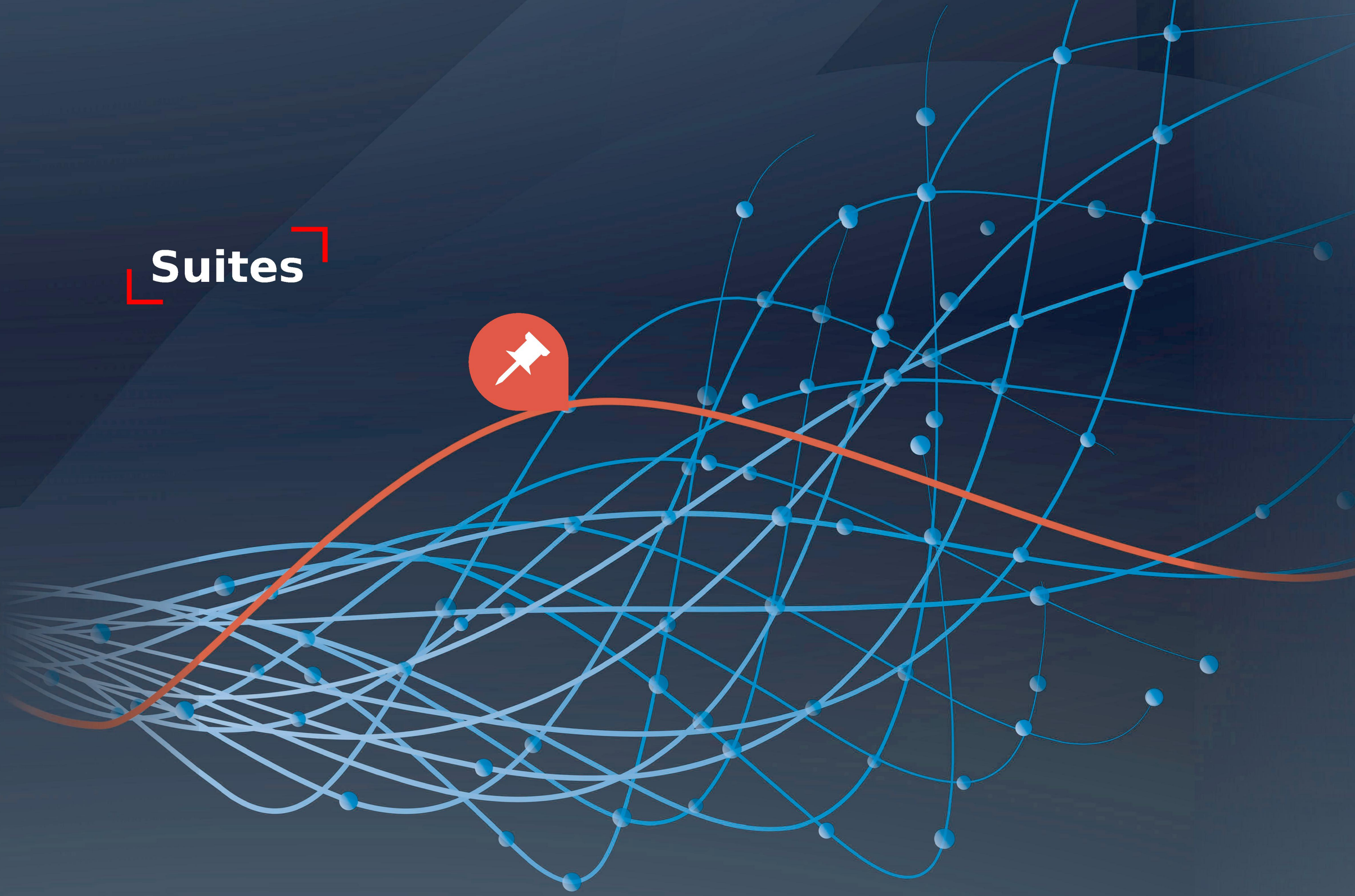
Le bulletin de l’APMEP - N° 547

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l’université. . .

Édition Janvier, Février, Mars 2023

Suites



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l’Enseignement Public

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris
Tél. : 01 43 31 34 05
Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : https://www.apmep.fr
Présidente d'honneur : Christiane Zehren

Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
https://afdm.apmep.fr
version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte *via* l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou *via* le QRcode, ou suivez les logos.

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à aufildesmaths@apmep.fr

Annonceurs : pour toute demande de publicité, contactez Mireille Génin mcgenin@wanadoo.fr

AU FIL DES MATHS

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.
Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.
La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

Mise en page : François Pétiard
Dépôt légal : Mars 2023. ISSN : 2608-9297.
Impression : Imprimerie Corlet
ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

Preuves visuelles II

Pour le plaisir des yeux, François Boucher, assisté de François Pétiard pour les dessins, nous présente de nombreuses preuves visuelles. Cette deuxième partie est tournée vers l'analyse et les inégalités.

François Boucher

Une preuve visuelle réussie génère une certaine jubilation intellectuelle *pour celui qui en perçoit les ressorts*. Une part du travail de lecture est donc laissée aux lectrices et lecteurs.

Inégalités et approximations

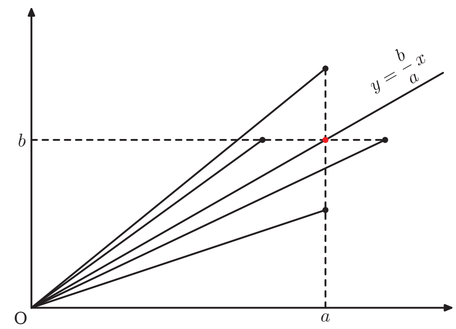
À une certaine époque, on a vu le programme de Seconde vouloir faire sien le mot d'ordre de Jean Dieudonné (alias Monsieur Bourbaki [1]) : « Majorer, minorer, encadrer. » Cette injonction reste pertinente.

Inégalité triangulaire

L'inégalité fondamentale est l'inégalité triangulaire, assez banale dans le cas de nombres réels ; dans le plan, l'argument décisif est sans doute de convoquer le plus court chemin d'un point à un autre.

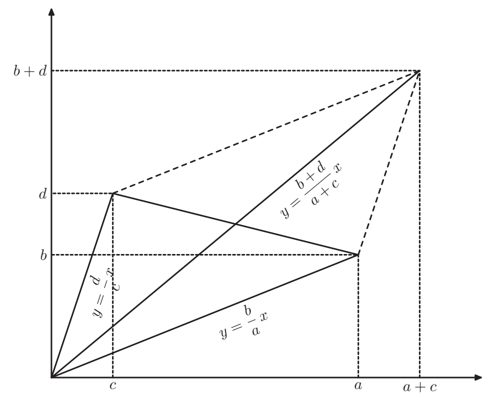
Produits et quotients

Quelques « règles » de majoration-minoration de produits ou de quotients, d'usage constant, sont aisées à illustrer à l'aide de la représentation par rectangle. Une autre représentation des quotients devrait être accessible au lycée : l'association couple (a, b), droite $y = \dfrac{b}{a}x$, quotient-pente $\dfrac{b}{a}$, peut-être même fonction linéaire $x \longmapsto \dfrac{b}{a}x$ avec son taux de variation, est féconde.



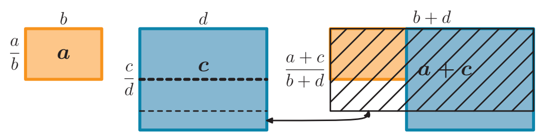
Variations de la pente selon celles de a ou de b.

Aussitôt réinvesties avec des inégalités attribuées à Viète :



$a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$; *si* $\dfrac{b}{a} < \dfrac{d}{c}$ *alors* $\dfrac{b}{a} < \dfrac{b+d}{a+c} < \dfrac{d}{c}$.

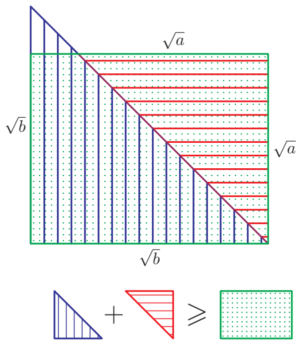
Lesquelles peuvent tout aussi bien être obtenues, de façon lumineuse, par des rectangles :



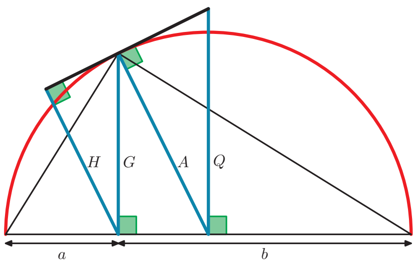
1. N. Bourbaki est le nom d'un célèbre collectif de mathématiciens dont Jean Dieudonné fut l'un des fondateurs.

Comparaison des moyennes

Le programme de Seconde actuel invite à comparer les moyennes, ce qui peut se faire de bien des façons ; par exemple avec des aires pour comparer moyenne arithmétique et moyenne géométrique :



ou avec des triangles rectangles sur une idée de Sidney Kung [1] :

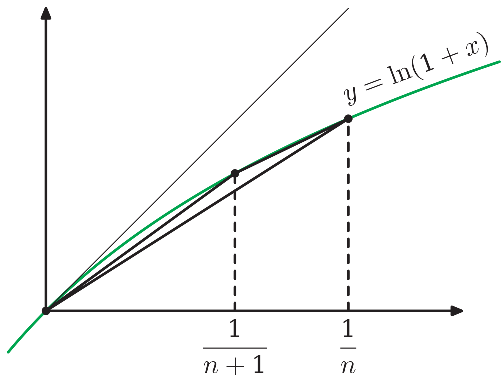


$a > 0$, $b > 0$ $\quad H \leqslant G \leqslant A \leqslant Q$.

Trois triangles rectangles fournissant, par majoration d'un côté par l'hypoténuse, les trois inégalités : c'est brillant. Le lecteur observera que H, G, A et Q sont bien homogènes de degré 1, donc il n'est pas besoin de préciser ici l'unité : a et b peuvent bien désigner des longueurs.

Une croissance majorée

Une suite apparaît nécessairement dans le cursus d'un lycéen : $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Une exploration numérique révèle une croissance majorée qui relève d'une preuve visuelle assez simple :



La comparaison visuelle (!) des pentes[2] fournit

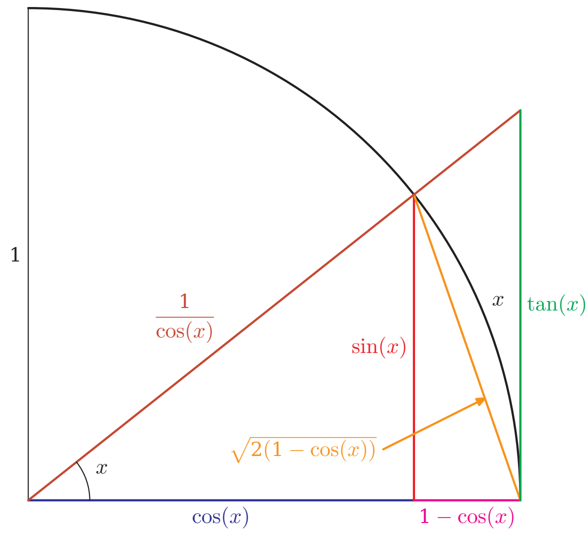
$$(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \leqslant n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1$$

Les propriétés du logarithme permettent de conclure.

Au lycée, le catalogue des fonctions s'enrichit : puissances, polynômes, inverse, trigonométriques, logarithme, exponentielle accompagnées d'un flot de propriétés dont la plupart se visualisent très bien. Restons dans les inégalités. La trigonométrie est un immense réservoir de preuves visuelles mais n'a plus l'importance qu'elle a pu occuper dans les programmes.

Inégalités tayloriennes de la trigonométrie

La figure-clé du cercle trigonométrique (de rayon unité !) permet déjà de multiples lectures, soit sur des mesures de longueurs, soit sur des surfaces.



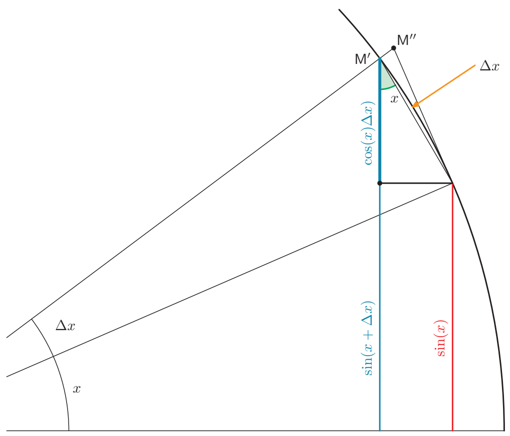
2. Qui résulte de la concavité du logarithme.

En supposant $0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$, avec comme clés principales Thalès, Pythagore et la distance d'un point à une droite, on lit d'une part :

$$\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$$

d'autre part $\sqrt{2(1-\cos(x))} \leqslant x$ qui fournit la remarquable $\cos(x) \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$, inégalités qui permettent de résoudre les questions de continuité et de dérivabilité des fonctions trigonométriques en 0 ; les relations fonctionnelles vérifiées par les fonctions trigonométriques — elles aussi susceptibles de preuves visuelles — permettent de transporter ces propriétés.

Une preuve visuelle directe de la dérivée du sinus est certes possible :



Moyennant quelques approximations, on lit :

$$\sin(x+\Delta x) - \sin(x) \approx \cos(x)\ \Delta x$$

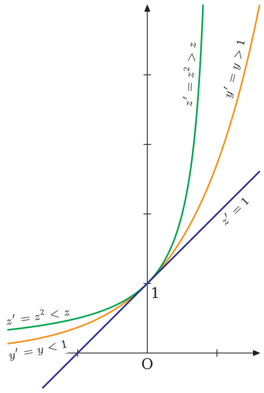
Certes Weierstrass ferait la grimace, attendant quelque inégalité, mais Leibniz écrirait sans hésiter $\sin(x+\mathrm{d}x) - \sin(x) = \cos(x)\,\mathrm{d}x$ à la grande satisfaction d'un éventuel lecteur physicien.

L'exponentielle et le logarithme

Terminons avec l'exponentielle et le logarithme et des inégalités d'usage constant en analyse :

$$\frac{x}{1+x} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x \text{ et } \ln(x) \leqslant \sqrt{x},$$

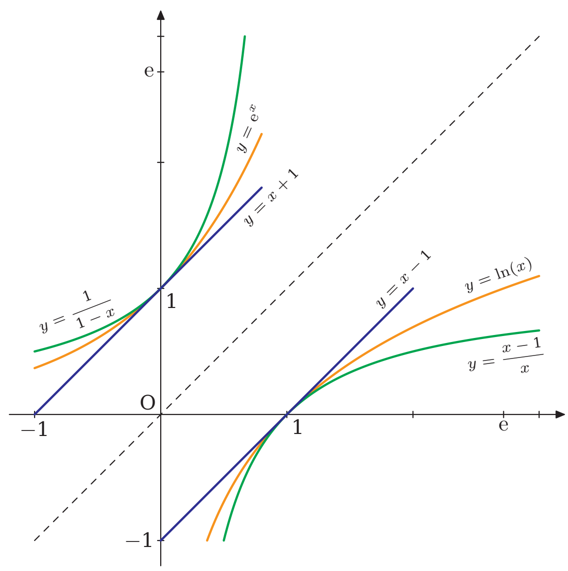
les premières surtout utiles au voisinage de 0 et la dernière au voisinage de l'infini. Puisque l'exponentielle est première (☺) dans la scolarité, passons par elle. Voici une preuve visuelle de $\exp(x) \geqslant 1+x$ qu'on pourra utilement comparer à une preuve classique d'étude des variations de $x \longmapsto \exp(x) - (1+x)$.



Soit $z : x \longmapsto x+1$ et $y : x \longmapsto \exp(x)$. Sur $\mathbb{R}^{*+}$, y croît plus vite que z en partant du même point (la même valeur). Sur $\mathbb{R}^{*-}$, y croît moins vite que z en aboutissant au même point.
Le même raisonnement permet de comparer y et $z : x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ qui vérifie $z' = z^2$.

Voilà des preuves visuelles qui questionnent sérieusement la compréhension de la dérivée.

Puisque $\exp$ et $\ln$ sont réciproques l'une de l'autre, une symétrie fournit une preuve visuelle des inégalités visées moyennant une ultime translation.



Les encadrements obtenus pour $\exp(x)$ et $\ln(1+x)$ permettent d'obtenir des majorations précieuses.

Enfin, $\ln(x) < \sqrt{x}$ pour $x > 4$ s'obtient de la même façon. On peut alors étudier finement le comportement asymptotique de $\ln$.

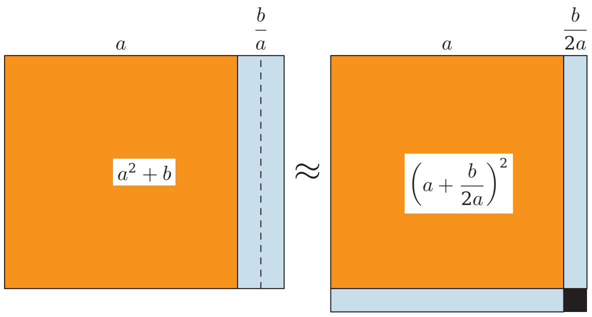
L'intégrale représentée par « l'aire sous la courbe » fournit des preuves visuelles solides de bien des inégalités.

Approximations des racines

Pour calculer une valeur approchée de $\sqrt{N}$, on trouve dans des textes babyloniens l'approximation :

$$\sqrt{a^2+b} \approx a + \frac{b}{2a}.$$

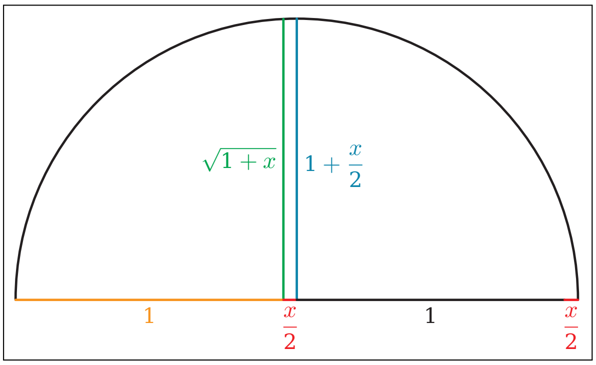
Contemplez donc :



Bien sûr avec $a = 1$ et $b = x$, on retrouve une approximation classique :

$$\sqrt{1+x} \underset{<}{\approx} 1 + \frac{x}{2}$$

qu'on lit aussi bien sur la construction standard de $\sqrt{1+x}$:

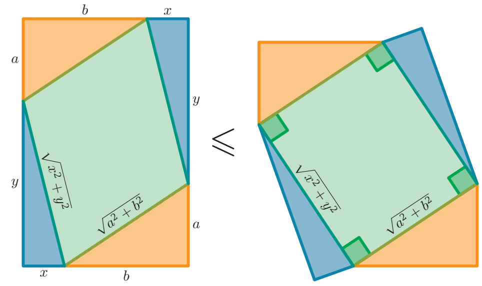


Une bonne question est de faire un travail semblable pour $\sqrt[3]{a^3+b}$ via la complétion du cube.

Approcher, c'est bien ; mais estimer la qualité de l'approximation à l'aide d'une majoration de l'erreur, c'est mieux. Tôt ou tard, l'algèbre reprend ses droits.

Terminons ce paragraphe « inégalités » avec une célébrité.

Inégalité de Cauchy-Schwarz



Par comparaison d'aires :
$(x+b)(y+a)-(xy+ab) \leqslant \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2+b^2}$
donc $xa+yb \leqslant \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{a^2+b^2}$.

Enfin l'infini

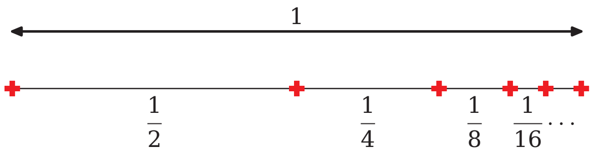
L'infini, c'est la grande affaire de l'analyse. Depuis Zénon d'Élée, les apprentis-mathématiciens sont confrontés à deux conceptions de l'infini : un infini « en puissance », simple à concevoir, par exemple dans le caractère illimité mais inachevable de la suite des entiers. Accepter de (réussir à ?) concevoir ces mêmes entiers comme une totalité *achevée* est problématique psychologiquement (pour certains élèves), philosophiquement (pour nos collègues intuitionnistes), techniquement (pour presque tous les mathématiciens jusqu'à Cantor).

Promenons-nous donc visuellement dans ses contrées.

Une série géométrique

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots = 1.$$

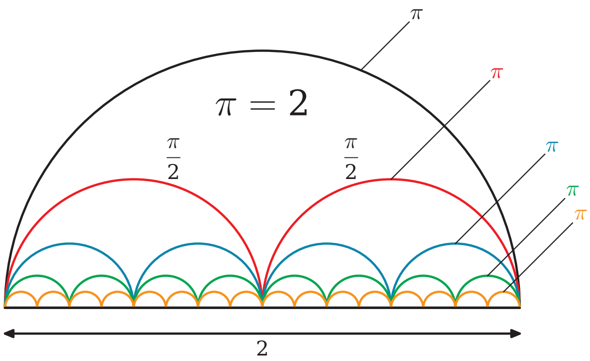
Pour un œil « éduqué », il semble évident que la figure ci-dessous donne une preuve visuelle de l'égalité



Chez des élèves, c'est sujet à discussion, l'infini perçu restant potentiel ; même l'idée de convergence reste fragile (malgré le caractère croissant et majoré clairement perceptible). Un enseignant aux affinités intuitionnistes

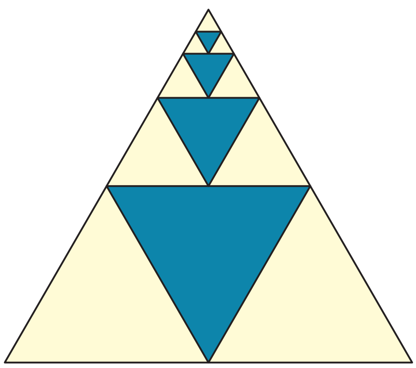
> dira volontiers : « Nous avons une preuve visuelle de l'égalité $\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right]+\frac{1}{2^n}=1$. Comme $\frac{1}{2^n}$ est calculable quelque soit n et peut être rendu inférieur à n'importe quel décimal strictement positif fixé *a priori*, je peux affirmer que la suite $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$ converge vers 1. » Mais pas que la somme de *tous les* $\frac{1}{2^k}$ est *égale* à 1 ; nuance !

Les passages à la limite peuvent poser problème et fournir des preuves visuelles fausses :



Un passage à la limite abusif.

Pour le plaisir, contemplons une autre somme emprunté à [1] ; les yeux devraient réussir à voir les quarts et les tiers.

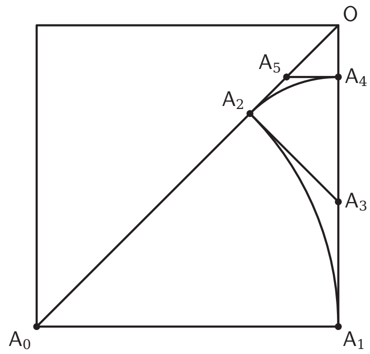


$$\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots=\frac{1}{3}.$$

L'irrationalité visualisée

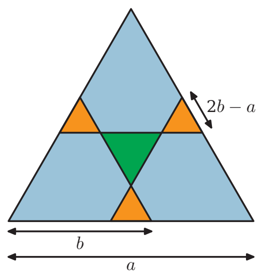
L'irrationalité de $\sqrt{2}$ est le tube de la Seconde. Le principe d'une preuve visuelle magnifique remonte à l'Antiquité.

Anthyphérèse est le nom qu'Euclide donnait à son algorithme (qui n'était certainement pas « le sien ») qui concerne des grandeurs. Il consiste, étant donné deux grandeurs inégales, à retirer toujours la plus petite de la plus grande ; si le processus conduit à deux grandeurs égales, il fournit une commune mesure des deux grandeurs de départ ; si le processus est illimité, les deux grandeurs sont *dites* incommensurables.



La figure ci-dessus illustre l'application de l'anthyphérèse à la diagonale du carré et à son côté. À la deuxième étape, on aboutit au demi-carré OA_2A_3 *semblable à* OA_1A_0 *: donc le processus ne se termine pas, la diagonale et le côté sont incommensurables.*

Puisque nous sommes dans la beauté, la preuve visuelle suivante de l'irrationalité de $\sqrt{3}$ imaginée dans [2] force l'admiration mais demande un début de décodage :



Par l'absurde, supposons qu'il existe a et b entiers tels que $a^2 = 3\,b^2$ ($b < a < 2\,b$). L'aire d'un triangle équilatéral et celle d'un carré de même côté sont proportionnelles. Donc la surface d'un triangle équilatéral de côté (de longueur) a serait le triple de celle d'un triangle équilatéral de côté b.

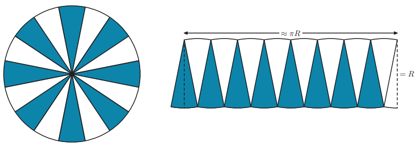
Nos yeux — qui perçoivent bien les recouvrements — nous disent, sans calcul, que la surface de l'équilatéral vert égale trois fois celle de l'équilatéral orange [3]. Vert et orange ont des côtés de longueurs entières et strictement inférieures à a et b : le processus ne se termine pas. Contradiction donc.

Le lecteur se demandera peut être si une preuve visuelle de l'irrationalité de $\sqrt{5}$ de ce type est possible ; la réponse est oui, avec des pentagones bien sûr. Le lecteur est invité aussi à consulter le bel article d'Yves Farcy « le théorème des carpettes » dans le numéro 539 d'*Au fil des maths*.

3. Un théorème des trois carpettes !

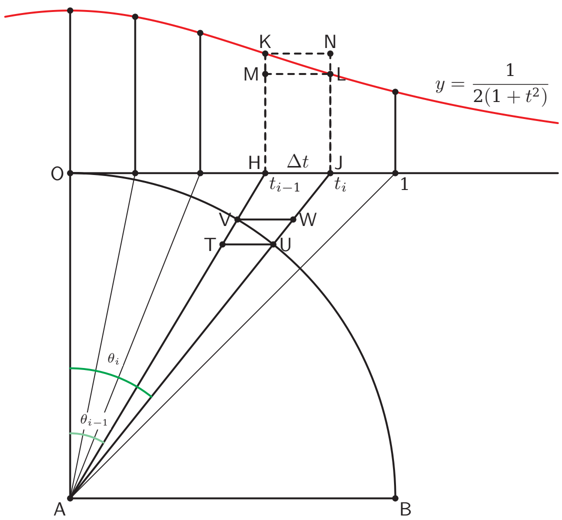
L'irruption de l'infini est inévitable dans les calculs de longueur et d'aire. La scolarité a connu dans le passé un chapitre sur la mesure du rectangle, du cercle (périmètre et aire), de la pyramide ou de la sphère ; d'une manière ou d'une autre, une définition de π est nécessaire.

La preuve visuelle suivante déduisant l'aire du disque du périmètre du cercle, proposée à des étudiants, a généré beaucoup de scepticisme :



Des aires sous la courbe

Proposons une preuve visuelle de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$ assez extraordinaire due à Aage Bondesen [1] : on applique la méthode des rectangles à la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{2\,(1+t^2)}$ sur l'intervalle $[0\,;1]$ que l'on transfère au huitième de cercle.



Deux homothéties de centre A et de rapports respectifs $\cos(\theta_i)$ et $\cos(\theta_{i-1})$ donne

$$\text{aire(ATU)} = \frac{1}{2}\cos^2(\theta_i)\,\Delta t = \frac{\Delta t}{2\,(1+t_i^2)} = \text{aire(HMLJ)}$$

et

$$\text{aire(AVW)} = \frac{1}{2}\cos^2(\theta_{i-1})\,\Delta t = \frac{\Delta t}{2\,(1+t_{i-1}^2)} = \text{aire(HKNJ)}.$$

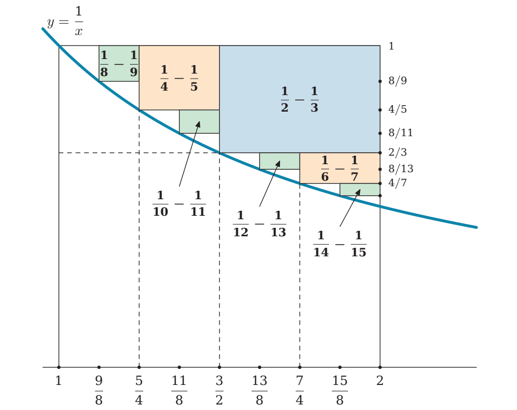
Il s'agit bien d'égalités exactes et pas seulement approximatives. Est-il besoin d'ajouter une explication ? Un petit passage à la limite avec une belle unicité de la limite fournit alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8}\cdot$

C'est tout simplement magnifique d'ingéniosité.

La méthode des rectangles est bien connue et permet d'obtenir des limites de suites par exemple

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2\,n}\right) = \ln(2).$$

Mais Mark Finkelstein (cité dans [1]) a été plus inventif que la méthode des rectangles pour calculer l'aire sous la courbe :



$$1-\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\right] = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

Conclusion

Les preuves visuelles ne sont pas des outils de découverte comme peuvent l'être les différents calculs initiés dans la scolarité et quiconque a cherché à en imaginer une sait la difficulté de l'exercice. L'intérêt est ailleurs, dans le questionnement et la satisfaction procurée par la compréhension de ce que veut *montrer* la preuve avec, à la clé, un peu plus de mathématiques comprises.

Références

[1] Roger Nelsen. *Preuves sans mots*. Hermann, 2013.

[2] Steven Miller et David Montague. « Irrationality from the Book ». In : *arXiv [math.HO]* (2018).

François Boucher, à la retraite depuis quelques années, continue de s'intéresser aux mathématiques et à leur enseignement. Il fait également partie de l'équipe d'*Au fil des maths*.

boucherf@free.fr

Sommaire du nº 547

Suites

Éditorial 1

Opinions 3

Les positions de l'APMEP — Claire Piolti-Lamorthe, présidente de l'APMEP 3

Renvoyez l'ascenseur (2) — Agnès Veyron 7

La dyscalculie existe-t-elle ? — Serge Petit 13

Des *patterns* dans les classes ! — Claire Piolti-Lamorthe, Sophie Roubin, Jana Trgalová & les membres du groupe PAREP[1] 19

Avec les élèves 29

Suites logiques en maternelle — Sandrine Lemaire 29

Des suites au collège : pourquoi pas des fractales ? — Lise Malrieu 36

Le rapporteur *Recto-Verso* — Patrice Pellegrin 41

Vous avez dit SUITES. . . — Mireille Génin 43

Haricots en suite. . . — Sébastien Corneau 45

Un jeu entre amis pas si anodin — Vincent Billoud, Fabrice Richard & Charlotte Vulliez 50

Renforcer la culture scientifique de nos élèves par la lecture — Jessica Gouirand-Thuillet 54

Ouvertures 58

Démonstrations et programmes — Didier Dacunha-Castelle 58

Preuves visuelles II — François Boucher 63

Récréations 69

Un peu de e-magie ! — Dominique Souder 69

Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt 71

Au fil du temps 74

Pascal, triangle arithmétique, combinaisons et récurrence — Dominique Baroux & Martine Bühler 74

Modélisation mathématique et activités économiques — Pierre Arnoux & Véronique Le Payen Poublan 84

Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau 89

Matériaux pour une documentation 91

CERCLE DE RECHERCHE ET D'ACTION PÉDAGOGIQUES

CultureMATH

MATh.en.JEANS

APMEP

www.apmep.fr