

Le bulletin de l'APMEP - N° 547

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Janvier, Février, Mars 2023

Suites



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte via l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou via le QRcode, ou suivez les logos ▶.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Marie-Ange BALLEREAU, Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Cédric GROLLEAU, Louise GROLLEAU, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Pol LE GALL, Nicolas CLÉMENT, Sixtine MARÉCHAL.

Équipe TeXnique : Laure BIENAIMÉ, François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Mars 2023. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau



Vous pouvez adresser vos propositions, solutions ou commentaires par courriel à :
frederic.deligt2@gmail.com
ou par courrier à :
Frédéric de Ligt
3 rue de la Pierrière
17270 MONTGUYON

Pour vos envois, privilégiez le courriel si possible. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler les formules. Merci d'avance.

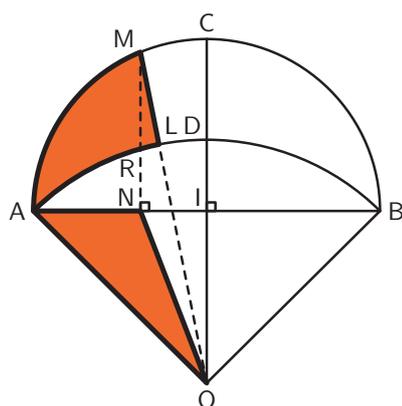
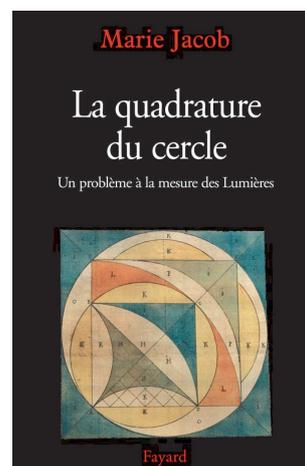
Frédéric de Ligt

547-1 Quadrature d'une portion de lunule

Dans son livre *La quadrature du cercle*, paru en 2006 aux éditions Fayard, Marie Jacob présente la quadrature d'une portion de la première lunule d'Hippocrate de Chio qui a la particularité d'être dynamique. Cette propriété fut publiée pour la première fois par un mathématicien nommé Tschirnhaus en 1687 dans *Acta Eridoterum*.

« Malheureusement, nous n'avons pas retrouvé la démonstration de l'auteur lui-même. »

Marie Jacob précise que l'on sait seulement que Tschirnhaus a donné une démonstration à l'aide de découpages et de comparaisons d'aires de la géométrie classique. Parviendrez-vous à retrouver une preuve élémentaire de ce beau résultat ?



À partir d'un triangle ABO isocèle et rectangle en O, on construit d'une part un arc de cercle de centre O et d'autre part un demi-cercle de diamètre [AB]. Ces deux arcs de cercle délimitent alors une lunule. La médiatrice de [AB] coupe [AB] en I, l'arc de cercle en D et le demi-cercle en C. M est un point quelconque du demi-cercle. Le segment [OM] coupe l'arc de cercle en L. La droite perpendiculaire à [AB] passant par M coupe l'arc de cercle en R et le segment [AB] en N. Il s'agit d'établir l'égalité des aires de la portion de lunule AML et du triangle ANO.

547-2 Fatale erreur (Daniel Perrin - Orsay)

Dans la classe de cours moyen, le petit Valentin, toujours contestataire, proteste auprès de sa maîtresse :
« Mais, Madame, je ne vois pas pourquoi vous m'avez mis zéro à ma division, j'avais tout bon ! »

La maîtresse a beaucoup de mal à lui expliquer que diviser 624 par 18 c'est écrire $624 = 18 \times 34 + 12$ et non pas $624 = (18 + 34) \times 12$, même si les résultats sont identiques.

Montrer qu'on peut fabriquer une infinité d'exemples de cette situation, c'est-à-dire d'entiers b, q, r avec $0 \leq r < b$, vérifiant $bq + r = (b + q)r$.

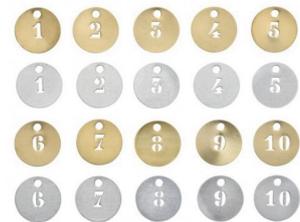


547-3 Partage d'un quadrilatère (Jean-Matthieu Bernat et Pascal Humberger - La Rochelle)

Soit ABCD un quadrilatère convexe et P un point du segment [AD]. On demande, à l'aide de considérations géométriques simples, de construire la droite d passant par P qui découpe le quadrilatère en deux parties de même aire.

547-4 Urne et jetons (Jean-Christophe Laugier - Rochefort)

Dans une urne, on a placé 20 jetons d'aspect identique : 10 blancs numérotés de 1 à 10 et 10 dorés numérotés également de 1 à 10. Deux jetons sont dits complémentaires s'ils sont de couleurs différentes et portent des numéros consécutifs. Combien doit-on au minimum prélever de jetons dans l'urne pour avoir au moins 9 chances sur 10 de tirer deux numéros complémentaires ?



À propos des problèmes parus précédemment

545-1 Château d'eau

Toutes les réponses reçues parviennent à la formule $\frac{\pi h}{12} (D^2 + d^2)$ ou son équivalent avec les rayons. Jean-Paul Thabaret (Thonon-Les-Bains), Bernard Coutu (Quint-Fonsegrives) et Robert Ferréol (Paris) passent par l'équation d'un hyperboloïde et, après des calculs plus ou moins longs, parviennent à l'expression.

Mais il y avait plus facile en considérant une paramétrage de la génératrice rectiligne qui joint un point de la base à un point du sommet et en concluant par un calcul d'intégrale. C'est ce qu'ont fait Ludovic Jany (Bolquère), Maurice Bauval (Versailles), Alain Bougeard (Les Lilas), Richard Beczkowski (Chalon-sur-Saône) et Daniel Perrin (Orsay).

Daniel Perrin précise de plus à quelle hauteur se trouve le rayon minimal de la section ainsi que sa valeur. Enfin, Robert Ferréol donne la formule du volume pour une rotation quelconque entre 0° et 180° .

545-2 Trouvé sur la toile

Certains lecteurs partent de l'égalité proposée : Vincent Thill (Migennes), Richard Beczkowski (Chalon-sur-Saône) et Christophe Rivière (Dieppe), divisent par xyz puis multiplient par $(x + y + z)$. Cette méthode rapide permet d'obtenir immédiatement le résultat attendu, à savoir -3 .

D'autres lecteurs, plus nombreux, Ludovic Jany (Bolquère), Jean-Paul Thabaret (Thonon-Les-Bains), Alain Bougeard (Les Lilas), Daniel Vacaru (Corbeni, Roumanie), Jacques Vieulet (Ibos) et Jean Moussa (Arcueil), travaillent à partir de l'expression dont il faut trouver la valeur et, par quelques manipulations algébriques et bien sûr l'utilisation de l'égalité donnée, parviennent au bon résultat.

Daniel Perrin (Orsay), en mettant l'expression proposée au même dénominateur, observe que le numérateur est un polynôme symétrique qui peut s'écrire avec des fonctions symétriques élémentaires dont la valeur d'une d'entre elles vaut 0 d'après l'énoncé. Bernard Coutu (Quint-Fonsegrives) aborde la question



de façon un peu semblable par le biais d'une équation du troisième degré dont le terme du premier degré est nul. Le résultat suit alors facilement dans les deux cas.

545-3 Inspiré par l'exercice 543-1

Une grande variété de constructions ont été proposées. Ainsi Patrick David (Cergy) et Ludovic Jany (Bolquère) travaillent par construction de figures successives dont les aires sont dans des rapports simples avec l'aire du triangle initial.

D'autres lecteurs utilisent des moyennes géométriques de longueurs de segments qui ont été alignés, c'est le cas de Richard Beczkowski (Chalon-sur-Saône), de Jean-Paul Thabaret (Thonon-Les-Bains), de Daniel Perrin (Orsay), de Bernard Coutu (Quint-Fonsegrives) et de Renaud Dehaye (Nancy).

Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans) procède différemment. Le côté du triangle équilatéral à construire est relié simplement à une hauteur du triangle initial et au diamètre du cercle circonscrit au triangle équilatéral construit sur le côté associé à cette hauteur. Ces deux longueurs sont constructibles.

Enfin Jean Moussa (Arcueil) n'utilise aucune des méthodes précédentes. Il construit un triangle de même aire possédant un angle de 60° et utilise ensuite la bissectrice de cet angle pour construire le triangle équilatéral demandé.

545-4 Équarrissage des bois

« Je sais pourquoi tant de gens aiment couper du bois. C'est une activité où l'on voit tout de suite le résultat. » Albert Einstein.

Nos lecteurs ne sont évidemment pas d'accord avec l'affirmation trouvée dans l'article de Wikipédia. D'ailleurs, Daniel Perrin (Orsay) fait remarquer que cette partie de l'article a disparu de la toile mais Robert Ferréol (Paris) a retrouvé le texte original page 59 du livre *Nouveau Manuel complet du charpentier ou traité simplifié de cet art* par MM. Biston et Hanus, paru en 1861 aux éditions La librairie encyclopédique de Roret.

Avec quelques calculs élémentaires d'aire et un calcul de dérivée pour obtenir l'aire du plus grand rectangle inscrit dans une ellipse, il apparaît que les aires du carré et du plus grand rectangle, inscrits respectivement dans un cercle et dans une ellipse de même aire, ont eux-mêmes des aires égales. C'est le chemin emprunté par Ludovic Jany (Bolquère), Bernard Coutu (Quint-Fonsegrives), Fabrice Laurent (Luneville) et Richard Beczkowski (Chalon-sur-Saône).

Jean Moussa (Arcueil), Daniel Perrin (Orsay) et Robert Ferréol (Paris) expédient le problème en rappelant que l'ellipse est l'image d'un cercle par une affinité qui transforme un carré en un rectangle et les affinités conservent les rapports d'aire. Daniel Perrin apporte de plus des précisions sur la position du rectangle inscrit dans une ellipse.

Toutes les contributions de ces auteurs sont consultables sur le site d'*Au fil des maths*  (onglet RÉCRÉATIONS puis suivre AU FIL DES PROBLÈMES).



Sommaire du n° 547

Suites

Éditorial	1	Renforcer la culture scientifique de nos élèves par la lecture — Jessica Gouirand-Thuillet	54
Opinions	3	Ouvertures	58
Les positions de l'APMEP — Claire Piolti-Lamorthe, présidente de l'APMEP	3	Démonstrations et programmes — Didier Dacunha-Castelle	58
Renvoyez l'ascenseur (2) — Agnès Veyron	7	Preuves visuelles II — François Boucher	63
La dyscalculie existe-t-elle? — Serge Petit	13	Récréations	69
 Des <i>patterns</i> dans les classes! — Claire Piolti-Lamorthe, Sophie Roubin, Jana Trgalová & les membres du groupe PAREP ¹	19	 Un peu de e-magie! — Dominique Souder	69
Avec les élèves	29	Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt	71
 Suites logiques en maternelle — Sandrine Lemaire	29	Au fil du temps	74
 Des suites au collège : pourquoi pas des fractales? — Lise Malrieu	36	 Pascal, triangle arithmétique, combinaisons et récurrence — Dominique Baroux & Martine Bühler	74
Le rapporteur <i>Recto-Verso</i> — Patrice Pellegrin	41	Modélisation mathématique et activités économiques — Pierre Arnoux & Véronique Le Payen Poublan	84
 Vous avez dit SUITES... — Mireille Génin	43	Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau	89
 Haricots en suite... — Sébastien Corneau	45	Matériaux pour une documentation	91
Un jeu entre amis pas si anodin — Vincent Billoud, Fabrice Richard & Charlotte Vulliez	50		



CultureMATH



APMEP

www.apmep.fr