

Le bulletin de l'APMEP - N° 547

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Janvier, Février, Mars 2023

Suites



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte via l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou via le QRcode, ou suivez les logos ▶.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Marie-Ange BALLEREAU, Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTÉIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Cédric GROLLEAU, Louise GROLLEAU, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Pol LE GALL, Nicolas CLÉMENT, Sixtine MARÉCHAL.

Équipe TeXnique : Laure BIENAIMÉ, François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Mars 2023. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

Modélisation mathématique et activités économiques

L'option Mathématiques Complémentaires proposée aux élèves de Terminale est l'occasion d'aborder les mathématiques à travers d'autres champs disciplinaires. Les auteurs nous proposent un exemple tiré du livret Modélisation mathématique et activités économiques publié par l'IREM d'Aix-Marseille en juillet 2022.

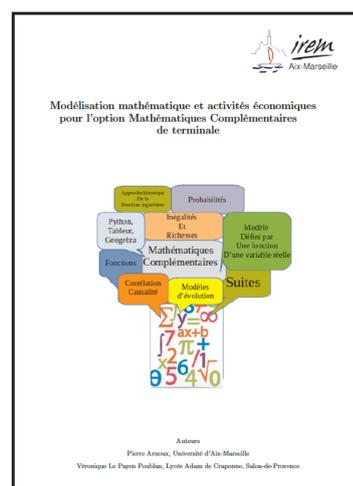
Pierre Arnoux & Véronique Le Payen Poublan

Depuis septembre 2020, l'option Mathématiques Complémentaires est proposée aux élèves de Terminale. Elle s'adresse particulièrement à des élèves qui souhaitent poursuivre des études dans l'enseignement supérieur pour lesquelles ils ont besoin de compléter leurs connaissances et leurs compétences mathématiques tout en conservant deux autres spécialités. C'est le cas par exemple pour les élèves se destinant à des études de médecine ou les élèves allant vers des études en économie.

Le programme de cette option est organisé en neuf thèmes d'études qui touchent à des champs disciplinaires variés : mathématiques, sciences physiques, Sciences de la Vie et de la Terre (SVT), économie, etc. Il nous est rapidement apparu possible de créer un lien entre les thèmes de cette option et des activités proposées en Licence Sciences et Humanités à l'université d'Aix-Marseille. Nous avons donc décidé de concevoir un livret de ressources¹ autour de la modélisation mathématique et de l'économie dans le cadre de l'IREM d'Aix-Marseille [▶](#).

En le construisant, nous poursuivions plusieurs objectifs en plus de celui de tisser un lien entre les enseignements du secondaire et du supérieur : donner du sens à l'enseignement des mathématiques en partant du « réel » (textes historiques, publicités, extraits d'émissions télé, sites internet, etc.) et réutiliser dans ce cadre les concepts et outils mathématiques enseignés les années précédentes, créer le besoin d'outils pour répondre

à des problématiques et développer l'esprit critique des élèves. En résumé, nous souhaitons donner une culture mathématique de qualité aux élèves pour qu'ils puissent appréhender de manière éclairée le monde qui les entoure.



Dans cet article, nous avons choisi de présenter des activités illustrant le thème « Modèles définis par une fonction ». En effet, les fonctions d'une variable réelle sont très présentes dans le monde contemporain même si elles sont souvent cachées pour la plupart des personnes. Elles sont utiles en mathématiques bien sûr mais également dans d'autres domaines tels l'économie, la science physique, la médecine... Ce thème peut être travaillé tout au long de l'année scolaire car il peut être croisé avec d'autres points du programme (inégalités et richesses, fonction logarithme, modèles d'évolution, ...).

1. Le livret *Modélisation mathématique et activités économiques pour l'option Mathématiques Complémentaires de Terminale* est téléchargeable dans la revue numérique *Au fil des maths* [▶](#).

Nous avons choisi ici de travailler sur une fonction continue et affine par morceaux : la fonction qui sert pour le calcul de l'impôt sur le revenu. Cette séquence est constituée de quatre activités qui ont été testées dans deux groupes de Terminale au lycée Adam de Craponne de Salon-de-Provence durant les années scolaires 2020-2021 et 2021-2022.

Activité 1 : pourcentages à tous les étages !

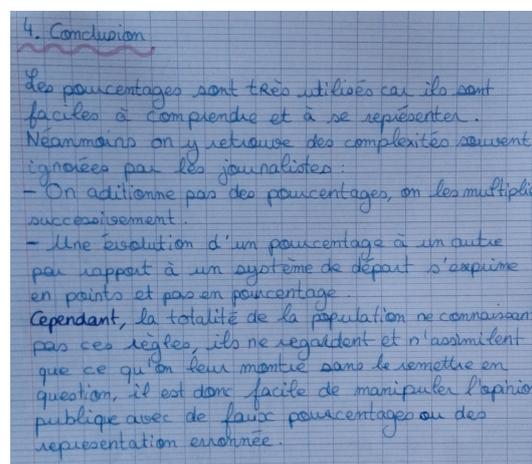
Nous commençons d'abord par le thème des pourcentages. Si les élèves les étudient depuis le cycle 3, il n'est pas rare de constater une mauvaise utilisation de cet outil chez les élèves de Terminale. Cette activité repose essentiellement sur l'application des coefficients multiplicateurs et peut servir d'activité diagnostique avant d'aborder les autres activités de la séquence.

Les élèves sont confrontés à différents documents issus des médias (publicités, journaux...). Ils doivent les analyser et le cas échéant les corriger. Une conclusion réflexive sur l'utilisation des pourcentages et les dangers possibles d'une mauvaise utilisation est attendue.

Comme il y a des documents vidéos, il est nécessaire d'avoir accès à du matériel informatique et il faut disposer de casques audio.

Les élèves ont travaillé pendant 1 h 15 par groupes de trois ou quatre. Leur participation lors de cette séance a été très active et positive. Tous les objectifs fixés au départ ont été remplis. Tous les groupes sont allés jusqu'à l'analyse finale. L'utilisation de documents « réels » issus des médias a suscité une curiosité et une envie de comprendre de la part des élèves. Ils étaient très surpris de ces erreurs et très critiques à l'égard des journalistes !

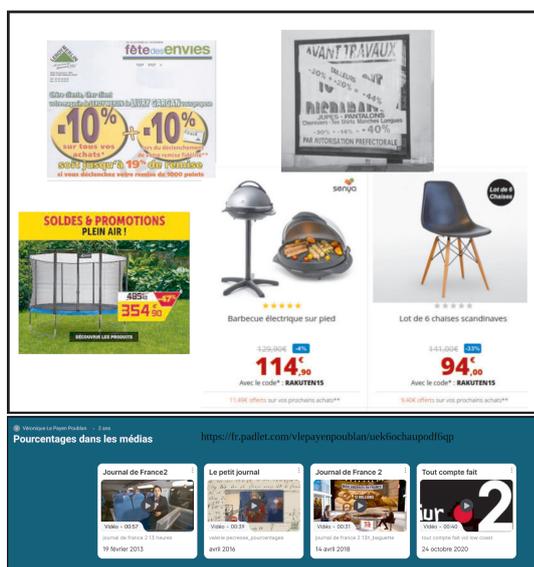
Voici un exemple de réponse d'élèves :



Cette activité a permis de retravailler les coefficients multiplicateurs qui sont nécessaires au calcul de l'impôt sur le revenu que nous allons étudier ensuite.

Activité 2 : l'impôt sur le revenu

Cette activité aborde ce que l'on peut appeler les « mathématiques du citoyen » mais elle permet également d'étudier une fonction d'un genre nouveau : une fonction continue et affine par morceaux. Les élèves doivent faire chez eux la recherche d'une feuille d'imposition sur le site du gouvernement. Ils apportent cette fiche en cours. Puis l'enseignant leur distribue la feuille d'activité où plusieurs cas sont étudiés. Les élèves travaillent en îlots de quatre pendant une heure. Des moments réguliers de mise en commun sont à prévoir.



LIMITE D'EXONÉRATION

Vous n'avez pas d'impôt à payer si votre revenu net imposable est inférieur à la limite indiquée (à limite valable en l'absence de revenus imposables ou en l'absence de revenus imposables et en l'absence de revenus imposables).

Cas général	1 part	1,5 part	2 parts	2,5 parts	3 parts	3,5 parts	4 parts	4,5 parts
Personne seule	15 333	20 375	25 416	30 458	35 499	40 541	45 582	50 624
Couple marié ou pacsé	-	-	28 616	33 658	38 699	43 741	48 782	53 824

5. QUOTIENT FAMILIAL CORRESPONDANT À VOTRE NOMBRE DE PARTS ET BARÈME DE CALCUL DE VOTRE IMPÔT "I"

CALCULER LE QUOTIENT FAMILIAL DU Foyer EN APPLIQUANT LA FORMULE QUI SUIT		Q	=	R	÷	N	=	I				
R : Revenu imposable du foyer. N : nombre de parts												
Q supérieur à 10084 € et inférieur à 10084 €	inférieur à 10084 €	IMPÔT NUL						I NUL				
Q supérieur à 10084 € et inférieur à 25710 €	IMPÔT ÉGAL A	C	R	×	0,11	-	C	R	×	1109,24	=	I
Q supérieur à 25710 € et inférieur à 73516 €	IMPÔT ÉGAL A	C	R	×	0,30	-	C	R	×	5994,14	=	I
Q supérieur à 73516 € et inférieur à 158122 €	IMPÔT ÉGAL A	C	R	×	0,41	-	C	R	×	14080,90	=	I
Q supérieur à 158122 €	IMPÔT ÉGAL A	C	R	×	0,45	-	C	R	×	20405,78	=	I

La déclaration de revenus :

En utilisant le document « déclaration des revenus, fiche facultative de calculs » ci-dessous (on trouve le fichier sur le site du ministère, à l'adresse <https://www.impots.gouv.fr/portail/formulaire/2041-notfc/fiche-facultative-de-calculs-de-limpot-sur-les-revenus-pour-les-residents-en>), calculez les impôts des deux personnes ci-dessous.

Tout d'abord, monsieur Martin :



- Il est célibataire et sans enfants ;
- Son revenu fiscal de référence est de 15 000 € par an.
- Il ne déclare pas de frais réels.
- Il n'a rien à déclarer (ni revenu supplémentaire, ni bien, ni don...)

Ensuite, mademoiselle Rose :

- Elle est célibataire et sans enfants ;
- Son revenu fiscal de référence est de 30 000 € par an.
- Elle décide de ne pas déclarer de frais réels.
- Elle n'a rien à déclarer (ni revenu supplémentaire, ni bien, ni don...)



Encore une fois, l'utilisation de documents « réels » a suscité un vif intérêt chez les élèves et a provoqué beaucoup de questions, en particulier sur leur propre situation familiale. Il n'a pas été toujours simple de répondre à leurs multiples questions sur des cas très particuliers.

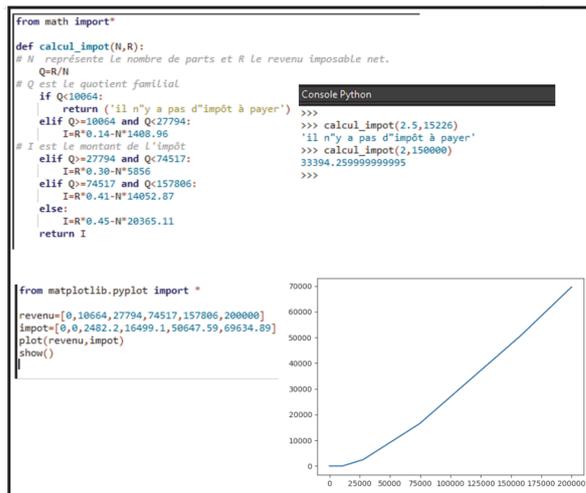
De plus, trouver la fiche d'imposition sur le site du gouvernement a été une réelle difficulté pour les élèves : la recherche a été parfois très laborieuse ! Nous avons anticipé cette difficulté en notant sur la fiche d'activité donnée en classe l'adresse exacte  pour télécharger la déclaration de revenus et en prévoyant des exemplaires photocopiés. Une autre difficulté vient de la déclaration elle-même et de tous les cas particuliers et plafonnements divers qui existent. Enfin, le calcul des impôts n'est pas simple pour des lycéens.

C'est cette dernière difficulté qui a permis de susciter le besoin de l'outil informatique et de l'activité suivante.

Activité 3 : quand Python peut nous aider à calculer nos impôts

Dans cette activité, les élèves utilisent le langage Python pour créer une fonction qui calcule l'impôt sur le revenu en prenant en paramètres le nombre de parts et le revenu imposable. Ils vont également représenter graphiquement la fonction continue par morceaux qui le représente (pour une part). Ils réutilisent le travail fait dans l'activité précédente. Python utilise les listes ainsi que la bibliothèque Matplotlib. Il est bien évident que le travail des élèves est une (toute petite) part du logiciel des impôts. En effet, on ne prend pas en compte les innombrables cas particuliers. Mais cela permet de démythifier un peu cette part des impôts.

L'activité n'a pas posé de problème particulier pour les élèves, étant donné qu'ils avaient été familiarisés avec le calcul de l'impôt dans l'activité 2. Néanmoins pour certains élèves, l'utilisation des listes n'était pas acquise. Il est donc nécessaire de prévoir la boîte à outils avec quelques rappels d'instructions. Le niveau des élèves en informatique étant très variable, la rubrique « pour aller plus loin » a permis de gérer cette hétérogénéité.



Activité 4 : évolution de la part de l'impôt

L'idée dans cette activité est d'aborder l'impôt sur le revenu selon un aspect historique afin de faire

évoluer quelques idées reçues. La fiche d'activité est donnée aux élèves qui travaillent en îlots de quatre pendant une heure en salle informatique.

Nous allons étudier pour quatre ménages l'évolution de la part de leurs impôts dans leur revenu net imposable entre 1975 et 2022.

Nous allons travailler en euro constant. Un montant en euro constant est un montant corrigé de l'inflation depuis une date de référence. Le but de cette correction est de pouvoir comparer des montants dans le temps. On rappelle qu'avant 2002, la monnaie en France était le franc. Au 1^{er} janvier 2002, l'euro devient la seule monnaie en France.

Voici la composition des quatre ménages que nous allons étudier et leur situation financière au regard de l'impôt sur le revenu en 2022 :

Ménage 1 : un célibataire avec un revenu net imposable de 60 000 €.

Ménage 2 : une célibataire avec un enfant à charge et un revenu net imposable de 15 000 €.

Ménage 3 : un couple marié avec trois enfants et un revenu net imposable de 60 000 €.

Ménage 4 : un couple marié sans enfant et un revenu net imposable de 10 000 000 €.

1. À l'aide du site www.france-inflation.com, compléter le tableau ci-dessous pour avoir le revenu net imposable.

Revenu net imposable	1975	1985	1995	2000	2010	2022
Ménage 1						
Ménage 2						
Ménage 3						
Ménage 4						

2. En utilisant le tableau donné en annexe, calculer le montant brut de l'impôt sur le revenu de chaque ménage à l'aide d'un tableur.

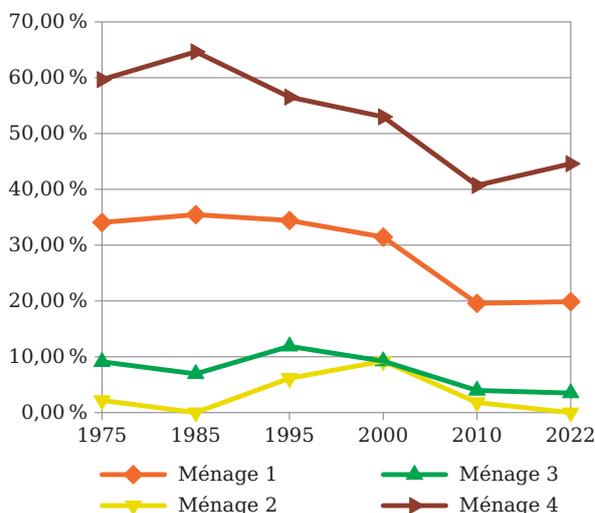
3. En déduire pour chaque ménage la part de l'impôt par rapport à son revenu net imposable. On représentera cette évolution sur un graphique à l'aide d'un tableur.

4. Que constatez-vous ?

On explique d'abord aux élèves le principe de l'imposition par tranches à l'aide du site du ministère des finances. Puis on propose à chaque groupe d'étudier le cas d'un ménage entre 1975 et 2022. L'idée est que chaque groupe étudie le cas d'un ménage parmi les quatre proposés. Une fois cette étude faite, il y a une mise en commun pour avoir un bilan pour les quatre ménages. Afin que les élèves se représentent plus facilement la situation, on part de l'année 2022 et on remonte dans le temps.

La difficulté dans cette activité est de travailler en euro constant afin de tenir compte de l'inflation. On trouve différents sites sur internet qui permettent de faire les conversions. Voici le résultat final obtenu par un des groupes :

Part de l'impôt en % du revenu net imposable	1975	1985	1995	2000	2010	2022
Ménage 1	34,06 %	35,46 %	34,42 %	31,44 %	19,57 %	19,87 %
Ménage 2	2,19 %	0,00 %	6,15 %	9,22 %	1,81 %	0,00 %
Ménage 3	9,10 %	6,94 %	11,87 %	9,22 %	3,97 %	3,50 %
Ménage 4	59,66 %	64,64 %	56,53 %	52,99 %	40,70 %	44,59 %



Il est important d'insister avec les élèves sur les limites de la modélisation et des indicateurs choisis. La dimension historique a provoqué une curiosité et une envie de comprendre de la part des élèves. Ils étaient étonnés de l'aspect décroissant des courbes. Cela a permis d'ouvrir le débat sur des idées reçues concernant les impôts. Pour gagner du temps, on peut proposer aux élèves de travailler sur un ménage et leur donner après un fichier tableur pré-rempli avec les autres ménages. On peut ainsi leur montrer l'intérêt de certaines fonctions (SI, ET, MAX, etc.) du tableur. Ils peuvent aussi tester plusieurs situations facilement et voir l'évolution sur le graphique.

Conclusion

Le retour des élèves sur ces activités et plus généralement sur l'option Mathématiques Complémentaires a été très positif. Ces activités ancrées dans le réel ont permis de gérer l'hétérogénéité

des profils des élèves mais également l'hétérogénéité de leurs projets d'orientation. C'est aussi un enseignement qui a donné beaucoup de satisfaction aux enseignants par son contenu mais également par la place donnée à l'oral. La souplesse donnée par l'absence d'examen a permis d'aborder le programme avec moins de pression pour les élèves. Une grande place est donnée aux activités de recherche et de modélisation dont la restitution se fait par les élèves sous forme de présentation orale. Cela participe à leur préparation à l'épreuve du « grand oral ».

Les élèves étant actifs et intéressés, nous avons décidé de tester ces activités dans d'autres sections : Seconde, Première générale et technologique, Terminale technologique. Il a parfois fallu adapter les énoncés mais l'impact sur les élèves a été à chaque fois très positif!

Nous avons développé des séquences d'enseignement sur d'autres thèmes : modèles d'évolution, corrélation-causalité et inégalités-richesses.

Le point de départ a toujours été des documents réels : historiques (textes de Malthus, de Kermack-Mc Kendrick, de Pareto, etc.) ou contemporains (site World Inequality Database : base mondiale sur les inégalités de revenus et de patrimoines de Thomas Piketty). Elles sont toutes disponibles sur le site de l'IREM d'Aix-Marseille.



Pierre Arnoux, enseignant-chercheur à l'Institut Mathématique de Luminy (13), enseigne en particulier dans la licence Sciences et Humanités à l'université d'Aix Marseille (13). Il participe aux travaux de l'IREM et de nombreuses commissions nationales et internationales sur l'enseignement des mathématiques.

Véronique Le Payen Pouban enseigne au lycée Adam de Craponne de Salon-de-Provence (13) et participe aux travaux de l'IREM d'Aix-Marseille.

pierre@pierrearnoux.fr

veronique.le-payen-pouban@ac-aix-marseille.fr

© APMEP Mars 2023

*
* *

Erratum

Dans le n° 537 d'*Au fil des maths*, page 81, dans l'article de Pierre Legrand *Les énigmes de Luca Pacioli*, quatre lignes avant le bas de page, il est écrit « le plus petit n pour lequel $111 \dots 11$ est premier est 17 ». Cette affirmation est fautive car

$$11\ 111\ 111\ 111\ 111\ 111 = 2\ 071\ 723 \times 5\ 363\ 222\ 357.$$

L'affirmation correcte est : « le plus petit $n \geq 3$ pour lequel $111 \dots 11$ est premier est 19 ».

* *
*

Sommaire du n° 547

Suites

Éditorial	1	Renforcer la culture scientifique de nos élèves par la lecture — Jessica Gouirand-Thuillet	54
Opinions	3	Ouvertures	58
Les positions de l'APMEP — Claire Piolti-Lamorthe, présidente de l'APMEP	3	Démonstrations et programmes — Didier Dacunha-Castelle	58
Renvoyez l'ascenseur (2) — Agnès Veyron	7	Preuves visuelles II — François Boucher	63
La dyscalculie existe-t-elle? — Serge Petit	13	Récréations	69
 Des <i>patterns</i> dans les classes! — Claire Piolti-Lamorthe, Sophie Roubin, Jana Trgalová & les membres du groupe PAREP ¹	19	 Un peu de e-magie! — Dominique Souder	69
Avec les élèves	29	Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt	71
 Suites logiques en maternelle — Sandrine Lemaire	29	Au fil du temps	74
 Des suites au collège : pourquoi pas des fractales? — Lise Malrieu	36	 Pascal, triangle arithmétique, combinaisons et récurrence — Dominique Baroux & Martine Bühler	74
Le rapporteur <i>Recto-Verso</i> — Patrice Pellegrin	41	Modélisation mathématique et activités économiques — Pierre Arnoux & Véronique Le Payen Poublan	84
 Vous avez dit SUITES... — Mireille Génin	43	Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau	89
 Haricots en suite... — Sébastien Corneau	45	Matériaux pour une documentation	91
Un jeu entre amis pas si anodin — Vincent Billoud, Fabrice Richard & Charlotte Vulliez	50		



CultureMATH



APMEP

www.apmep.fr