

Le bulletin de l'APMEP - N° 547

AU FIL DES MATHS

de la maternelle à l'université...

Édition Janvier, Février, Mars 2023

Suites



APMEP

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

26 rue Duméril, 75013 Paris

Tél. : 01 43 31 34 05

Courriel : secretariat-apmep@orange.fr - Site : <https://www.apmep.fr>

Présidente d'honneur : Christiane ZEHREN



Au fil des maths, c'est aussi une revue numérique augmentée :
<https://afdm.apmep.fr>

version réservée aux adhérents. Pour y accéder connectez-vous à votre compte via l'onglet *Au fil des maths* (page d'accueil du site) ou via le QRcode, ou suivez les logos .

Si vous désirez rejoindre l'équipe d'*Au fil des maths* ou bien proposer un article, écrivez à
aufildesmaths@apmep.fr

Annonces : pour toute demande de publicité, contactez Mireille GÉNIN mcgenin@wanadoo.fr

ÉQUIPE DE RÉDACTION

Directrice de publication : Claire PIOLTI-LAMORTHE.

Responsable coordinatrice de l'équipe : Cécile KERBOUL.

Rédacteurs : Marie-Ange BALLEREAU, Vincent BECK, François BOUCHER, Richard CABASSUT, Séverine CHASSAGNE-LAMBERT, Frédéric DE LIGT, Mireille GÉNIN, Cécile KERBOUL, Valérie LAROSE, Alexane LUCAS, Lise MALRIEU, Marie-Line MOUREAU, Serge PETIT, Daniel VAGOST, Thomas VILLEMONTÉIX, Christine ZELTY.

« **Fils rouges** » numériques : Gwenaëlle CLÉMENT, Nada DRAGOVIC, Fanny DUHAMEL, Laure ÉTÉVEZ, Marianne FABRE, Robert FERRÉOL, Cédric GROLLEAU, Louise GROLLEAU, Yann JEANRENAUD, Armand LACHAND, Agnès VEYRON.

Illustrateurs : Pol LE GALL, Nicolas CLÉMENT, Sixtine MARÉCHAL.

Équipe TeXnique : Laure BIENAIMÉ, François COUTURIER, Isabelle FLAVIER, Philippe PAUL, François PÉTIARD, Guillaume SEGUIN, Sébastien SOUCAZE, Sophie SUCHARD, Michel SUQUET.

Maquette : Olivier REBOUX.

Correspondant Publimath : François PÉTIARD.

Votre adhésion à l'APMEP vous abonne automatiquement à *Au fil des maths*.

Pour les établissements, le prix de l'abonnement est de 60 € par an.

La revue peut être achetée au numéro au prix de 15 € sur la boutique en ligne de l'APMEP.

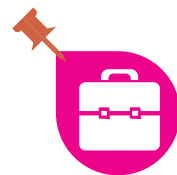
Mise en page : François PÉTIARD

Dépôt légal : Mars 2023. ISSN : 2608-9297.

Impression : Imprimerie Corlet

ZI, rue Maximilien Vox BP 86, 14110 Condé-sur-Noireau

Vous avez dit SUITES...



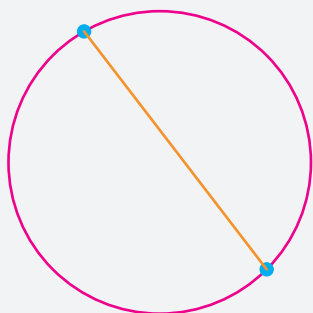
Sur le remarquable site du CNRS « **Images des Mathématiques, la recherche mathématique en mots et en images** », la tribune DÉMARRAGE TROMPEUR fait rebondir Mireille Genin qui nous conte une recherche originale d'un de ses élèves sur la suite présentée...

Mireille Génin

Voici des extraits de cette tribune du 1^{er} mars 2022 écrite par Patrick Popescu-Pampu .

Quel est le terme suivant de la suite 2, 4, 8, 16 ?
Vous croyez savoir ? Pas si vite...

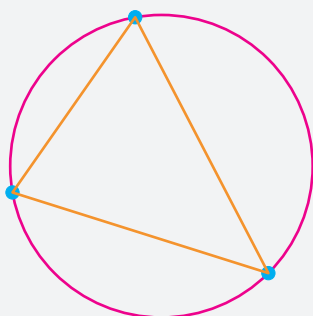
Dessignons un cercle et prenons deux points dessus, puis traçons la corde qui les relie :



En combien de régions cette corde divise-t-elle le cercle ?

En 2 régions, évidemment.

Prenons maintenant 3 points sur un cercle, et traçons toutes les cordes qui les joignent :

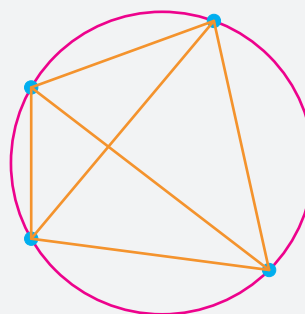


En combien de régions le cercle se trouve-t-il subdivisé par ces cordes ?

Ce n'est pas bien dur de les compter : il y en a 4.

Prenons ensuite 4 points...

Cette fois on obtient 8 régions :



Et si on prenait 5 points ? On a une suite qui démarre par 2, 4, 8, il y a fort à parier que le terme suivant est 16...

Eh oui, il y en a bien 16...

Bon, alors, si on a n points sur le cercle et qu'on les relie de toutes les manières possibles, on donnera probablement naissance à 2^{n-1} régions, et cela doit sûrement se prouver par récurrence, sans trop de difficulté...

En tout cas, c'est la réaction qu'ont eue les collègues mathématiciens à qui j'ai montré la suite de figures précédente. Ils n'étaient pas bien intéressés...

Attendez, leur répondis-je, et comptez les régions lorsqu'on prend 6 points sur le cercle...

... 32 ? Eh non, il y en a bien seulement 31.



Vous avez dit SUITES...

L'auteur présente ensuite sa source pour ce problème : *Le livre des nombres* de John H. Conway et Richard K. Guy, puis le théorème donnant le nombre de régions cherché ici et termine son article par :

Êtes-vous d'accord avec moi que cela ferait un joli thème de réflexion dans un club mathématique de lycéens ?

Ce problème est effectivement un joli thème de réflexion dans un club de maths (ou atelier) en lycée : les élèves (et les profs) y disposent de temps pour chercher, pour mettre en place des méthodes et laisser libre cours à des initiatives. Ils utilisent parfois des méthodes qui ne nous seraient pas venues à l'idée en classe, ou que l'on aurait rejetées *a priori*.

Je me souviens que Julien, élève de Terminale, très actif en atelier, s'était obstiné sur ce nombre de régions, 2, 4, 8, 16 puis 31 ! Ayant refait plusieurs fois le dessin du cercle et des régions dans le cas où *il n'y a pas 32 régions mais seulement 31*, il cherchait à obtenir « expérimentalement » une formule pour la démontrer ensuite par récurrence.

Voici la méthode de Julien :

Connaissant les 5 premiers termes de la suite, il place les points de coordonnées $(n; u_n)$ dans un repère et observe le graphique obtenu. Pourrait-on trouver une courbe « intéressante » passant par ces 5 points ?

Sa première idée ? Une parabole. Il écrit d'abord $y = ax^2 + bx + c$ mais voit vite qu'il n'y pas de solution respectant les données.

Au vu de la forme de la courbe qu'il trouve « plate » au démarrage, il décide d'augmenter le degré du polynôme. Il évite le degré 3 car

« la courbe ne ressemble pas à la représentation d'une fonction cubique » et teste le degré 4. Il écrit $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ et reporte cinq fois les couples $(n; u_n)$ connus, pour obtenir un système d'équations où les inconnues sont les coefficients du polynôme.

Comme sa calculatrice propose la résolution de systèmes linéaires à 5 inconnues, il précise : « *Il n'y plus qu'à la faire mouliner pour trouver les coefficients du polynôme.* » Et ça marche ! Il teste même que la formule obtenue fonctionne pour les deux termes suivants.

La démonstration par récurrence ne sera pas ensuite très facile mais la méthode de Julien pour établir une conjecture m'a parue originale et intéressante. Elle peut être reproduite dans un grand nombre de situations pour établir une conjecture sur l'écriture du terme général d'une suite avant la démonstration par récurrence.

Par exemple pour la somme des carrés (polynôme de degré 3), la somme des carrés des premiers entiers pairs, impairs, la somme des cubes (degré 4)...

Julien a su faire le lien entre des outils mathématiques qui sont parfois « rangés » dans des « boîtes » et cloisonnés dans les programmes. L'autonomie laissée aux clubs et ateliers permet très souvent de « sortir » des sentiers battus, de décloisonner les outils... et de développer les prises d'initiatives et le plaisir de chercher.



Mireille Génin, enseignante de mathématiques retraitée, reste active au sein de la régionale de Nantes de l'APMEP et fait partie de l'équipe d'Au fil des maths.

mcgenin@wanadoo.fr

© APMEP Mars 2023

Sommaire du n° 547



Suites

Éditorial	1	Renforcer la culture scientifique de nos élèves par la lecture — Jessica Gouirand-Thuillet	54
Opinions	3	Ouvertures	58
Les positions de l'APMEP — Claire Piolti-Lamorthe, présidente de l'APMEP	3	Démonstrations et programmes — Didier Dacunha-Castelle	58
Renvoyez l'ascenseur (2) — Agnès Veyron	7	Preuves visuelles II — François Boucher	63
La dyscalculie existe-t-elle? — Serge Petit	13	Récréations	69
★ Des <i>patterns</i> dans les classes! — Claire Piolti-Lamorthe, Sophie Roubin, Jana Trgalová & les membres du groupe PAREP ¹	19	★ Un peu de e-magie! — Dominique Souder	69
Avec les élèves	29	Au fil des problèmes — Frédéric de Ligt	71
★ Suites logiques en maternelle — Sandrine Lemaire	29	Au fil du temps	74
★ Des suites au collège : pourquoi pas des fractales? — Lise Malrieu	36	★ Pascal, triangle arithmétique, combinaisons et récurrence — Dominique Baroux & Martine Bühler	74
Le rapporteur <i>Recto-Verso</i> — Patrice Pellegrin	41	Modélisation mathématique et activités économiques — Pierre Arnoux & Véronique Le Payen Poublan	84
★ Vous avez dit SUITES... — Mireille Génin	43	Le CDI de Marie-Ange — Marie-Ange Ballereau	89
★ Haricots en suite... — Sébastien Corneau	45	Matériaux pour une documentation	91
Un jeu entre amis pas si anodin — Vincent Billoud, Fabrice Richard & Charlotte Vulliez	50		



CultureMATH

