

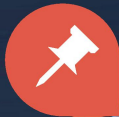
Le bulletin de l'APMEP - N° 547

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Janvier, Février, Mars 2023

Suites



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte via l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou via le QRcode, ou suivez les logos .

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à
aufildesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Marie-Ange BALLEREAU, Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTAIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Cédric GROLLEAU, Louise GROLLEAU, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Pol LE GALL, Nicolas CLÉMENT, Sixtine MARÉCHAL.

Équipe TeXnique : Laure BIENAIMÉ, François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

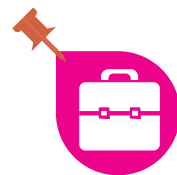
Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Mars 2023. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

Haricots en suite...



La situation que nous présente Sébastien Corneau a été construite dans l'optique d'introduire les suites au lycée et de mettre en évidence la complexité du codage et du décodage de leur expression. Récit d'une séance de classe, avec au menu : manipulation, verbalisation, abstraction... et des patterns !

Sébastien Corneau

Première séance de l'année sur les suites

À travers cette séance, j'ai avant tout voulu construire une situation qui confronte rapidement les élèves de Première spécialité mathématiques, comme ceux de Première STMG, à la complexité du codage et du décodage des expressions liées aux suites, tout en m'appuyant sur un « *pattern*¹ manipulateur ».

Avant l'entrée des élèves dans la salle

Les tables sont regroupées en sept îlots sur lesquels j'ai déposé :

- une « chenille » d'assiettes en carton numérotées,
- un gobelet contenant des haricots rouges,
- la fiche élève contenant uniquement la question n° 1.



Question n° 1

1. Reproduire cette suite de haricots et compléter les trois assiettes vides.
2. Expliquer le mode de construction de cette suite.

Afin de conserver une trace de la réponse, dessiner les haricots manquants sur l'image.



L'arrivée des élèves

Chaque élève rejoint son îlot. S'ensuit une phase de découverte du matériel et de la question, tout cela en autonomie. Personnellement, je me contente de gérer l'accueil des élèves et d'observer leurs réactions. Autour de moi, j'entends : « C'est quoi tout ce bazar ? », « C'est quoi ce truc ? », « On peut commencer Monsieur ? », « Il faut faire quoi ? ». Et je vois aussi des élèves qui bavardent tout en s'amusant avec les haricots. Puis, petit à petit et sans que je n'intervienne, le calme s'installe et je constate que l'ensemble des groupes commence à déposer des haricots dans les assiettes...

Premier questionnaire

La première question est traitée assez rapidement. Cependant, elle est loin d'être dénuée d'intérêt car deux groupes n'ont pas su décoder les informations liées aux rangs. Ne percevant pas l'utilité de la notation $A_0, A_1, \dots$, ils ne l'ont pas prise en compte.

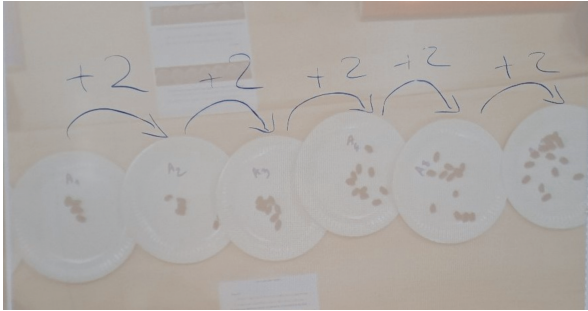
1. Pour une explication de ce qu'est un *pattern*, voir .



Haricots en suite...

Dans les trois premières assiettes on a remarqué que les haricots étaient en deux en deux donc on a continué cette suite avec les trois dernières assiettes (+2 entre chaque assiette)

C'est l'instant que je choisis pour placer mon premier temps de concertation. Je demande alors à l'un des élèves ayant produit la suite de haricots ci-dessous de venir au tableau pour présenter la démarche de son groupe. Pour faciliter les échanges, je projette une photo des assiettes du groupe et de la justification proposée.



Afin de confronter son point de vue à celui des autres, s'ensuit une courte présentation des réponses apportées par trois autres groupes : le prétexte idéal pour faire verbaliser la problématique du « saut de rang » et faire apparaître les différents modes de rédaction utilisés par les élèves, sans pour autant émettre un jugement sur ceux-ci.

assiette	A ₀	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₈	A ₁₃
haricots	2	4	6	8	10	18	28

$$A = 2 \quad 1 = 2$$

$$A + 0 = 2$$

$$A + 1 \times 2 = 4$$

$$A + 2 \times 2 = 6$$

$$A + 3 \times 2 = 8$$

$$A + 4 \times 2 = 10$$

$$A + 13 \times 2 = 28$$

$$A_3 = A_4 + 2$$

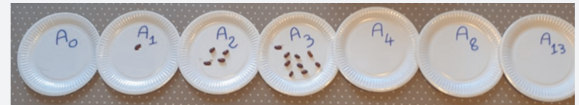
Au fur et à mesure des présentations, la classe se met d'accord sur le fait qu'il faut « imaginer » qu'il y a des assiettes qui ne sont pas là mais qu'il faut les prendre en compte. Au final, cette première question a donc engendré une réflexion sur les notations de type « A_n » et sur le codage et décodage du rang.

Deuxième questionnement

Question n° 2

1. Reproduire cette suite de haricots et compléter les assiettes vides.
2. Expliquer le mode de construction de cette suite.

Afin de conserver une trace de la réponse, dessiner les haricots manquants sur l'image.



La recherche de la « régularité » pose plus de difficultés : un groupe n'a d'ailleurs pas réussi à identifier une procédure de « remplissage » des assiettes. Ci-dessous quelques productions :

	A ₀	A ₁	A ₂	A ₃
	0	1	4	9

numéro de l'assiette ou rang :

$$A_0^2 = 0$$

$$A_1^2 = 1$$

$$A_2^2 = 4$$

$$A_3^2 = 9$$

$$A_4^2 = 16$$

$$A_8^2 =$$



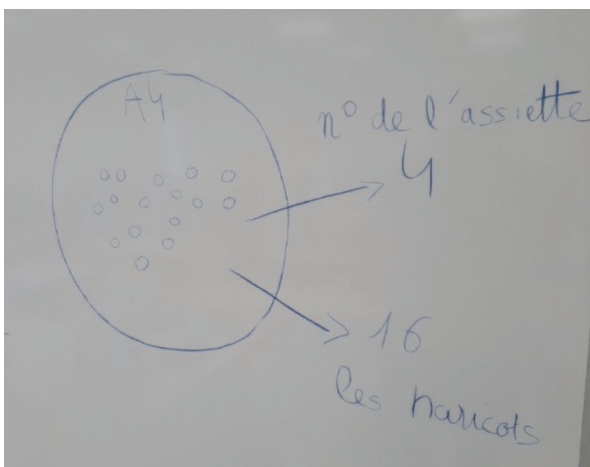
Suite n°2
On a mis le nombre à côté du A sur chaque assiette, et on a fait son carré.

lettre	A ₀	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆
assiette	0	1	4	9	16	25	36

On fait le carré des nombres de l'assiette (à côté du A)

À travers ces verbalisations, on voit bien que l'utilisation du codage « A_n » soulève un certain nombre de problèmes en lien avec la différenciation de la notion de terme et de rang.

Pour permettre à chacun de progresser dans la compréhension des notations, je demande donc à un élève de venir nous expliquer ce que représente pour lui A_4 . À partir de son explication, la classe produit collectivement le schéma ci-dessous.



Lors de cette étape, je ne cherche toujours pas à valider ou invalider les expressions proposées : je me contente de faire émerger un mode de communication en lien avec les $A_0, A_1, A_2 \dots$ que j'avais moi-même écrits sur les assiettes.

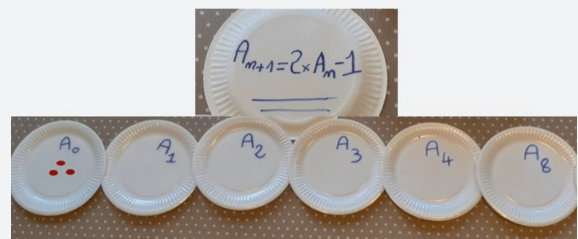
Troisième questionnement

Question n°3

À partir des informations données, compléter les assiettes avec des haricots.

Justifier la démarche.

Afin de conserver une trace de la réponse, dessiner les haricots sur l'image.



Les élèves sont fortement déstabilisés par cette question (c'était d'ailleurs mon but...). Le fait d'être en groupe permet néanmoins aux plus fragiles d'envisager une démarche pour compléter les assiettes.

Plus des deux tiers des groupes font le lien entre cette expression et l'équation $x + 1 = 2x - 1$ où A_n joue le rôle de l'inconnue. Ils se lancent alors dans des résolutions qui finissent généralement par $A_n = 2$. Pour les plus convaincus, deux haricots sont placés dans chacune des assiettes vides. En m'approchant de l'un des groupes, j'entends une élève dire que « cela ne fonctionne pas car il y a trois haricots dans la première assiette, donc ce n'est pas logique ». En passant dans les différents groupes, je constate que la présence de ces trois haricots a « grippé » la jolie mécanique de l'équation. Globalement, c'est l'impasse pour eux. En prêtant l'oreille, j'identifie un groupe qui, sous l'influence d'un élève, a décodé le A_{n+1} comme étant « l'assiette d'après ». Cependant, le groupe n'arrive pas à aller plus loin car il bloque lui aussi sur ce statut du signe « égal ». Effectivement, le statut du signe « égal » doit être identifié comme celui de l'affectation, ce qui est loin d'être évident pour les élèves car ce statut est assez peu mobilisé hors du champ algorithmique.



À ce moment de l'activité, il me semble essentiel que la problématique de l'équation soit abordée devant la classe. Je donne donc la parole au groupe qui a produit la chose ci-dessous.

$$\begin{aligned}
 &A_{n+1} + 1 = 2A_n - 1 \\
 &-2A_n \quad \downarrow \\
 &-A_{n+1} = -1 \\
 &-1 \quad \downarrow \\
 &-A_n = -2 \\
 &A_n = +2 \\
 &\text{Donc 2 haricots}
 \end{aligned}$$

Après avoir expliqué la résolution de ladite équation au tableau, l'élève indique : « On n'est pas trop sûrs car il y a trois haricots au départ. »

Je m'approche du tableau, j'écris l'équation

$$x + 1 = 2x - 1$$

et demande à l'élève : « C'est bien cette équation que tu voulais résoudre ? » Il hésite mais finit par confirmer. Je me tourne vers la classe et demande qui a effectivement cherché à résoudre une équation. De nombreuses mains se lèvent. Je me tourne alors vers l'élève qui a identifié « l'assiette d'après » et lui demande de venir nous expliquer comment son groupe a interprété $A_{n+1} = 2 \times A_n - 1$.

Il commence par faire référence à la taille du « + 1 » : « C'est un petit + 1 en bas. Pour nous, cela veut dire qu'on avance d'une assiette. » Je lui demande alors ce que veut dire $A_n - 1$. Il hésite. Un élève de son groupe répond « C'est l'assiette d'avant ». Je fais remarquer que c'est un « grand - 1 ». L'élève au tableau reprend la parole : « C'est moins un haricot. »

ON POURRAIT
PAS METTRE
DES TACOS À LA
PLACE DES
ASSIETTES ?

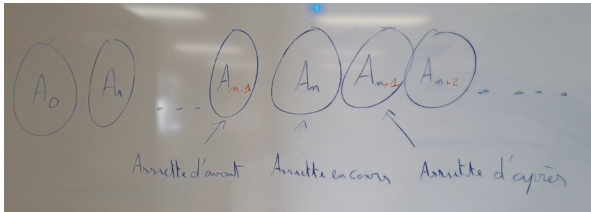


ET UN PEU
DE TABASCO ?

AU MOINS
DU KETCHUP ?



Collectivement, nous établissons le schéma suivant :



Je relance la recherche et très rapidement les assiettes se remplissent de nouveau. Je projette la proposition d'un groupe et fais verbaliser devant la classe la traduction de l'expression en faisant noter au tableau : « *Le nombre de haricots de l'assiette d'après est égal au double du nombre de haricots de l'assiette en cours moins un.* »

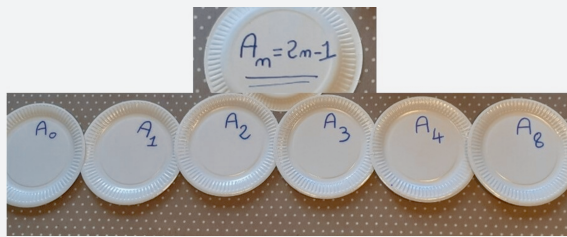
Pour finir

Question n° 4

À partir des informations données, compléter les assiettes avec des haricots.

Justifier la démarche.

Afin de conserver une trace de la réponse, dessiner les haricots manquants sur l'image.



Les élèves traitent assez vite cette question. Plus de la moitié des groupes traduit ce codage par « *Le nombre de haricots de l'assiette d'après est égal au double du nombre de haricots de l'assiette en cours moins un* » en décidant de partir de zéro haricot. Cependant, deux groupes réussissent à l'interpréter correctement. Je décide donc de projeter leur travail et de demander à un élève de venir expliquer leur démarche.

Voici un extrait des échanges :

Élève « On a fait comme pour une fonction et cela donne cela. »

Moi « Pourquoi n'avez-vous pas fait comme pour la question 3 ? »

Élève « Il n'y a pas de + 1 et on n'utilise que le numéro de l'assiette pour calculer. »

Moi « Pourquoi dis-tu qu'on n'utilise que le numéro de l'assiette ? »

Élève « Il n'y a pas la lettre A à droite du égal. »

La classe valide la réponse et comme la fin de l'heure est très proche, je projette la diapo ci-dessous pour synthétiser nos échanges.

Pour $n \in \mathbb{N}$

$$A_{n+1} = 2A_n - 1$$

n : modélise le numéro de « l'assiette en cours »

A_n : modélise le nombre de haricots dans « l'assiette en cours »

A_{n+1} : modélise le nombre de haricots dans « l'assiette d'après »

Attention, il ne faut pas confondre A_{n+1} et $A_n + 1$

Conclusion

La situation que je viens de vous présenter est loin d'être révolutionnaire en tant que telle, mais elle a le mérite d'avoir initié une dynamique d'apprentissage chez mes élèves !

Sébastien Corneau est professeur de mathématiques et de NSI (Numérique et Sciences Informatiques), ainsi que formateur dans l'académie d'Orléans-Tours.

sebastien.corneau@ac-orleans-tours.fr

© APMEP Mars 2023

Sommaire du n° 547



Suites

Éditorial	1	Renforcer la culture scientifique de nos élèves par la lecture — Jessica Gouirand-Thuillet	54
Opinions	3	Ouvertures	58
Les positions de l'APMEP — Claire Piolti-Lamorthe, présidente de l'APMEP	3	Démonstrations et programmes — Didier Dacunha-Castelle	58
Renvoyez l'ascenseur (2) — Agnès Veyron	7	Preuves visuelles II — François Boucher	63
La dyscalculie existe-t-elle? — Serge Petit	13	Récréations	69
★ Des <i>patterns</i> dans les classes! — Claire Piolti-Lamorthe, Sophie Roubin, Jana Trgalová & les membres du groupe PAREP ¹	19	★ Un peu de e-magie! — Dominique Souder	69
Avec les élèves	29	Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt	71
★ Suites logiques en maternelle — Sandrine Lemaire	29	Au fil du temps	74
★ Des suites au collège : pourquoi pas des fractales? — Lise Malrieu	36	★ Pascal, triangle arithmétique, combinaisons et récurrence — Dominique Baroux & Martine Bühler	74
Le rapporteur <i>Recto-Verso</i> — Patrice Pellegrin	41	Modélisation mathématique et activités économiques — Pierre Arnoux & Véronique Le Payen Poublan	84
★ Vous avez dit SUITES... — Mireille Génin	43	Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau	89
★ Haricots en suite... — Sébastien Corneau	45	Matériaux pour une documentation	91
Un jeu entre amis pas si anodin — Vincent Billoud, Fabrice Richard & Charlotte Vulliez	50		



CultureMATH

