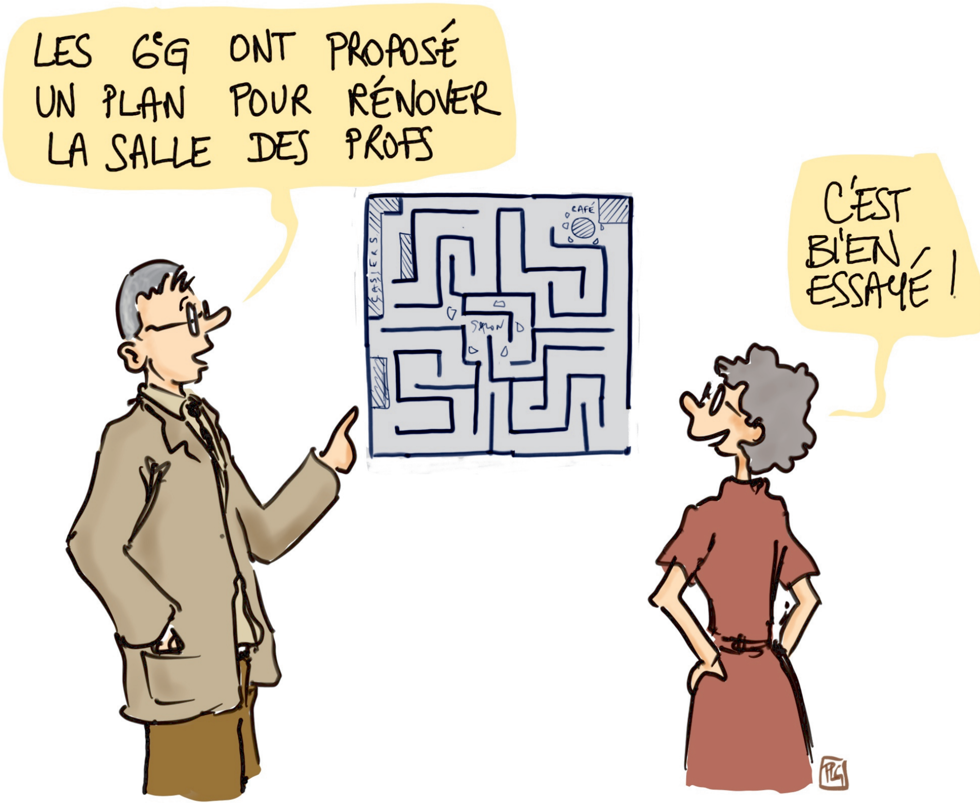
Voici, à titre d'exemple, une réalisation de la classe de Sixième G de Beuvry (figure 8a).

(a) *Œuvre de la classe.*

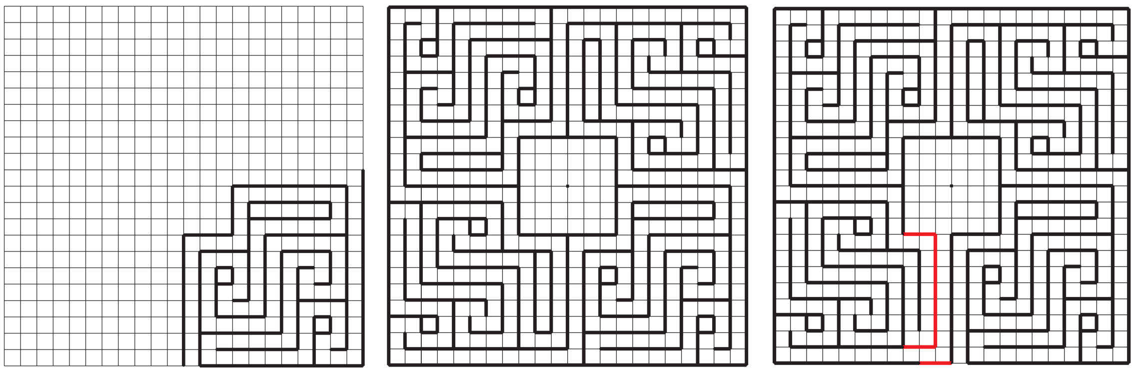
(b) *Schéma d'un élève.*

Figure 8. *Labyrinthe de Vienne.*

Le travail a commencé par l'établissement d'un dessin schématique des murs sur une grille de 22×22 d'une feuille de papier quadrillé (figure 8b). D'après ce dessin, qui a servi de base à la réalisation finale, on peut tenter de reconstituer la démarche du groupe, qui reprend ce qui avait été vu lors de la séance.



Un premier secteur (en bas à droite) a été rempli (figure 9a), en abandonnant toutefois la contrainte du chemin de longueur maximum : en effet, on peut constater que sept centres de cases ne sont pas accessibles. Les murs des trois autres secteurs ont ensuite été tracés à l'aide de rotations d'un quart de tour [9], donnant comme attendu un labyrinthe sans entrée ni sortie (figure 9b). Puis le dernier secteur a été rétréci, causant notamment la disparition du rectangle vide figurant dans les trois premiers (figure 9c).

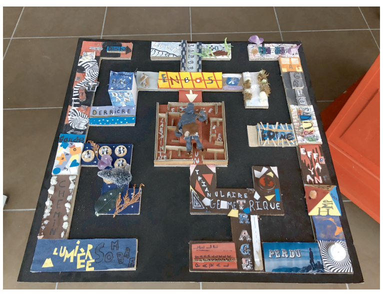


(a) (b) (c)

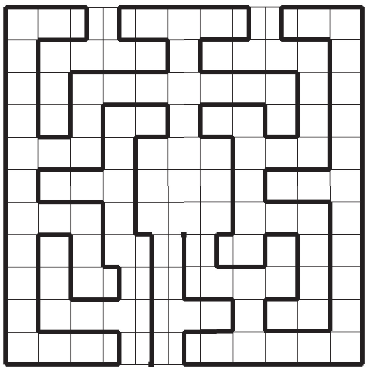
Figure 9. *Reconstitution de la démarche des élèves.*

La partie plus directement artistique a alors pu prolonger ce travail géométrique : remplissage du chemin avec l'utilisation de papiers à motifs, et mise en relief des murs grâce à des fils de fer tressés avec de la laine colorée, dessinant les prénoms des élèves (figure 8a).

Une autre classe du collège de Beuvry, la Sixième E, a représenté son labyrinthe (figure 10a) en employant un procédé artistique différent : juxtaposition d'éléments représentant des termes utilisés dans un de leurs poèmes. On pourra par ailleurs relever une confusion des élèves entre le chemin (tracé en noir sur le schéma) et le mur, dès l'entrée du labyrinthe de l'œuvre plastique.



(a) *Œuvre de la classe.*



(b) *Schéma du dessin.*

Qu'est-ce qu'un labyrinthe ?

C'est des traits en haut et en bas
C'est le centre qu'il faut trouver
C'est le ciel magique
C'est dehors et dedans
C'est la lumière jaune et rose
C'est l'oiseau qui vient et qui s'en va
C'est une balade qui vient
C'est dans la sève et dans le cœur
C'est un lieu intermédiaire
C'est l'univers et le chaos

(c) *Transcription d'un poème d'élève.*

Figure 10. *Réalisation de la classe de Sixième E de Beuvry.*

Les différentes œuvres réalisées ont ensuite été exposées au musée des Beaux-Arts de Cambrai durant trois semaines. Au cours de cette période, une journée a été consacrée à la présentation orale des travaux lors d'un colloque et à la visite guidée du musée (notamment les salles dans lesquelles étaient exposées les œuvres).

9. Peut-être certains se sont-ils aperçus que deux quarts de tour donnent un demi-tour, ce qui aura pu leur faciliter le dessin de l'image d'un secteur.

Ce dispositif aura ainsi permis aux élèves, à travers la rencontre avec les différents intervenants, non seulement d'étendre leurs connaissances, tant artistiques qu'historiques et mathématiques, mais également de mener à bien un projet interdisciplinaire collectif liant les arts plastiques, l'art de la poésie et les mathématiques.

Références

[1] B. Parzysz. *Geometry of ancient mazes. A synthesis*. 2021.

[2] A. Astier. *Kaamelott, Livre I Épisode 91 : La fureur du dragon*. 3 min 30 s. 2005.

[3] P. Weir. *Le cercle des poètes disparus*. Silver screen partners IV. 1989.

[4] C. Nolan. *Inception*. 2010.

[5] P. de Saint-Hilaire. *L'univers secret du labyrinthe*. 2e éd. (1re édition : 1992). Édition Alphée, 2006.

[6] W.A. Daszewski. *La mosaïque de Thésée. Étude sur les mosaïques avec représentation du Labyrinthe, de Thésée et du Minotaure*. Trad. par Zsolt Kiss. Varsovie : Éditions scientifiques de Pologne, 1977.

[7] U. Eco. *Apostille au Nom de la Rose*. Paris : Grasset, 1985.

[8] J. Saward et K. Saward. *Labyrinthos. Labyrinth and maze resource*. . 2020.

Thibaut Renard est professeur dans le collège Albert Debeyre de Beuvry.
Bernard Parzysz est professeur émérite de l'université d'Orléans, membre du LDAR (Laboratoire de Didactique André Revuz) de l'université Paris-Cité; il a été également animateur à l'IREM de cette université. Il collabore avec fidélité aux publications de l'APMEP.

thibaut-maurice.renard@ac-lille.fr
parzyz.bernard@wanadoo.fr

Sommaire du nº 548

Dehors les maths !

CERCLE DE RECHERCHE ET D'ACTION PÉDAGOGIQUES

CultureMATH

MATh.en.JEANS

APMEP

www.apmep.fr